



Матвей Михайлович
Михайлов

21. Шарниры и моделирование подписи



Альфред Кемпе (1849–1922), учившийся в Кембриджском Тринити-колледже у известного геометра Артура Кэли, стал адвокатом. Среди его увлечений были скалолазание в Альпах, музыка и математика.

Кемпе долгое время был вице-президентом и казначеем Лондонского королевского общества, а также в 1892–94 годах — президентом Лондонского математического общества.

Он известен как автор ошибочного доказательства теоремы о четырёх красках.

В его основной работе по шарнирным механизмам, носящей название «Об общем методе черчения шарнирным механизмом плоских кривых n -й степени», **не содержится формулировок каких-либо теорем.**

Теорема Кемпе

Теорема (Кемпе)

Всякий достаточно малый кусок произвольной плоской алгебраической кривой представляет собой множество положений правильно подобранного плоского шарнирного механизма.

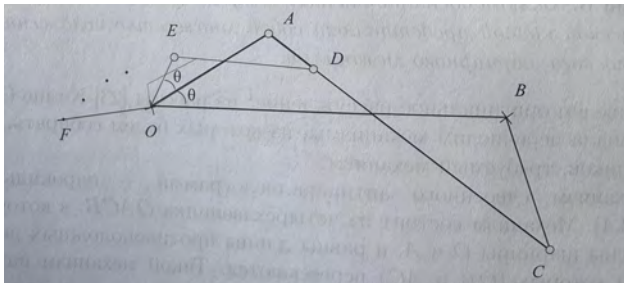
Иными словами: для любой алгебраической кривой и любой её точки найдётся шарнирный механизм, пишущий шарнир которого вычерчивает кривую в окрестности этой точки.

Источник формулировки

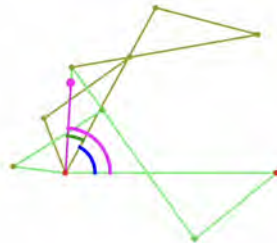
В книге *М.Д. Ковалёва. «Геометрические вопросы кинематики и статики»* содержание работы Кемпе было строго сформулировано в виде приведённой выше теоремы.

Умножитель Кемпе и накопитель Кемпе

Для доказательства этой теоремы нам потребуется несколько базовых механизмов:



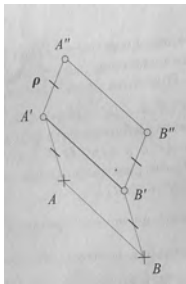
Умножитель — умножает входной угол на
целое число n .
Служит для получения слагаемых вида $n\varphi$.



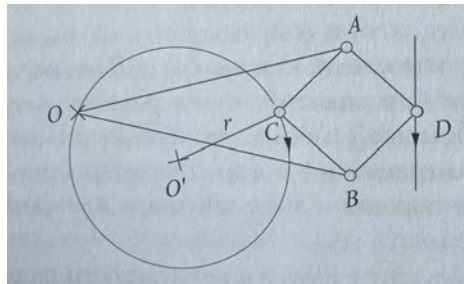
Накопитель — складывает два входных угла.
Служит для суммирования угловых вкладов.

Переносчик и инверсор Поселье

А также:



Переносчик — копирует наклон рычага и переносит его в другое место механизма с сохранением ориентации.



Инверсор Поселье — преобразует вращательное движение в прямолинейное: пишущий шарнир движется по прямой.

Доказательство

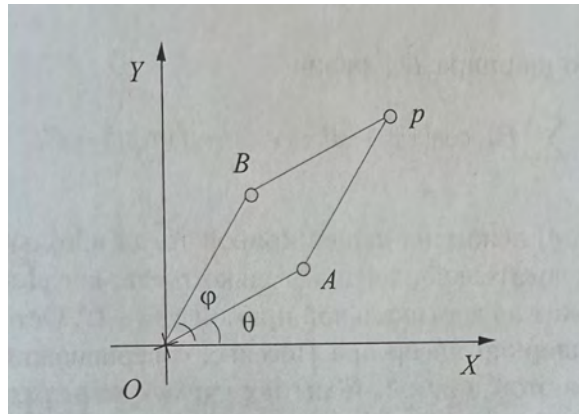
Пусть p — точка на алгебраической кривой. Сдвинув, если нужно, декартову прямоугольную систему координат OXY , можно считать, что точка p не совпадает с её началом, и можно построить шарнирный ромб (рис. 4.8) с рычагами постоянной длины: $|OA| = |OB| = a$. Опираясь на его рычаги OA и OB , мы построим наш шарнирный механизм. Пусть $\angle XOA = \theta$, $\angle XOB = \varphi$ и эти углы меняются при движении точки p по алгебраической кривой, заданной в нашей системе уравнением $f(x, y) = \sum_{k,l} A_{kl} x^k y^l = 0$, где k, l — неотрицательные целые. Их сумма $k + l$ не превосходит степени N кривой. Выпишем координаты точки p :

$$\begin{aligned}x &= a(\cos \theta + \cos \varphi), \\y &= a \cos \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right) + a \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right).\end{aligned}$$

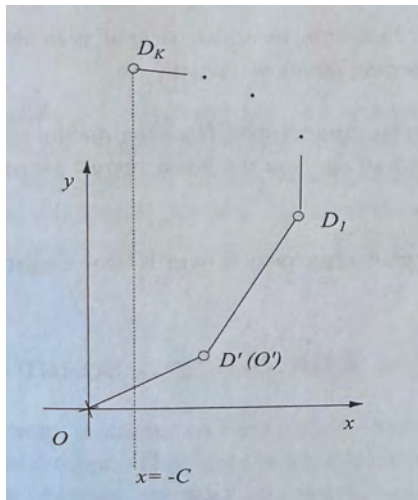
Подставим эти выражения в уравнение кривой и, последовательно применяя формулу $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$, придём к уравнению вида

$$f(x, y) = \sum_{r,s} B_{rs} \cos(r\varphi + s\theta + \chi_{rs}) + C = 0, \quad (4.1)$$

где r, s — целые, не равные нулю одновременно; C — постоянная, зависящая от A_{kl} , a , а χ_{rs} — постоянный угол. За счёт выбора этого угла можно считать коэффициенты B_{rs} , выражающиеся через A_{kl} и a , положительными.



Продолжение доказательства



Ключевая формула, реализуемая механизмом:

$$f(x, y) = \sum_{r,s} B_{rs} \cos(r\varphi + s\theta + \chi_{rs}) + C = 0$$

Механизм вычисляет $f(x, y)$ как сумму слагаемых вида $B_{rs} \cos(r\varphi + s\theta + \chi_{rs})$. С помощью накопителей и умножителей можно промоделировать необходимый угол. С помощью механизма-переносчика сможем составить цепь из рычагов, стоящий под нужными углами.

22. Вантовые конструкции

Пусть $G = (V, E)$ — конечный граф без петель и кратных рёбер, где

$$V = \{1, 2, \dots, n\}, \quad E — \text{множество рёбер.}$$

Определение 1 (конфигурация)

Конфигурацией графа G в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$ называется отображение

$$p : V \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad p = (p_1, p_2, \dots, p_n), \quad p_i \in \mathbb{R}^d.$$

Пара (G, p) называется **граф-конфигурацией** (или **каркасом**).

Здесь d — размерность объемлющего пространства (обычно $d = 2$ или $d = 3$).

Классификация связей

Множество рёбер разбивается на три непересекающихся класса:

$$E = E_0 \cup E_- \cup E_+.$$

Класс	Тип	Ограничение
E_0	рычаги (стержни)	$\ p_i - p_j\ = d_{ij}$
E_-	верёвки (ванты)	$\ p_i - p_j\ \leq d_{ij}$
E_+	распорки	$\ p_i - p_j\ \geq d_{ij}$

Определение 2

Напряжённо-связанной конструкцией называется четвёрка (G, p, E_-, E_+) , задающая геометрию и систему ограничений на рёбрах.

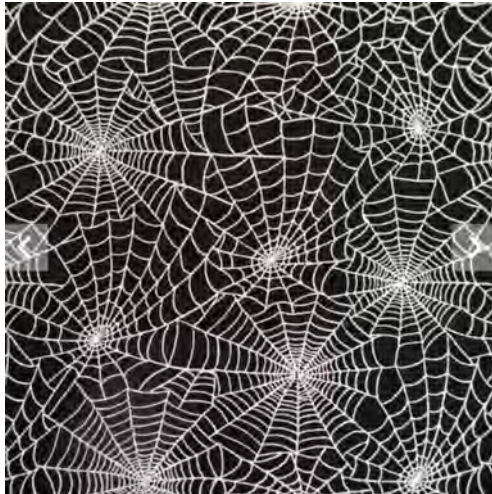
Пример: вантовый мост



Пример: велосипедное колесо



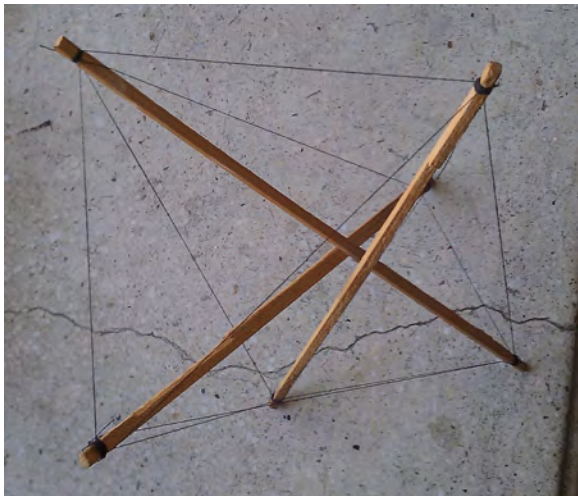
Пример: паучья сеть



Пример: tensegrity-скульптура



Вантовая конструкция (3 образующие однополосного гиперболоида) из коллекции кафедры Дифференциальной геометрии и приложений



Роберт Коннелли: основатель теории жёсткости

Роберт Коннелли — американский математик, профессор Корнеллского университета.

Ключевой вклад:

- ▶ теория жёсткости конструкций (1970–1980-е);
- ▶ понятие самонапряжения;
- ▶ критерий глобальной жёсткости через матрицу напряжений;
- ▶ теория устойчивости вантовых систем.

Его теорема — центральный результат теории напряжённо-связанных конструкций.



Определение 3

Конфигурация $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{dn}$ называется **допустимой деформацией** конструкции (G, p) , если:

$$\|q_i - q_j\| = \|p_i - p_j\|, \quad (i, j) \in E_0,$$

$$\|q_i - q_j\| \leq \|p_i - p_j\|, \quad (i, j) \in E_-,$$

$$\|q_i - q_j\| \geq \|p_i - p_j\|, \quad (i, j) \in E_+.$$

Тросы работают только на растяжение, а распорки — только на сжатие; поэтому в определении для них стоят неравенства разного знака.

Понятие глобальной жёсткости

Определение 4 (конгруэнтность)

Конфигурация q называется **конгруэнтной** p , если существует изометрия $\mathbb{R}^d$, переводящая каждую p_i в q_i .

Определение 5 (глобальная жёсткость)

Конструкция (G, p) называется **глобально жёсткой** в $\mathbb{R}^d$, если любая её допустимая деформация q конгруэнтна исходной p .

Мы хотим знать, при каких условиях конструкция не деформируется ни во что, кроме тривиальных движений.

Определение 6 (самонапряжение)

Скалярная функция $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, сопоставляющая каждому ребру (i, j) число $w_{ij} = w_{ji}$, называется **равновесным самонапряжением**, если для каждой вершины $i \in V$:

$$\sum_{j:(i,j) \in E} w_{ij} (p_i - p_j) = 0$$

Самонапряжение — необходимое условие жёсткости: если конструкция жёсткая, в ней обязательно есть нетривиальное самонапряжение. Именно через него строится матрица напряжений Ω , свойства которой появятся в теореме Коннелли.

Матрица напряжений (Stress Matrix)

Определение 7

Матрицей напряжений Ω конструкции (G, p) при самонапряжении w называется симметричная матрица размера $n \times n$:

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} -w_{ij}, & i \neq j, (i, j) \in E, \\ 0, & i \neq j, (i, j) \notin E, \\ \sum_{k:(i,k) \in E} w_{ik}, & i = j. \end{cases}$$

Интуиция: матрица Ω кодирует всю информацию о напряжениях в конструкции.

Алгебраические свойства матрицы Ω

Строки и столбцы Ω имеют нулевую сумму, то есть $\Omega \cdot 1 = 0$, где $1 = (1, \dots, 1)^T$.

Откуда следует $\dim \ker \Omega \geq d + 1$

Пусть $p^\alpha = (p_1^\alpha, \dots, p_n^\alpha)^T$ — вектор α -й координаты всех узлов, $\alpha = 1, \dots, d$. Из уравнения равновесия (Определение 6) следует:

$$(\Omega p^\alpha)_i = \sum_{j \in E} \Omega_{ij} p_j^\alpha = \sum_{j \in E} w_{ij} (p_i^\alpha - p_j^\alpha) = 0.$$

Значит, $\Omega p^\alpha = 0$ для каждого α . Итак, ядро Ω содержит:

$$1, p^1, p^2, \dots, p^d \implies \dim \ker \Omega \geq d + 1.$$

Ограничение на ранг матрицы напряжений

Из оценки $\dim \ker \Omega \geq d + 1$ получаем:

Фундаментальное ограничение

Если аффинная оболочка вершин совпадает с $\mathbb{R}^d$ (точки не лежат в одной гиперплоскости), то

$$\text{rank}(\Omega) \leq n - d - 1$$

Смысл: ядро матрицы Ω содержит как минимум:

- ▶ вектор 1 ;
- ▶ d координатных функций p^α .

Определение 8 (сверхопределённость)

Шарнирник p называется **сверхопределённым**, если его конфигурация однозначно определяется своей структурой связей не только в $\mathbb{R}^d$, но и во всех евклидовых пространствах $\mathbb{R}^{d'}$ при $d' > d$, причём допускает малые возмущения структуры без потери определённости.

Сверхопределённость — усиленная жёсткость: конструкция остаётся однозначно определённой и в исходном, и во всех пространствах большей размерности, и устойчива к малым возмущениям структуры.

Теорема (Коннелли)

Пусть аффинная оболочка узлов (обобщённого) шарнирника p совпадает с $\mathbb{R}^d$ и p допускает внутреннее напряжение ω , а $\Omega = \Omega(\omega)$ — соответствующая матрица напряжений. Если выполнены условия:

0. напряжение ω ненулевое на всех верёвках и распорках (если они имеются);
1. Ω — неотрицательно определённая матрица;
2. $\text{Rank } \Omega = m - d - 1$ (m — число узлов шарнирника);
3. совокупность векторов всех связей шарнирника p не лежит ни на какой квадрике в бесконечности,

то шарнирник p **сверхопределён**.

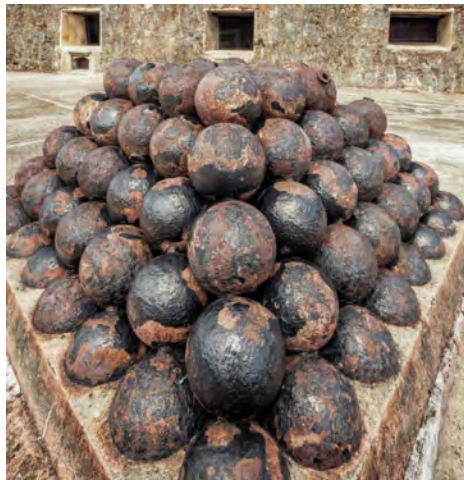
23. Максимально плотные упаковки шарами

История вопроса: ядра для пушек

Задача о плотнейшей упаковке ядер — одна из старейших задач дискретной геометрии.

В конце XVI века **сэр Уолтер Рэли** поставил перед своим помощником **Томасом Хэрриотом** практический вопрос: как наиболее эффективно укладывать **пушечные ядра** на палубе корабля, чтобы их поместилось как можно больше?

Хэрриот переписывался по этому поводу с **Иоганном Кеплером**. В 1611 году Кеплер, размышляя над этим вопросом, а также над структурой **снежинок**, сформулировал гипотезу, которая позже получила его имя.



Задача о плотнейшей упаковке шаров

Найти такое расположение одинаковых неперекрывающихся сфер в пространстве, при котором занимаемая ими доля объёма (**плотность упаковки**) максимальна.

Формально: найти максимальную плотность упаковки Δ — долю объёма пространства, занятую шарами, при условии, что шары не пересекаются.

Двумерный аналог: задача о плотнейшей упаковке **кругов** на плоскости. Решение — гексагональная решётка (плотность $\pi/(2\sqrt{3}) \approx 0,9069$), доказано Лагранжем в 1773 году.

Гипотеза Кеплера и её доказательство

Гипотеза Кеплера (1611)

Наиболее плотная упаковка одинаковых шаров в трёхмерном пространстве — это **гранецентрированная кубическая (ГЦК)** или **гексагональная плотноупакованная (ГПУ)** решётка с плотностью $\pi/(3\sqrt{2}) \approx 0,74048$.

Важный нюанс: Кеплер не доказал свою гипотезу — он лишь предположил ответ.

Что доказал Гаусс (1831): ГЦК-решётка даёт максимальную плотность среди всех решётчатых упаковок. Но это не решало задачу полностью — оставался открытым вопрос о нерешётчатых упаковках.

Полное доказательство (1998): Томас Хейлз представил доказательство для всех упаковок. Оно заняло 300 страниц и использовало 50 000 строк компьютерного кода.

Доказательство Хейлза было настолько **громоздким**, что **рецензенты не смогли его полностью проверить**. В 2014 году Хейлз и его команда завершили проект **Flyspeck** — **формальное доказательство** гипотезы Кеплера, записанное на языке строгой логики и проверенное компьютером.

Так доказательство гипотезы Кеплера стало **первым** крупным математическим результатом, который был **формально верифицирован компьютером**.

Гранецентрированная кубическая (ГЦК)

Структура. Центры шаров образуют кубическую решётку с дополнительными шарами в центрах граней.

Слои. Чередование трёх типов слоёв A , B , C :

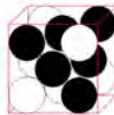
$ABCABC \dots$

Каждый слой ложится в «ямки» предыдущего.

Контактное число. 12 (6 в слое, 3 сверху, 3 снизу).

Плотность. $\pi/(3\sqrt{2}) \approx 0,74048$.

Пример. Апельсины; кристаллы меди, серебра, золота.



Гранецентрированная кубическая упаковка (ГЦК)



Гексагональная плотная упаковка (ГПУ)

Структура. Слои шаров уложены в треугольную решётку; каждый следующий слой ложится в «ямки» предыдущего.

Слои. Чередование двух типов слоёв *A*, *B*:

ABAB...

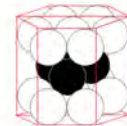
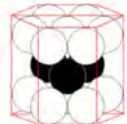
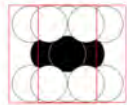
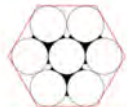
Третий слой точно повторяет первый.

Контактное число. 12 — как и в ГЦК.

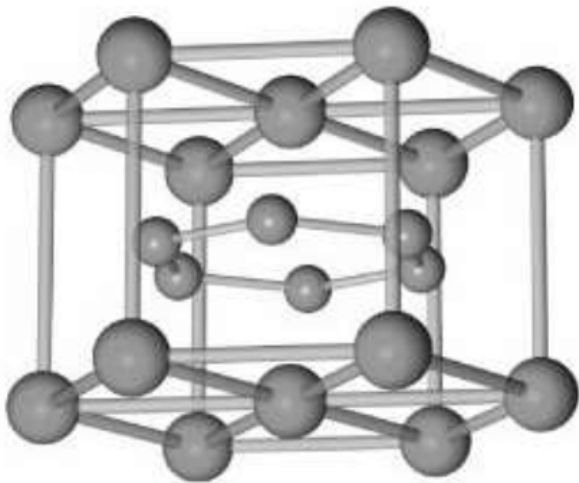
Плотность. $\pi/(3\sqrt{2}) \approx 0,74048$.

Отличие от ГЦК. Только в порядке чередования слоёв: *ABAB* вместо *ABCABC*.

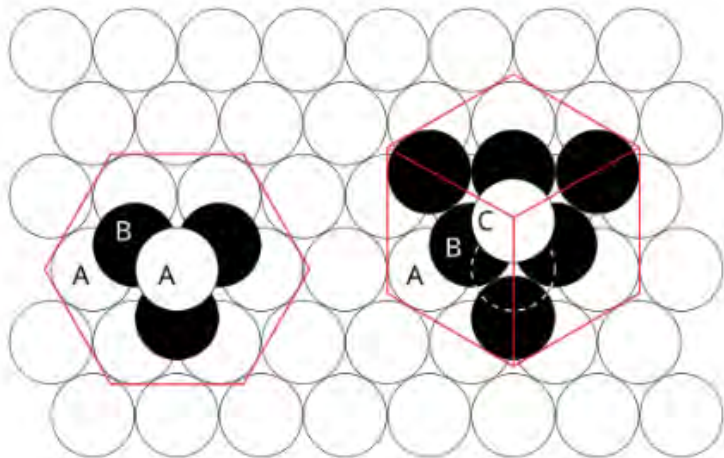
Пример. Кристаллы магния, цинка, титана.



Гексагональная плотная упаковка (ГПУ) на примере кристалла магния



Различия упаковок ГП и ГЦК



Кристаллография

- ▶ Атомы в кристаллах металлов упакованы по типу **ГЦК** (медь, серебро, золото, алюминий) или **ГПУ** (магний, цинк, титан).
- ▶ Плотность упаковки определяет **физические свойства**: прочность, пластичность, температуру плавления.
- ▶ Понимание решётки позволяет **предсказывать** поведение материала.

Теория кодирования

- ▶ Упаковка шаров эквивалентна построению **кодов**, исправляющих ошибки: шары — «кодовые слова», расстояние между центрами — метрика.
- ▶ Чем плотнее упаковка, тем **больше информации** можно передать при той же энергии сигнала.
- ▶ **Решётка Лича** в 24 измерениях используется в схемах связи космических аппаратов.

Задача оптимальной упаковки

Как разместить максимальное число объектов в заданном объёме — при условии, что объекты не пересекаются.

Где это работает:

- ▶ **Логистика.** Укладка коробок в контейнеры, паллеты, трюмы кораблей. Алгоритмы упаковки шаров помогают **минимизировать пустоты** и снизить стоимость перевозки.
- ▶ **3D-печать.** Размещение деталей на платформе принтера — чтобы за одну печать изготовить как можно больше. Здесь задача та же: **уложить детали плотно**, не допустив пересечений.

Где это работает (продолжение):

- ▶ **Планирование вычислений.** Распределение задач по процессорам — это та же задача упаковки: задачи играют роль шаров, а процессоры — роль ячеек контейнера. Нужно так разложить нагрузки, чтобы **все процессоры были загружены равномерно**, а общее время вычислений — минимально. Алгоритмы упаковки шаров напрямую применяются в **балансировке нагрузки** в суперкомпьютерах и облачных системах.
- ▶ **Биология.** Упаковка молекул в клетке, белков в вирусной оболочке — природные системы **оптимизируют** упаковку. Например, **вирусные капсиды** (белковые оболочки) собираются по принципам плотной упаковки: белки укладываются так, чтобы использовать объём оболочки **максимально эффективно**. Это позволяет вирусу **минимизировать** размер генетического материала и **экономить** ресурсы клетки-хозяина.

Упаковки в других размерностях: обзор

Задача о плотнейшей упаковке шаров имеет смысл в **любой** размерности n :

n	Оптимальная упаковка	Плотность	Кто доказал
1	Отрезки вплотную	1	Тривиально
2	Гексагональная решётка	0,9069	Лагранж (1773)
3	ГЦК / ГПУ	0,74048	Хейлз (1998/2014)
8	Решётка E_8	Известна	Вязовская (2016)
24	Решётка Лича	Известна	Вязовская и др. (2016)
$n > 3, n \neq 8, 24$	Неизвестна	—	—

Ключевой факт: задача полностью решена только для $n = 1, 2, 3, 8, 24$.



Марина Вязовская — украинский математик, специалист в области теории чисел, комбинаторики и дискретной геометрии.

В **2016** году она решила задачу о плотнейшей упаковке шаров в **8-мерном** пространстве (решётка E_8), а затем — совместно с коллегами — в **24-мерном** пространстве (решётка Лича).

В **2022** году Марина Вязовская была удостоена **Филдсовской премии** за доказательство оптимальности решёток E_8 и Лича.

Её доказательство для 8-мерного случая заняло всего 23 страницы — «ошеломляюще простое» по сравнению с 300-страничным доказательством Хейлза.

Упаковка в 8 измерениях: решётка E_8

Решётка E_8 — исключительно симметричная упаковка в **8-мерном** пространстве.

Свойства:

- ▶ центры шаров лежат в точках, все координаты которых — либо **целые числа**, либо **целые числа $+ 1/2$** ;
- ▶ каждый шар касается **240** других шаров (контактное число $k(8) = 240$).

Кто решил: **Марина Вязовская** в **2016** году доказала, что решётка E_8 даёт **плотнейшую** упаковку в 8-мерном пространстве.

Почему 8 измерений особенны: E_8 — одна из немногих решёток, обладающих **исключительной симметрией** (группа автоморфизмов огромна). Такие решётки редки, и именно они дают оптимальные упаковки в своих размерностях.

Упаковка в 24 измерениях: решётка Лича

Решётка Лича — исключительно симметричная упаковка в **24-мерном** пространстве.

Свойства:

- ▶ каждый шар касается **196 560** других шаров;
- ▶ обладает огромной группой симметрии (порядок группы — порядка 8×10^{18}).

Кто решил: Марина Вязовская вместе с Генри Коном, Абхинавом Кумаром, Стефаном Миллером и Данило Радченко в 2016 году (менее чем через неделю после решения 8-мерного случая) доказали, что решётка Лича даёт **плотнейшую упаковку** в 24-мерном пространстве.

Почему 24 измерения особенны: решётка Лича — **уникальный математический объект**, связанный с **модулярными формами**, теорией групп и даже теорией струн.

Чем 8 и 24 отличаются от других размерностей

Особенность $n = 8$ и $n = 24$:

- 1 **Существование исключительно симметричных решёток** (E_8 и Лича) с огромными группами автоморфизмов.
- 2 **Связь с модулярными формами** — Вязовская использовала квазимодулярные формы для построения «магических функций», необходимых для доказательства.
- 3 **Метод Кона–Элкиса** — в 2003 году они предложили использовать линейное программирование для решения задачи, но для завершения доказательства нужна была «магическая функция», которую построила Вязовская.

Почему не работает для других n : для большинства размерностей нет столь симметричных решёток, а методы, работающие для $n = 8, 24$, не обобщаются на произвольные n .

Асимптотика при $n \rightarrow \infty$: постановка

Вопрос. Что происходит с максимальной плотностью упаковки $\Delta(n)$, когда размерность n неограниченно растёт?

Точное значение $\Delta(n)$ известно лишь для

$$n = 1, 2, 3, 8, 24.$$

Для остальных размерностей точный ответ **неизвестен** — но можно оценить асимптотику.

Нижняя граница (Минковский, 1905)

$$\Delta(n) \geq 2^{-n}$$

Идея. Из теоремы Минковского о выпуклых телах: в каждой ячейке решётки можно гарантированно разместить шар. Это даёт **оценку снизу** на плотность.

Асимптотика при $n \rightarrow \infty$: верхняя граница

Оценка Роджерса (1958)

$$\Delta(n) \leq \frac{n \ln n}{2^{n/2}}$$

Первая экспоненциально убывающая верхняя граница.

Улучшение Кабатянского–Левинштейна (1978)

$$\Delta(n) \leq 2^{-0,599 n}$$

Показатель 0,599 — существенно лучше, чем $1/2$ у Роджерса.

Асимптотика при $n \rightarrow \infty$: вывод

Итоговая оценка:

$$2^{-n} \lesssim \Delta(n) \lesssim 2^{-0,599 n}$$

Что это значит. Плотность упаковки экспоненциально убывает с ростом размерности:

n	$\Delta(n)$
2	$\approx 0,9069$
3	$\approx 0,7405$
24	$\approx 0,0019$
$n \rightarrow \infty \rightarrow 0$ экспоненциально	

Почему так. С ростом n объём шара относительно объёма куба резко падает — шары становятся «тоньше», и пустоты неизбежно занимают почти всё пространство.

Олег Мусин: контактное число в $\mathbb{R}^4$

Олег Р. Мусин — математик, специалист по дискретной геометрии.

Задача. Контактное число $k(n)$ — максимальное число одинаковых шаров, которые могут касаться одного центрального шара в $\mathbb{R}^n$.

Результат (2008, *Annals of Mathematics*)

Мусин доказал, что $k(4) = 24$.

Предыстория:

- ▶ $k(2) = 6$ (гексагональная упаковка).
- ▶ $k(3) = 12$ (доказано Шютте и ван дер Варденом в 1953 г.).
- ▶ $n = 4$: конфигурация «24-ячейки» даёт $k(4) \geq 24$. Метод Дельсарта (1970-е) давал лишь $k(4) \leq 25$; разрыв не закрывался десятилетиями.

Метод. Модификация метода Дельсарта с привлечением комбинаторной информации о контактных графах (графах касаний).



Олег Мусин: проблема Таммеса

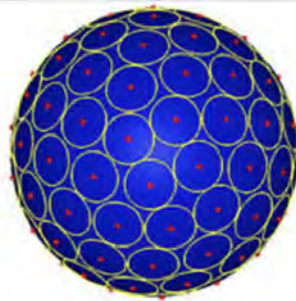
Проблема Таммеса (1930). Размещение N точек на единичной сфере S^2 так, чтобы минимальное расстояние между ними было максимальным (сферический аналог плотной упаковки).

Результат (2012–2015)

Совместно с А.С. Тарасовым найдены точные оптимальные конфигурации для $N = 13$ и $N = 14$.

Контекст. Для этих N конфигурации были гипотетически известны более 65 лет, но строгое доказательство оптимальности отсутствовало.

Метод. Компьютерный перебор и анализ избыточных контактных графов.



Итоги и открытые вопросы

Что мы знаем:

- ▶ Задача полностью решена для $n = 1, 2, 3, 8, 24$.
- ▶ Для $n = 3$ доказательство заняло 300 страниц + 50 000 строк кода.
- ▶ Для $n = 8$ — 23 страницы; для $n = 24$ — совместная работа.

Что неизвестно:

- ▶ Плотнейшая упаковка для **произвольного** n (кроме перечисленных).
- ▶ Асимптотическое поведение плотности при $n \rightarrow \infty$: известны только границы

$$2^{-n} \lesssim \Delta(n) \lesssim 2^{-0,599 n},$$

причём зазор между ними экспоненциально велик.

Практическое значение:

- ▶ теория кодирования (схемы сигналов);
- ▶ кристаллография;
- ▶ оптимизация упаковки в логистике.

24. Софокусные квадрики,
бильярдные книжки и
динамика твёрдого тела

Определение

Софокусные квадрики — это семейство поверхностей второго порядка в n -мерном евклидовом пространстве, которые имеют одни и те же фокусы.

На плоскости софокусные квадрики превращаются в **софокусные конические сечения** — эллипсы и гиперболы с одинаковыми фокусами.

Семейство софокусных кривых

Семейство софокусных кривых задаётся уравнением с переменным параметром λ :

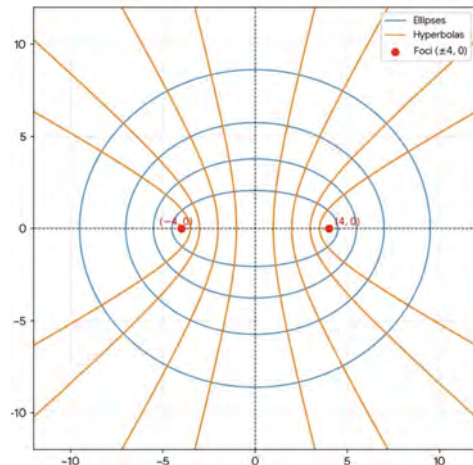
$$\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1, \quad a > b > 0.$$

В зависимости от значения параметра λ это уравнение описывает два типа кривых:

- ▶ **Эллипсы:** при $-\infty < \lambda < b^2$ оба знаменателя положительны. При $\lambda \rightarrow -\infty$ эллипсы бесконечно разрастаются. При $\lambda \rightarrow b^2$ эллипс «сплющивается» и вырождается в отрезок $[-c, c]$ на оси X (между фокусами), где $c^2 = a^2 - b^2$.
- ▶ **Гиперболы:** при $b^2 < \lambda < a^2$ первый знаменатель положителен, второй — отрицателен. При $\lambda \rightarrow b^2$ гипербола вырождается в два луча $(-\infty, -c]$ и $[c, +\infty)$ на оси X . При $\lambda \rightarrow a^2$ она вырождается в ось Y .

При $\lambda > a^2$ уравнение не имеет действительных точек.

- ▶ **Теорема Жозефа Ливилля (однозначность):** через любую точку плоскости (x_0, y_0) , не лежащую на осях координат, проходит ровно два конических сечения из софокусного семейства — один эллипс λ_1 и одна гипербола λ_2 .
- ▶ **Строгая ортогональность:** в точке пересечения этого эллипса и гиперболы их касательные строго перпендикулярны друг другу.
- ▶ **Эллиптические координаты плоскости:** пара чисел (λ_1, λ_2) образует ортогональную криволинейную систему координат на плоскости.



Одно из красивейших применений софокусных кривых на плоскости — это **математический билиард**.

Определение

Математическим билиардом называется динамическая система, описывающая движение материальной точки в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной гладкой регулярной замкнутой кривой. При движении материальной точки требуется, чтобы:

- ▶ сохранялась длина вектора скорости;
- ▶ отражение на границе области совершалось по стандартному закону: **угол падения равен углу отражения**.

Билиарды на плоскости: интегрируемость

Оказывается, билиард, ограниченный софокусными квадриками, **интегрируем**: существует два функционально независимых коммутирующих первых интеграла.

Для билиарда в эллипсе:

$$H = v_1^2 + v_2^2,$$

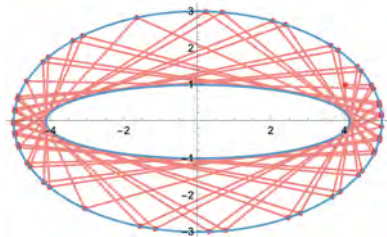
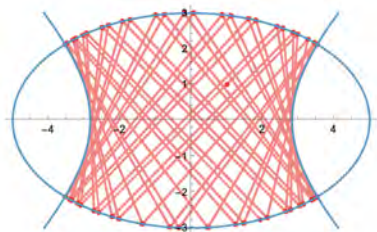
$$\Lambda(x, y, v_1, v_2) = \frac{v_1^2 b^2 + v_2^2 a^2 - (xv_2 - yv_1)^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

Геометрический смысл: траектория билиардного шара всегда касается одной и той же софокусной кривой (каустики).

Билиард в эллипсе

Рассмотрим билиардный стол, границей которого является эллипс.

- ▶ Если запустить билиардный шар так, чтобы его траектория прошла **между фокусами**, то после всех последующих отражений от бортов эллипса траектория шара будет строго касаться одной и той же софокусной **гиперболы** (она становится *каустикой*).
- ▶ Если же траектория шара вначале **не пересекает** отрезок между фокусами, то после отражений шар будет бесконечно касаться одного и того же софокусного **эллипса**, меньшего по размеру.



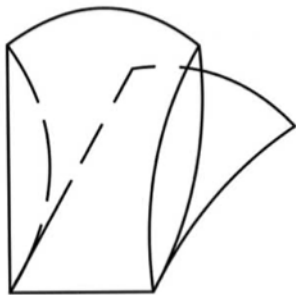
В.В Ведюшкина ввела важный класс бильярдов, называемый бильiardными книжками. Оказалось, что он играет фундаментальную роль в моделировании и классификации многих важных систем математической физики и механики.

Определение

Бильiardная книжка — это CW-комплекс, склеенный из нескольких бильiardных листов, на рёбрах которого заданы подстановки.

Движение на таком объекте определим следующим образом: точка на одном из листов, достигая одного из рёбер, продолжает своё движение на листе, номер которого определяется перестановкой, приписанной к данному ребру.

Биллиардные книжки: примеры



Примеры биллиардных книжек: склейка нескольких биллиардных листов вдоль общих рёбер с заданными перестановками.

Оказалось, что некоторые сложные динамические системы движения твёрдого тела **лиувиллево эквивалентны** движению свободной частицы по той или иной бильярдной книжке.

Рассмотрим некоторые из них подробнее:

- ▶ волчок Эйлера,
- ▶ волчок Лагранжа,
- ▶ случай Горячева–Чаплыгина–Сретенского,
- ▶ случай Ковалевской.

Определение

Две интегрируемые системы называются **лиувиллево эквивалентными**, если существует диффеоморфизм, переводящий слоение Лиувилля одной системы в слоение Лиувилля другой системы.

Смысл: замыкания интегральных траекторий (решений системы) совпадают на всюду плотном множестве.

Физическая система $\xrightarrow{\text{лиувиллева эквивалентность}}$ Биллиардная книжка

Три разных пространства. Важно различать:

- ▶ **Конфигурационное** — где движется тело (или точка).
- ▶ **Фазовое** — координаты плюс импульсы.
- ▶ **Стол бильiardа** — плоская область с отражениями.

Размерности. Для твёрдого тела с неподвижной точкой: конфигурационное — 3 (углы Эйлера), фазовое — 6. Для бильiardа на плоскости: конфигурационное — 2 (точка на столе), фазовое — 4.

Как понижается размерность фазового пространства.

- ① **Фиксация энергии.** $H = h$ выделяет 5-мерную поверхность уровня.
- ② **Фиксация второго интеграла.** $F = f$ (интеграл площадей или его аналог) выделяет **4-мерное** многообразие.
- ③ **Факторизация по симметрии.** Действие однопараметрической группы (например, вращение вокруг вертикали) отождествляет траектории; на факторе индуцируется симплектическая структура.

Сколько интегралов нужно. По теореме Лиувилля: для системы с n степенями свободы нужно n независимых коммутирующих интегралов.

Для твёрдого тела с неподвижной точкой $n = 3$ (три угла Эйлера), поэтому нужно **три** интеграла:

- 1 **Энергия H** — следствие автономности системы.
- 2 **Интеграл площадей $J_2 = \langle S, R \rangle$** — следствие симметрии относительно вращения вокруг вертикали (закон сохранения проекции момента).
- 3 **Третий интеграл** — специфический для каждого случая (интеграл Лагранжа, интеграл Ковалевской, кубический интеграл Горячева–Чаплыгина–Сретенского).

Для бильярда на плоскости $n = 2$ (две координаты на столе), нужно **два** интеграла — они **уже есть**: ограничения H и F на 4-мерное многообразие.

Описание системы

Свободное движение твёрдого тела вокруг неподвижной точки при отсутствии внешних сил ($P = 0$).

Первые интегралы:

► Энергия:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{S_1^2}{A_1} + \frac{S_2^2}{A_2} + \frac{S_3^2}{A_3} \right).$$

Здесь $S = (S_1, S_2, S_3)$ — кинетический момент в системе тела; A_1, A_2, A_3 — главные моменты инерции. H — кинетическая энергия вращения.

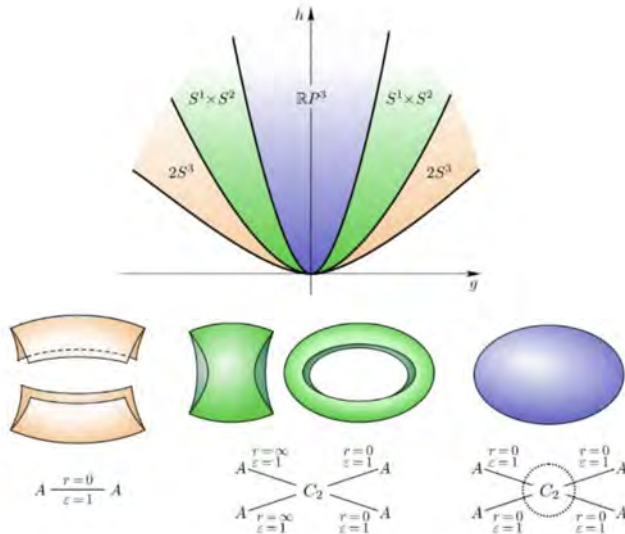
► Интеграл площадей:

$$F = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2.$$

Квадрат модуля кинетического момента.

Оси симметрии: $A_1 \neq A_2 \neq A_3$ — тело полностью асимметрично. **Центр масс:** совпадает с точкой опоры: $(0, 0, 0)$.

Волчок Эйлера: иллюстрация



Описание системы

Движение тяжёлого твёрдого тела, обладающего осевой динамической симметрией, закреплённого в точке на этой самой оси симметрии.

Первые интегралы:

► Энергия:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{S_1^2}{A_1} + \frac{S_2^2}{A_2} + \frac{S_3^2}{A_3} \right) + aR_3.$$

Здесь $S = (S_1, S_2, S_3)$ — кинетический момент в системе тела; $A = A_1 = A_2, A_3$ — моменты инерции; $R = (R_1, R_2, R_3)$ — единичная вертикаль в теле; $a = mg z_0$ — вес, умноженный на смещение центра масс. Слагаемое aR_3 — потенциальная энергия.

► Интеграл Лагранжа:

$$F = S_3.$$

Проекция кинетического момента на ось симметрии тела; сохраняется в силу осевой симметрии системы.

Оси симметрии: $A_1 = A_2 \neq A_3$. **Центр масс:** лежит на оси симметрии, смещён: $(0, 0, z_0)$, $z_0 \neq 0$.



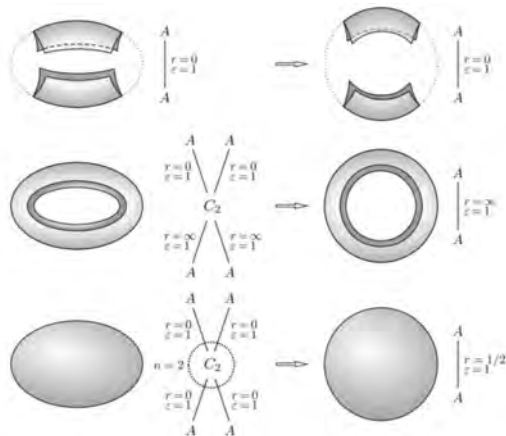


Рис. 14. Преобразование силового биллиарда, моделирующего случай Эйлера, при котором семейство софокусных эллипсов и гипербол переходит в семейство прямых и концентрических окружностей. Рядом с каждым биллиардом изображен соответствующий инвариант Фоменко-Ципманга. Полученные слоения дуэливилово эквивалентны слоениям изоэнергетических поверхностей случая Лагранжа

Случай Горячева–Чаплыгина–Сретенского: описание

Описание системы

Интегрируемый случай движения **гиростата** — тяжёлого твёрдого тела с гироскопическим моментом λ вдоль оси динамической симметрии. Система интегрируема **условно**: на нулевом уровне постоянной площадей

$$J_2 = S_1 R_1 + S_2 R_2 + S_3 R_3 = 0.$$

При $\lambda = 0$ переходит в классический случай Горячева–Чаплыгина.

Первые интегралы:

► Энергия (гамильтониан гиростата):

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{S_1^2}{A} + \frac{S_2^2}{A} + \frac{S_3^2}{A/4} \right) - \frac{4\lambda}{A} S_3 + a_1 R_1 + a_2 R_2.$$

Здесь $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = A/4$; a_1, a_2 — параметры положения центра масс. Слагаемое $-\frac{4\lambda}{A} S_3$ отвечает за гироскопический момент.

► Интеграл Сретенского:

$$F = (S_3 + \lambda) (S_1^2 + S_2^2) - \frac{A}{4} R_3 (a_1 S_1 + a_2 S_2).$$

Кубическая функция по S_i ; существует **только** при $J_2 = 0$. При $\lambda = 0$ совпадает с интегралом Горячева–Чаплыгина.

Оси симметрии: $A_1 = A_2 = 4A_3$.

Центр масс: $(x_0, 0, 0)$, $x_0 \neq 0$.

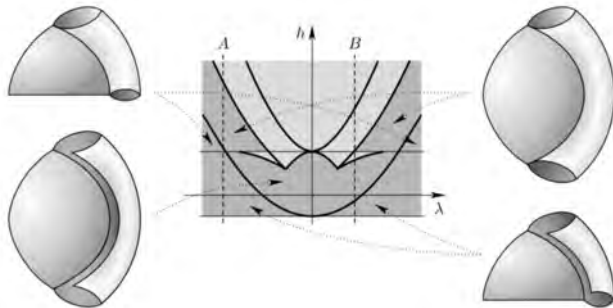
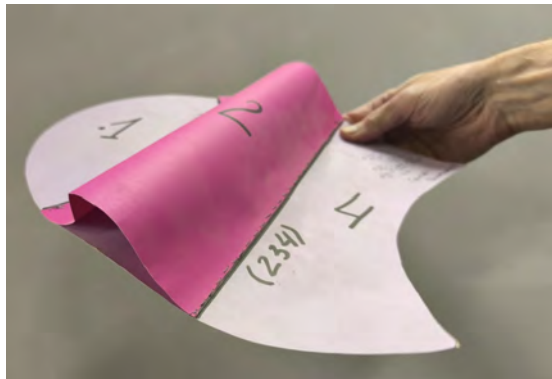
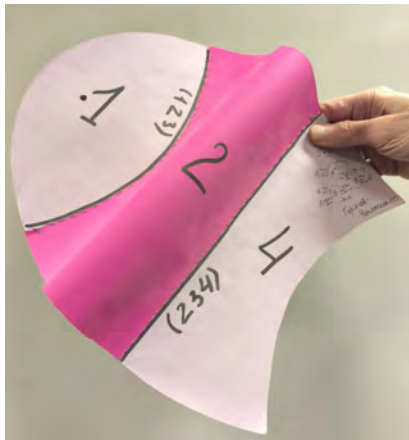


Рис. 16. Бифуркационная диаграмма случая Горячева–Чаплыгина–Сретенского. Более темным изображены типы поверхностей постоянной энергии слоения Лиувилля, на которых система может быть промоделирована биллиардами. Через A и B обозначены два симплектических листа, которые соответствуют прямым $\lambda = \text{const}$, изображенным на рисунке



Описание системы

Движение тяжёлого твёрдого тела со специальным распределением масс, найденное С. В. Ковалевской при помощи анализа полюсов решений в комплексной плоскости времени.

Первые интегралы:

► Энергия:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{S_1^2}{A} + \frac{S_2^2}{A} + \frac{S_3^2}{A/2} \right) + a_1 R_1 + a_2 R_2.$$

Здесь $A_1 = A_2 = A$, $A_3 = A/2$; a_1, a_2 — параметры положения центра масс.

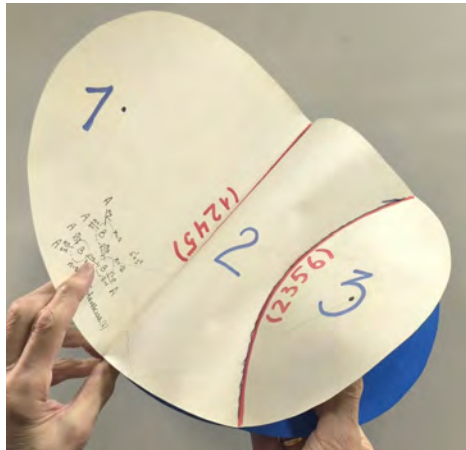
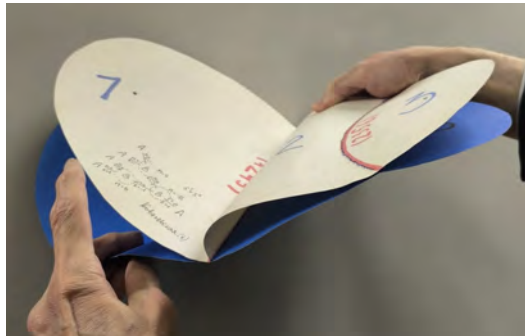
► Интеграл Ковалевской:

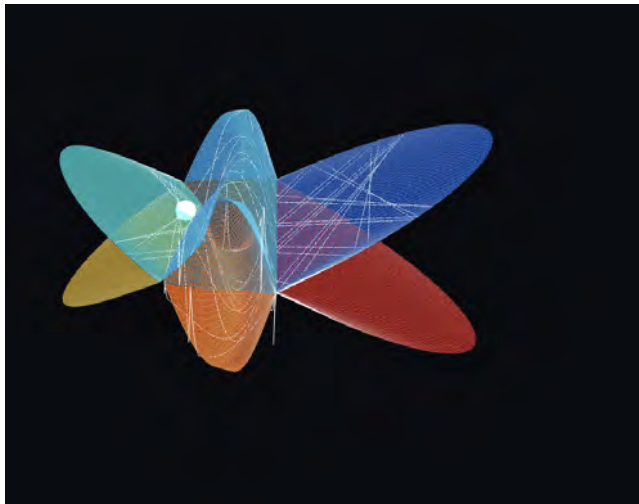
$$F = \left(\frac{S_1^2 - S_2^2}{2A} + a_2 R_2 - a_1 R_1 \right)^2 + \left(\frac{S_1 S_2}{A} - a_1 R_2 - a_2 R_1 \right)^2.$$

Однородная функция четвёртой степени по S_i и R_i .

Оси симметрии: $A_1 = A_2 = 2A_3$. Центр масс: $(x_0, 0, 0)$, $x_0 \neq 0$.

Случай Ковалевской: реализация





Случай	Моменты инерции	Центр масс	Степень интеграла
Эйлер	$A_1 \neq A_2 \neq A_3$	$(0, 0, 0)$	2
Лагранж	$A_1 = A_2 \neq A_3$	$(0, 0, z_0)$	1
Горячев–Чаплыгин–Сретенский	$A_1 = A_2 = 4A_3$	$(x_0, 0, 0)$	3
Ковалевская	$A_1 = A_2 = 2A_3$	$(x_0, 0, 0)$	4

Ключевое различие: случаи отличаются **геометрией масс** (отношениями моментов инерции) и **положением центра масс**. Это приводит к разным **степеням** дополнительного первого интеграла и, как следствие, к разной **топологии** слоения Лиувилля.

- ① Ковалёв М.Д. *Геометрические вопросы кинематики и статики*: учебник. — М.: URSS.
- ② Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 1: Геометрия, топология, классификация*. — Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. — 444 с.
- ③ Болсинов А.В., Фоменко А.Т. *Интегрируемые гамильтоновы системы. Т. 2: Геометрия, топология, классификация*. — Ижевск: Изд. дом «Удмуртский университет», 1999. — 446 с.
- ④ Ведюшкина В.В., Фоменко А.Т. *Биллиарды и интегрируемые системы // Успехи математических наук*. — 2023. — Т. 78, № 5. — С. 93–176.
- ⑤ O. R. Musin. *The kissing number in four dimensions // Annals of Mathematics*. — 2008. — Vol. 168, No. 1. — P. 1–32.
- ⑥ O. R. Musin, A. V. Tarasov. *The strong thirteen spheres problem // Discrete & Computational Geometry*. — 2012. — Vol. 48. — P. 128–141.

- ① Ведюшкина В.В. *Слоение Лиувилля бильярдной книжки, моделирующей случай Горячева–Чаплыгина* // Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. — 2020. — № 1. — С. 64–68.
- ② Vedyushkina V.V., Kharcheva I.S. *Billiard books model all three-dimensional bifurcations of integrable Hamiltonian systems* // Sbornik: Mathematics. — 2018. — Vol. 209, No. 12. — P. 1697–1740.
- ③ Kibkalo V.A., Fomenko A.T., Kharcheva I.S. *Realizing integrable Hamiltonian systems by means of billiard books* // Transactions of the Moscow Mathematical Society. — 2022. — Vol. 82. — P. 37–64.
- ④ C. A. Rogers. *The packing of equal spheres*. Proc. London Math. Soc., 1958.
- ⑤ G. A. Kabatiansky, V. I. Levenshtein. *Bounds for packings on a sphere and in space*. Problems of Information Transmission, 1978.
- ⑥ Wikipedia: *Sphere packing, Kepler conjecture, Leech lattice, E_8 lattice*.
https://en.wikipedia.org/wiki/Sphere_packing