



Екатерина Дмитриевна
Шадрина

16. Дом Бунга

Кто такой Бинг?



Р. Х. Бинг (1914–1986)

Американский математик, работавший преимущественно в области **геометрической топологии и теории континуумов**. Его исследования были сосредоточены почти исключительно на теории трёхмерных многообразий и геометрической топологии трёхмерного пространства. Бинг заложил основы нескольких областей топологии, включая **теорию разложений и методы сжатия**.

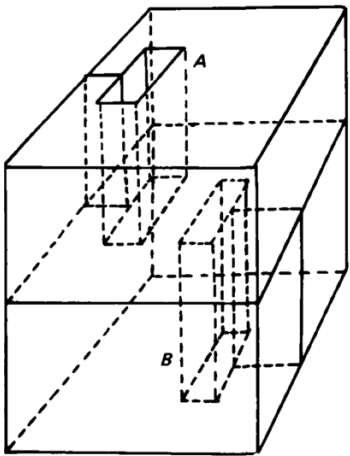
Кто такой Бинг?



Р. Х. Бинг (1914–1986)

Его работы стали источником важных теоретических результатов: например, Майкл Фридман использовал методы сжатия Бинга (в обобщённом виде) для доказательства четырёхмерной гипотезы Пуанкаре в 1982 году. Вклад Бинга в геометрическую топологию трёхмерного пространства был настолько фундаментальным и самобытным, что эту область иногда неформально называют «топологией типа Бинга».

Что из себя представляет Дом Бинга?



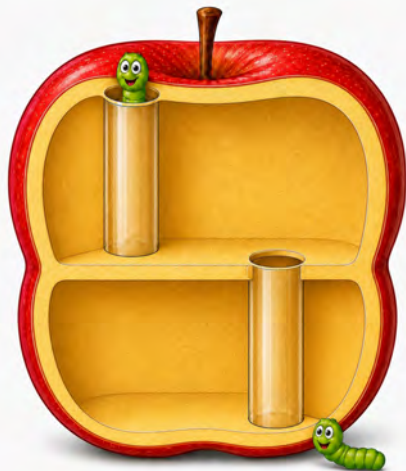
Дом Бинга — это двумерный комплекс, состоящий из стенок куба и его плоского сечения (на половине высоты) с двумя дырками. В верхней грани куба сделана дырка. От её границы идет параллелепипед до дырки на сечении. Этот параллелепипед соединен стенкой-перегородкой со стенкой куба. То же самое в нижней половине куба. Т.е. в доме расположены 2 комнаты: верхняя и нижняя. В каждой комнате находится параллелепипед с полоской-перегородкой.



B i n g , R . Н . “Some aspects of the topology of 3-manifolds related to the Poincaré conjecture”, in *Lectures on Modern Mathematics II*, T. L. Saaty (ed.), Wiley, New York, 1964, pp. 93–128.

Утверждение

Дом Бинга гомотопически эквивалентен точке.



Доказательство.

Представим Дом Бинга в виде «двухэтажного яблока». Изначально наше яблоко (=трехмерный диск) гомотопически эквивалентно точке. Пусть в это яблоко вгрызаются 2 червяка: сверху и снизу. Им запрещено встречаться, т.е. касаться друг друга.

Утверждение

Дом Бинга гомотопически эквивалентен точке.

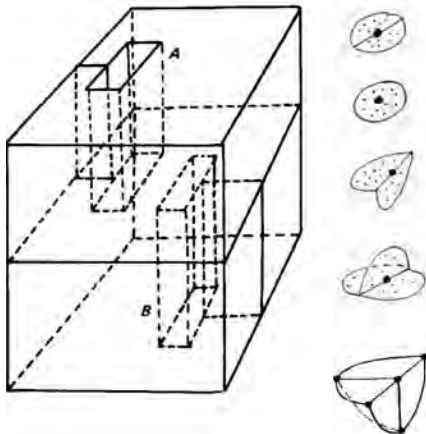


Доказательство.

Они съедают яблоко, оставляя «тонкие стенки», и получается Дом Бинга. Заметим, что на каждом этапе поедания яблока червяками «огрызок» гомотопически эквивалентен точке, а значит и получившийся Дом Бинга гомотопически эквивалентен точке.

В чем «пафос» Дома Бинга?

Дело в том, что все его точки имеют окрестности, изображенные на рисунке справа, т.е. **у такой конструкции нет «границных точек»**. А потому как бы нет «начала стягивания». И тем не менее, Дом Бинга стягивается в точку.



Определение

Компактный полиэдр P называется *простым*, если линк каждой точки $x \in P$ гомеоморфен одному из следующих одномерных полиэдров:

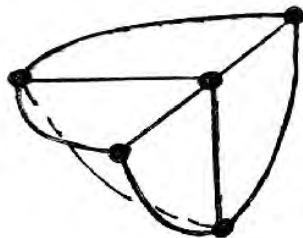
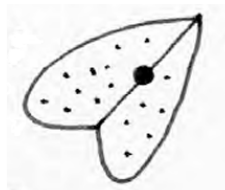
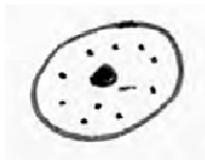
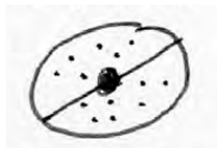
- (а) окружности (такая точка x называется *неособой* (регулярной))
- (б) окружности с диаметром (такая точка x называется *тройной точкой*)
- (с) окружности с тремя радиусами (такая точка x называется *истинной вершиной*)



Рис. 1.4. Разрешенные типы окрестностей в простом полиэдре

Точки Дома Бинга

Заметим, что в Доме Бинга встречаются *только* регулярные и тройные точки.



Разные способы изображения истинной вершины

Полиэдр, иллюстрирующий особенность типа истинная вершина, называют *бабочкой*. На самом деле это очень странная бабочка. Ее тело состоит из четырех отрезков с общим концом, и она имеет шесть крыльев. Каждое крыло затягивает два отрезка, и каждая пара отрезков затянута ровно одним крылом. Приведём несколько способов представления бабочки.



Третье изображение бабочки помещено внутрь правильного тетраэдра, чтобы подчеркнуть *симметричную природу* этой особой точки.

Разные способы изображения истинной вершины

Возьмем правильный тетраэдр и выберем произвольную точку внутри него. Рассмотрим конус с вершиной в этой точке над тетраэдром. Мы получили ещё одно представление полиэдра, содержащего истинную вершину.

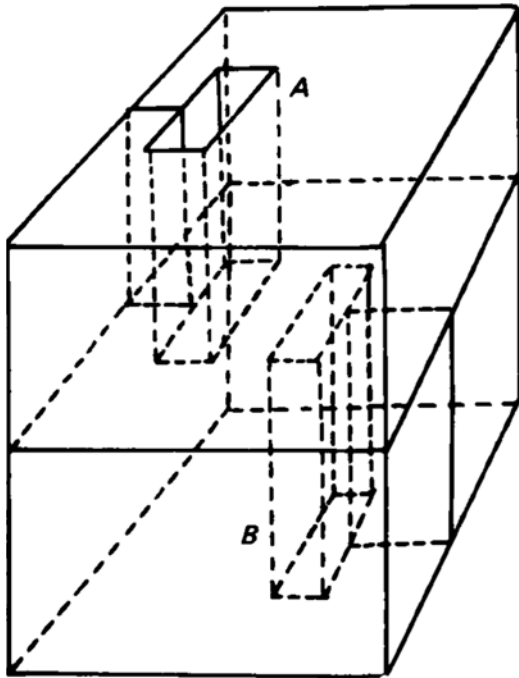


Опишем структуру простых полиэдров. Каждый такой полиэдр естественным образом стратифицирован. В этой стратификации каждый страт размерности 2 (2-компонента) — это связная компонента множества неособых точек. Страты размерности 1 — это открытые или замкнутые тройные линии, а страты размерности 0 — это истинные вершины.

Простой полиэдр P называется *специальным*, если выполнены следующие условия:

1. каждый одномерный страт полиэдра P является открытой 1-клеткой;
2. каждая 2-компонента полиэдра P является открытой 2-клеткой.

Спайн 3-многообразия называется *специальным*, если он является специальным полиэдром.



Оказывается, Дом Бинга — это пример *специального спайна* трехмерного шара!

Теорема (Матвеев С.В.)

Любое компактное 3-многообразие имеет специальный спайн.

Теорема (Матвеев С.В.)

Пусть P_1 и P_2 — специальные спайны 3-многообразий M_1 и M_2 , соответственно. Тогда $M_1 \approx M_2 \iff P_1 \xrightarrow{T^{\pm 1}} P_2$.

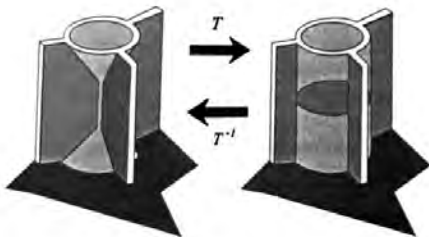
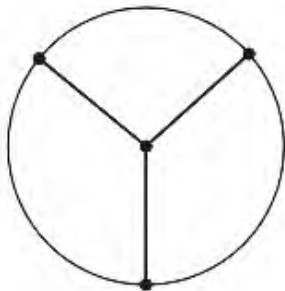


Рис. 1.11. T -преобразование

Определения

Компактный полиэдр P называется *почти простым*, если линк каждой его точки вкладывается в полный граф Γ_4 с четырьмя вершинами. Спайн P трехмерного многообразия M называется *почти простым*, если он является почти простым полиэдром.

Граф Γ_4 удобно представлять себе как окружность с тремя радиусами или как край стандартной бабочки.



Сложностью $s(P)$ почти простого полиэдра P называется число его истинных вершин.

Сложность $s(M)$ компактного 3-многообразия M равна k , если M имеет почти простой спайн с k истинными вершинами и не имеет почти простых спайнов с меньшим числом истинных вершин. Другими словами, $s(M) = \min_P s(P)$, где минимум берется по всем почти простым спайнам многообразия M .

Справедлива следующая

Теорема (Матвеев С.В.)

Для любых 3-многообразий M_1, M_2 верно равенство: $s(M_1 \# M_2) = s(M_1) + s(M_2)$, где $\#$ — связная сумма многообразий.

Замечание. Сложность является аддитивным инвариантом трехмерных многообразий.

Матвеев А. Т. Фоменко

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ
И КОМПЬЮТЕРНЫЕ
МЕТОДЫ
В ТРЕХМЕРНОЙ
ТОПОЛОГИИ



С. В. Матвеев А. Т. Фоменко

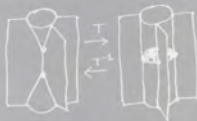
Топология многообразий малой размерности занимает особое место в современной геометрии и топологии. Основные факты и методы топологии трехмерных многообразий (включая алгоритмический подход) изложены в книге С. В. Матвеева и А. Т. Фоменко «Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии».



Матвеев, С. В., Фоменко, А. Т. *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии*, 2-е изд., испр. и доп., Наука, Москва, 1998, 320 с.

Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий

Теорема. Пусть P_1, P_2 — стандартные связки
3-многообразий M_1, M_2 . Тогда
 $M_1 \approx M_2 \Leftrightarrow P_1 \xrightarrow{T^{\pm 1}} P_2$.



Более подробно с теорией специальных спайнов и теорией сложности трехмерных многообразий можно ознакомиться в книге С. В. Матвеева «Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий».



Матвеев, С. В. Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий, МЦНМО, Москва, 2007, 453 с. (Новые математические дисциплины).

17. Биллиард и эффект Кориолиса

Итак, представьте, 19 век, Франция, Париж. Бильярд. Все взгляды прикованы к зелёному сукну стола.



«Игра в бильярд» (Луи-Леопольд Буальви, 1807)

Капитан Франсуа Менго совершает удар. Но вместо того чтобы целиться в центр шара, он чуть **наклоняет кий**, опуская его **наконечник ниже экватора** битка.



Затем он наносит сильный и короткий удар этим очень наклонным кием, мгновенно убирая кий после удара.



Шар сryвается с места, катится вперёд ровно и плавно, как и сотни раз до этого. Ничего необычного. Но затем происходит то, что современникам казалось чудом: **шар постепенно замедляется, останавливается буквально в нескольких сантиметрах от цели — и катится назад.** В ту эпоху такой эффект воспринимался как нечто противоречащее законам физики.



Секрет этого трюка был в **кожаной наклейке на конце кия**. Считается, что Франсуа Менго является изобретателем наклейки на кий. Именно **она позволила придавать шару не только поступательное движение, но и дополнительное боковое вращение**. Это стало настоящей революцией в бильярде: игроки получили принципиально новые возможности, а сама игра обрела глубину и сложность.

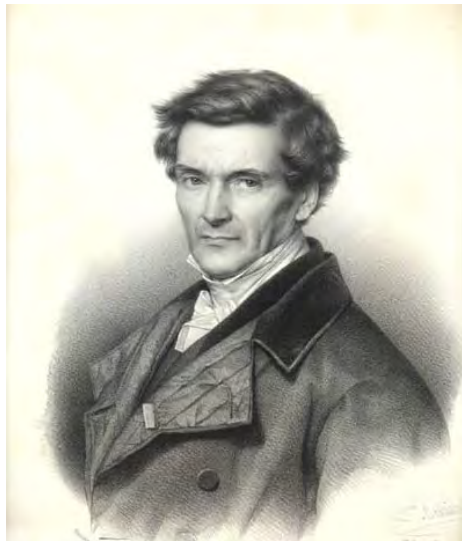




В 1827 году Менго обобщил свой опыт в книге «Noble Jeu de Billard — Coups Extraordinaires et surprenants...» («Благородная игра в бильярд — невероятные и удивительные удары...»). В ней он описал **40 необычных и даже революционных! ударов**. Книга стала первым бильярдным бестселлером, а сегодня считается самым дорогим изданием по бильярду.

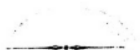
Франсуа Менго (1771–1847)

Искусство игры, продемонстрированное Франсуа Менго, произвело на Гаспара Кориолиса глубокое впечатление. Поражённый невероятными ударами, Кориолис решил подойти к этим эффектам не как игрок, а как механик-исследователь. Он поставил перед собой цель — **дать этим «оригинальным явлениям» строгое математическое обоснование.**



*Гаспар-Гюстав Кориолис
(1792–1843)*

THÉORIE MATHÉMATIQUE
DES EFFETS
DU JEU DE BILLARD,
PAR G. CORIOLIS.



PARIS,
CARILIAN-GOEURY, LIBRAIRE-ÉDITEUR
DES CORPS ROYAUX DES PONTS ET CHAUSSEES ET DES MINES,
Quai des Augustins, N° 41.
1835.

Так, в 1835 году увидела свет его знаменитая работа «Математическая теория явлений бильярдной игры», которая стала не только первым строгим научным трактатом о бильярде, но и важным вкладом в теоретическую механику.

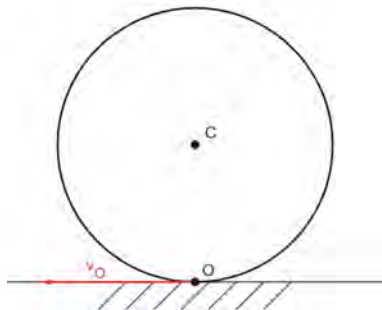
Сам Кориолис высоко ценил практическую опору своей теории: *«Я очень обязан г. Менго, во время игры которого я мог удостовериться, что формулы и получающиеся из них геометрические построения дают результаты, согласные с опытом».*

Определения

Книга начинается с изложения основ теории и построений, объясняющих движение шаров. Введем несколько определений.

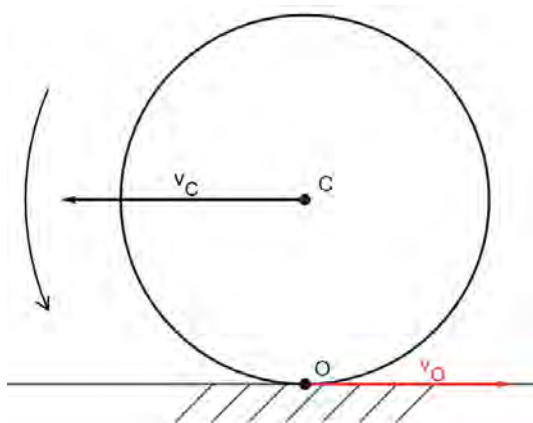
Точка опоры шара — точка, которой шар касается сукна и в которой приложена сила трения.

Вращательная скорость точки опоры — скорость точки опоры шара в его относительном вращении вокруг центра шара.



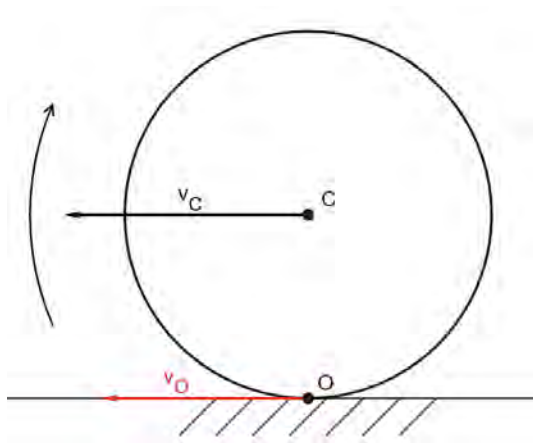
Определения

Прямое вращение — это вращение, при котором вращательная скорость опорной точки направлена против скорости центра шара.



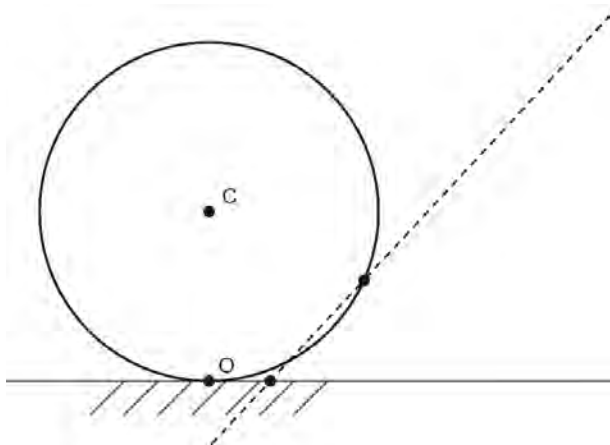
Определения

Обратное вращение — вращение, происходящее в сторону, противоположную прямому вращению, то есть когда скорость опорной точки направлена в сторону скорости центра шара.



Определения

Линия удара — прямая, проведенная через ту точку, в которой кий ударяет шар, по направлению оси кия.



Кориолис теоретически доказал возможность такого необычного движения шара. Итак, справедлива следующая

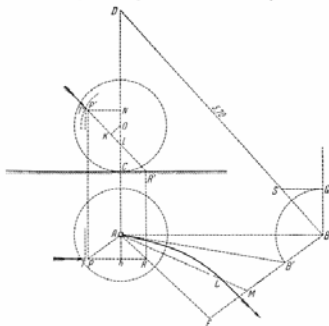
Теорема (Кориолис)

Финальное направление движения шара параллельно линии, идущей от его точки опоры к той точке, в которой линия удара пересекает плоскость бильярдного сукна.



Так как целью нашего доклада является сформировать представление о топологических чудесах, не углубляясь в технические детали, доказательство теоремы мы опустим.

Для того чтобы получить положение прямой, по которой идет шар в своем финальном состоянии, нужно знать



Фиг. 28.

величину криволинейной части траектории; именно этим мы сейчас и займемся.

следствии некоторыми виртуозами бильярдной игры. А. И. Леман — автор книги «Теория бильярдной игры» (изд. 1-е, СПб, 1885, изд. 2-е, СПб, 1906) — описывает, как в 1883 году в Варшаве некто Миньо из Парижа ставил на бильярд стакан с водой и наносил шару сильный и короткий удар очень наклонным кием, мгновенно убирая кий после удара, «и шар, не долетев на дюйм до стакана, останавливался и змий отбрасывался назад». (Прим. перек.)

В данном случае, само собой разумеется, найденные нами результаты будут зависеть от коэффициентов трения f_1 и f во время и после удара.

Нужно заметить, что при наличии упругости количество движения по вертикали, или интеграл от сил давления на бильярдную плоскость, будет более $MV_1 \sin \mu$; в случае абсолютно упругого удара оно равнялось бы $2MV_1 \sin \mu$ ¹⁾. В этом случае для количества движения, получившегося в результате трения, мы имели бы $2f_1 MV_1 \sin \mu$, но в действительности по причине небольшой упругости бильярдной плоскости следует взять только $f_1 MV_1 \sin \mu$, где f_1 мало отличается от 0,20 — значения, которое было найдено нами для удара о борт.

Вернемся к выражениям (23), которые были найдены выше для V_{1x} , V_{1y} , Rp_1 , Rq_1 , Rr_1 , отбрасывая теперь как ненужные некоторые индексы этих величин; будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} V_x &= f_1 V_1 \sin \mu \cdot \frac{h}{\rho}, \\ V_y &= V_1 \cos \mu + f_1 V_1 \sin \mu \cdot \frac{\frac{2}{5} R \cos \mu - k}{\rho \sin \mu}, \\ \frac{2}{5} R p &= V_1 \frac{k}{R} + f_1 V_1 \sin \mu \cdot \frac{\frac{2}{5} R \cos \mu - k}{\rho \sin \mu}, \\ \frac{2}{5} R q &= -V_1 \frac{h \sin \mu}{R} + f_1 V_1 \sin \mu \cdot \frac{h}{\rho}, \\ \frac{2}{5} R r &= -V_1 \frac{h \cos \mu}{R}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Расстояние ρ дается формулой

$$\rho = \sqrt{h^2 + \left(\frac{k - \frac{2}{5} R \cos \mu}{\sin \mu} \right)^2}.$$

¹⁾ Само собой разумеется, что под упругостью сукна подразумевается только свойство восстанавливать после удара вертикальную скорость, причем это свойство не рассматривается как исключительно зависящее от упругости покрытия бильярда. (Прим. автора.)

Желающие могут ознакомиться с подробным изложением в русском издании книги Кориолиса 2009 года.



Кориолис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры / Пер. с фр. – 3-е изд. – М.: УРСС, 2009. – 240 с. – (Физико-математическое наследие: физика (механика)).

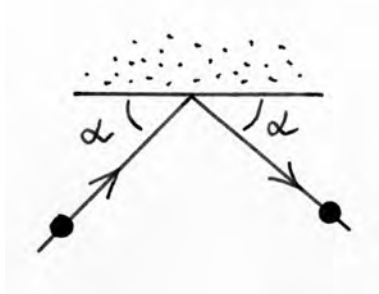
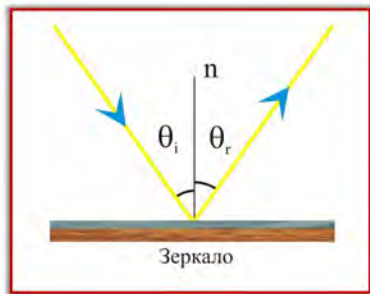
Как понять такой эффект с физической точки зрения?

Секрет такого поведения шара заключается в том, что удар наклонным кийём ниже экватора битка сообщает шару **не только поступательное движение вперёд, но и мощное обратное вращение**. Шар начинает движение вперёд, из-за обратного вращения его точка опоры также движется вперёд относительно стола. Сила трения, как следствие, направлена назад — против движения шара. Она одновременно тормозит поступательное движение и замедляет обратное вращение.

Из-за специфики удара поступательная скорость шара быстро уменьшается под действием силы трения и становится равной нулю. Шар останавливается. Однако обратное вращение к этому моменту ещё сохраняется. **Теперь сила трения, действующая на неподвижный шар, начинает толкать его в противоположном направлении**. Шар, ни о чём не ударившись, начинает катиться назад, к игроку.

Биллиард и эффект Кориолиса. Наши дни

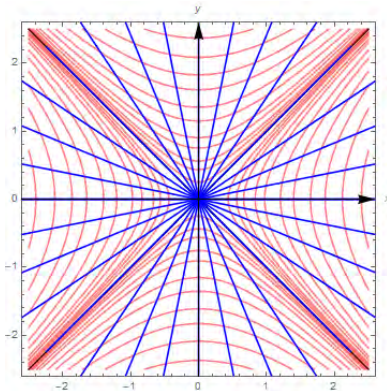
Математическим биллиардом называется динамическая система, описывающая движение материальной точки в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, ограниченной гладкой регулярной замкнутой кривой. При движении материальной точки требуется, чтобы сохранялась длина вектора скорости, а отражение на границе области совершалось по стандартному закону: угол падения равен углу отражения.



Рассмотрим математические бильярды на плоскости Минковского, ограниченные прямыми, проходящими через начало координат, и псевдоокружностями семейства

$$x^2 - y^2 = a - \lambda,$$

где $a > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.



Оказывается, такие бильярды — интегрируемы!

Теорема (Шадрина Е.Д.)

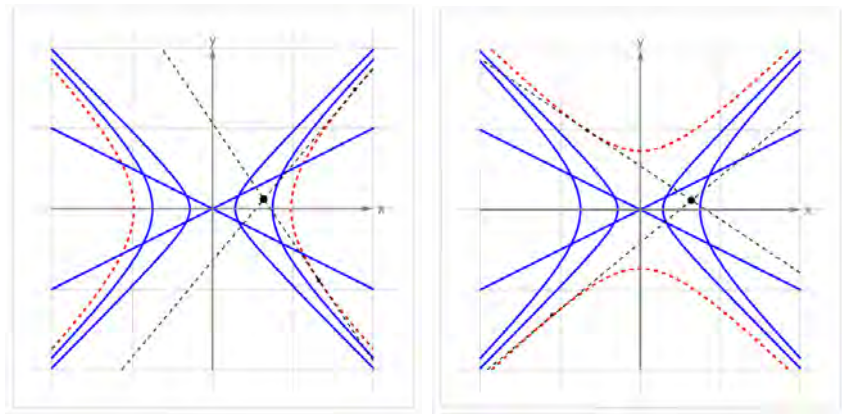
Математический бильярд на плоскости Минковского, ограниченный прямыми, проходящими через начало координат, и псевдоокружностями рассматриваемого семейства, является интегрируемым. Первые интегралы данной системы — функции

$$\Lambda = a + \frac{(v_y x - v_x y)^2}{v_x^2 - v_y^2}, \quad H = v_x^2 - v_y^2;$$

где $v = (v_x, v_y)$ — вектор скорости частицы, (x, y) — точка бильярда.

Геометрический смысл

С геометрической точки зрения функция Λ — это значение параметра каустики (псевдоокружности), которой касаются прямые, вдоль которых движется частица.



Пусть теперь при движении материальной точки на неё действует потенциал $U(x^2 - y^2)$. Оказывается, и такие бильярды — интегрируемы.

Теорема (Шадрина Е.Д.)

Математический бильярд с добавлением потенциала $U(x^2 - y^2)$ на плоскости Минковского, ограниченный прямыми, проходящими через начало координат, и псевдоокружностями рассматриваемого семейства, является интегрируемым. Первые интегралы данной системы — функции

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 - p_y^2) + U(x^2 - y^2), \quad F = (p_y x + p_x y)^2;$$

где $p = (p_x, p_y)$ — импульс частицы, (x, y) — точка бильярда.

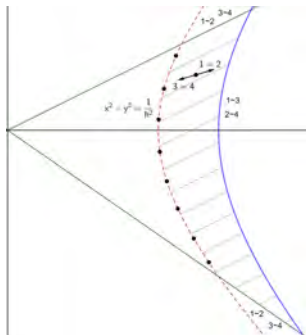
При исследовании бильярда с гравитационным потенциалом был обнаружен следующий эффект.

Утверждение (Шадрина Е.Д.)

При $h > 0$, $f = 0$ математический бильярд с добавлением потенциала $U = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$ на плоскости Минковского, ограниченный прямыми $y = kx$, $y = tx$, где $|k|, |t| < 1$, $k \neq t$, и псевдоокружностью рассматриваемого семейства с фиксированным параметром λ_1 , $\lambda_1 < a$, является интегрируемым. При этом при $h > \frac{1}{\sqrt{a - \lambda_1}}$, $f = 0$ слой, задаваемый первыми интегралами H и F , гомеоморфен цилиндру.

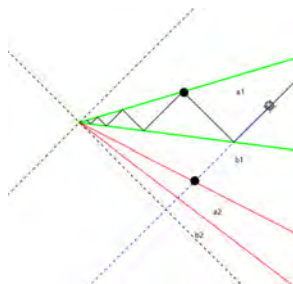
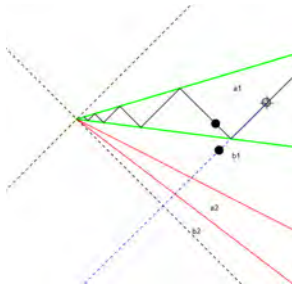
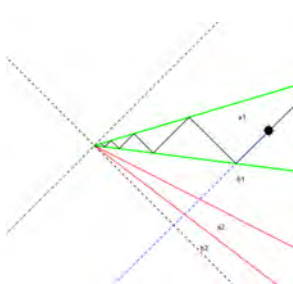
Причем тут «эффект Кориолиса»?

При $h > \frac{1}{\sqrt{a - \lambda_1}}$, $f = 0$ траектории в области возможного движения устроены следующим образом: материальная точка движется вдоль прямых, проходящих через точку начала координат, достигает псевдоокружности $x^2 - y^2 = \frac{1}{h^2}$, останавливается и (ни о что не ударившись!) начинает движение назад.



В чём пафос утверждения?

Оказывается, билиард на плоскости Минковского, ограниченный двумя прямыми, проходящими через начало координат, и **только одной** псевдоокружностью, не интегрируем. Это объясняется наличием следующего эффекта: *при некоторых значениях первых интегралов билиардная частица, отражаясь бесконечное число раз от стенок билиарда, достигает точки начала координат за конечное время с бесконечным импульсом.*



18. Переворачивающийся волчок Томсона

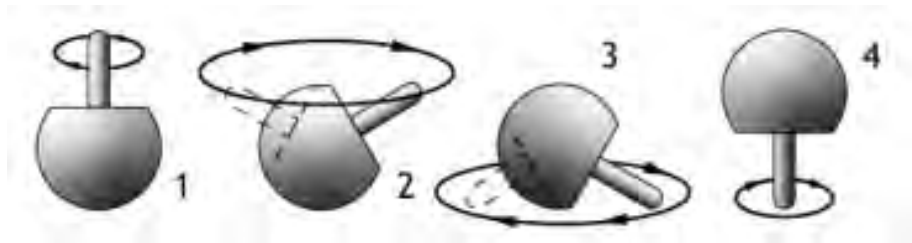
Волчок Томсона

(Китайский волчок, *Tup-ton*)



- Игрушка обладает удивительным свойством: **переворачиваться в процессе вращения.**
- Волчок Томсона представляет собой **шарик со срезанной верхушкой**. В центре среза находится ножка — ось, за которую волчок раскручивается.

Если волчок раскрутить шариком вниз, то он, вращаясь, **наклоняется**, ложится набок, касается своей ножкой поверхности стола, **а затем вскакивает** на неё и продолжает спокойно вращаться на ножке шариком кверху.

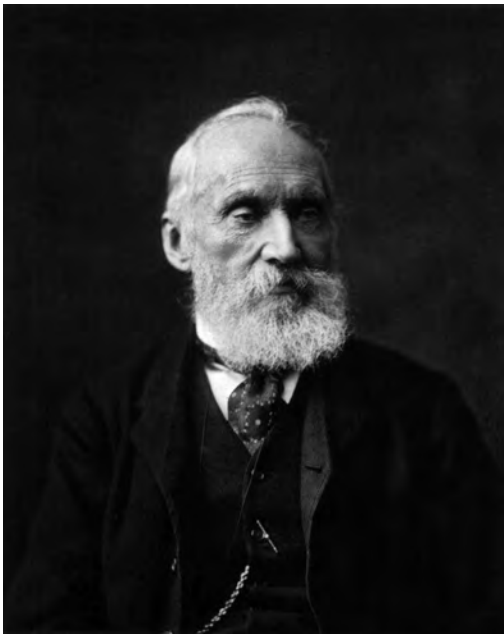


С уменьшением скорости вращения волчок опять возвращается в первоначальное положение.

История происхождения. Версии

1. Датский инженер Вернер Остберг увидел в Южной Америке, как местные жители играют с круглым фруктом на черенке, который при раскручивании переворачивался. Вдохновлённый, он вернулся домой и **в 1950 году** начал массовое производство игрушки под названием *"tippetop"*.
2. Ещё раньше, **в 1891 году**, немецкая медсестра Хелена Сперл запатентовала в Германии волчок под названием *Wendekreisel*.





Уильям Томсон (1824–1907)

В 1844 году молодой *Уильям Томсон* (впоследствии лорд Кельвин) вместе с профессором *Хью Блэкбёрном* проводил эксперименты на пляже: они раскручивали яйцевидные камни и наблюдали, как те переворачиваются, поднимая центр масс.

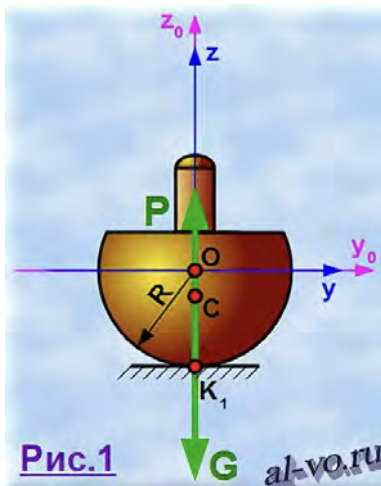
Почему волчок Томсона переворачивается?



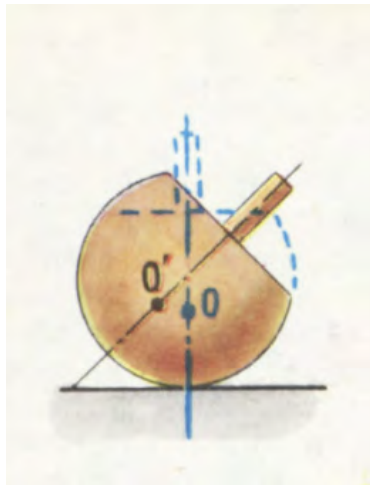
К р и в о ш л ы к о в , С. “Механика вращающегося волчка”, *Квант*, 1971, № 10, с. 21–25.

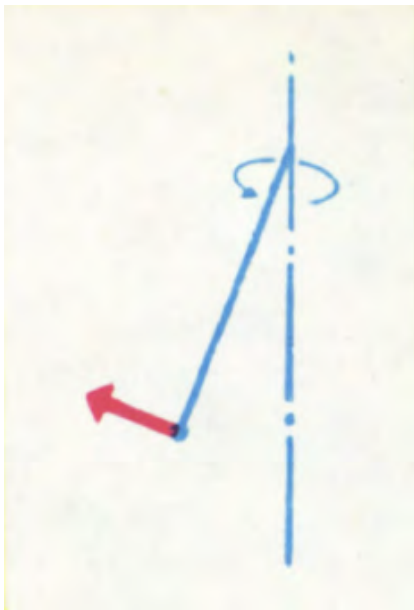
Ответ

Из строения Волчка Томсона следует, что его **центр тяжести находится ниже геометрического центра шара**, из которого он изготовлен.



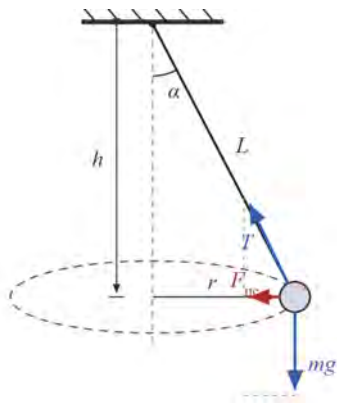
При раскручивании волчка мы неизбежно отклоняем его геометрическую ось (ось симметрии) от вертикального положения. Из-за сферической формы точка опоры при таком отклонении смещается. Ось же вращения волчка остаётся прежней — вертикальной — и не совпадает с его геометрической осью. Поскольку центр тяжести волчка лежит ниже геометрического центра шарика, **в результате такого отклонения он уже не будет лежать на оси вращения. Он займёт положение O' и будет вращаться вместе с волчком вокруг вертикальной оси.**





При вращении с большой угловой скоростью центр тяжести волчка будет подниматься точно так же, как поднимается шарик на нити, если нить раскручивать.

Почему шарик на нити будет подниматься?



Это следует из свойств *конического маятника*. Пусть материальная точка массы m подвешена на невесомой нерастяжимой нити длины L и движется по окружности радиуса r в горизонтальной плоскости, расположенной на расстоянии h ниже точки подвеса. Нить составляет с вертикалью угол α , так что $r = L\sin\alpha$, $h = L\cos\alpha$.



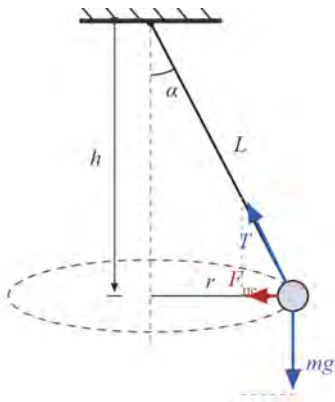
Ж у к о в с к и й , Н. Е. *Полное собрание сочинений: Лекции. Вып. 3: Теоретическая механика: Курс высшего технического училища*, М.; Л.: Государственное издательство оборонной промышленности, 1939, Т. 83, 423 с.

Почему шарик на нити будет подниматься?

На грузик действуют сила тяжести mg и натяжение нити T . Уравнения движения в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси имеют следующий вид:

$$\begin{cases} T \cos \alpha = mg, \\ T \sin \alpha = ma_c = m\omega^2 r = m\omega^2 L \sin \alpha. \end{cases}$$

Подставим $T = m\omega^2 L$ в первое уравнение и получим: $\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 L}$. Следовательно, **чем больше угловая скорость, тем больше угол наклона нити α .**



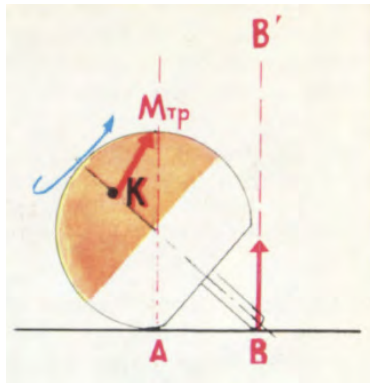
Волчок не задерживается в боковом положении, а по инерции проскакивает его, касаясь своей ножкой плоскости, на которой он вращается.



Как только это произойдёт, **точка опоры волчка перескочит из точки A в точку B** , и волчок, вращаясь около своей оси, **начнёт прецессировать вокруг оси BB'** .

Прецессией называется отклонение оси быстро вращающегося тела в направлении, перпендикулярном плоскости действия поворачивающих сил.

Под действием момента силы трения он совместит свою ось с вертикальной осью BB' и будет продолжать вращаться шариком кверху.



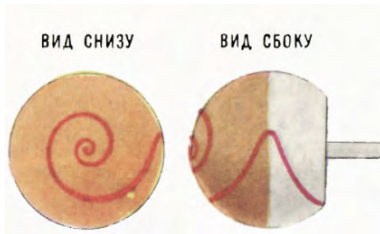
Эксперимент с пудрой

С волчком Томсона можно провести интересный опыт. Если запустить его по поверхности, покрытой тонким слоем пудры, то пудра оставит на поверхности волчка след — траекторию точки касания волчка с плоскостью. Линия на волчке закручивается спиралью, но на экваторе шарика она начинает раскручиваться в обратную сторону.



Почему это происходит?

Закон сохранения момента импульса требует, чтобы волчок вращался в одну и ту же сторону как в исходном положении, так и в перевёрнутом. Пусть мы запустили волчок по часовой стрелке (если смотреть на него сверху). Если бы волчок перевернулся, не переставая вращаться вокруг своей оси, то в перевёрнутом состоянии он вращался бы уже против часовой стрелки. Поэтому, **для того чтобы выполнялся закон сохранения момента импульса**, волчок в какой-то момент должен прекратить вращаться вокруг оси, проходящей через его ножку, а затем начать вращаться в обратную сторону.



*19. Замощения евклидова
пространства и арабские
мозаики. М.К. Эшер, действия
дискретных групп*

Уже в 1920-е Эшер экспериментировал с зеркалами и сферами — в частности, создавая автопортрет в сферическом зеркале. При этом специалисты по творчеству голландца считают, что переломным для его работы стал 1937 год, когда **Эшер перешел от пейзажей к геометрическим конструкциям.**



Особое место в его творчестве занимают следующие темы: *замощения евклидовой плоскости, действия дискретных групп симметрий, геометрия Лобачевского и модель Пуанкаре. Отдельный интерес представляют невозможные объекты, бросающие вызов евклидовой логике пространства.*



М. К. Эшер (1898–1972)

Арабские мозаики

Эшер заинтересовался мозаиками в 1936 году во время путешествия по Испании. Он провёл много времени в Альгамбре — мавританском дворце в Гранаде, зарисовывая арабские мозаики, которые называл «богатым источником вдохновения». Арабские мастера XIV века создавали **геометрические орнаменты, представляющие собой регулярные периодические замощения плоскости.**



В 1957 году в эссе о мозаиках Эшер писал:

«В математических работах регулярное разбиение плоскости рассматривается теоретически... Значит ли это, что данный вопрос является сугубо математическим? Математики открыли дверь, ведущую в другой мир, но сами войти в этот мир не решились. Их больше интересует путь, на котором стоит дверь, чем сад, лежащий за ней».



Основные определения

Замоещение (мозаика, паркет) плоскости — это разбиение плоскости $\mathbb{R}^2$ на связные замкнутые фигуры (плитки), которые покрывают её без пересечений и щелей.

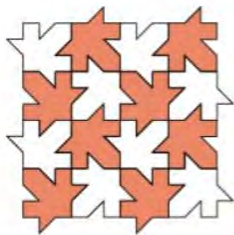


Рис. 11

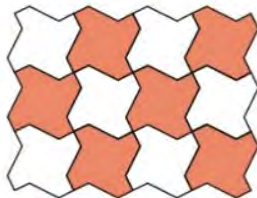


Рис. 12

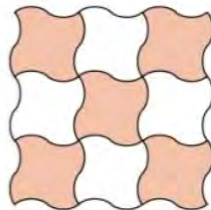
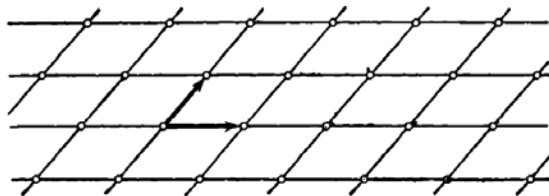


Рис. 13

Группа симметрий замощения — это множество всех движений плоскости (поворотов, отражений, трансляций), переводящих замощение в себя. **Это множество образует группу относительно композиции движений.**

Основные определения

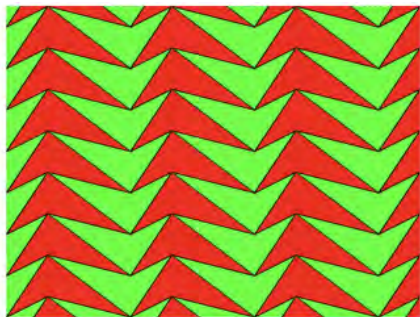
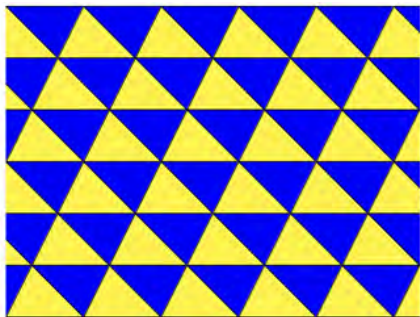
Замощение называется *периодическим*, если его группа симметрий содержит трансляции как минимум в двух неколлинеарных направлениях. Т.е. существует решётка $\Lambda = \{n\vec{a} + m\vec{b} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — линейно независимые векторы, такая что сдвиг на любой вектор из Λ переводит замощение в себя.



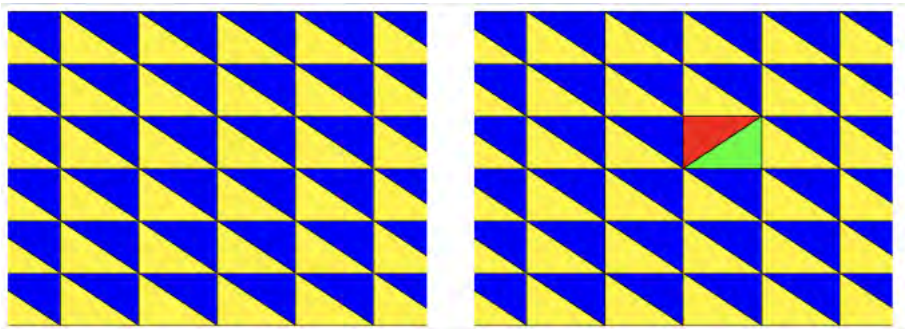
Замощение называется *непериодическим*, если его группа симметрий не содержит нетривиальных трансляций, т.е. не существует ненулевого вектора $\vec{v}$, такого что сдвиг на $\vec{v}$ переводит замощение в себя.

Фигуру, копиями которой можно замостить всю плоскость, называют *моноплиткой* (*протоплиткой*).

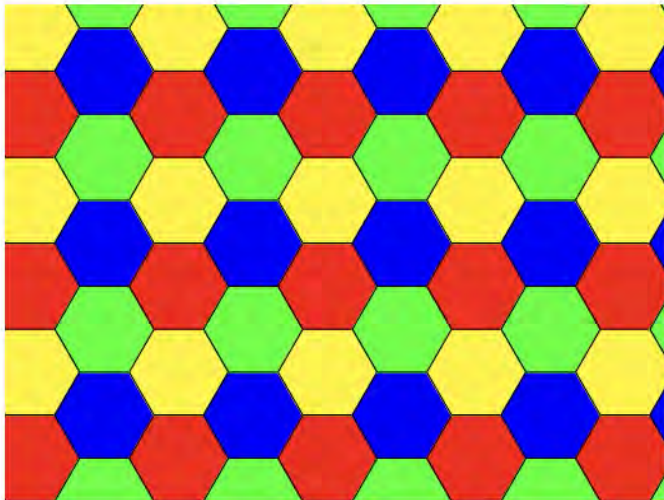
Простейшими примерами моноплиток служат *треугольники* и *четырёхугольники*: ими можно покрыть плоскость без зазоров и перекрытий. На слайде изображены примеры **периодического замощения плоскости**.



Некоторые моноплитки допускают также **непериодические замощения**. Так, если в периодическом замощении прямоугольными треугольниками перевернуть два примыкающих друг к другу по гипотенузе треугольника, то получится замощение, которое не совмещается с собой ни при каком параллельном переносе по очевидной причине: *неоднородность в виде «неправильно» расположенных треугольников встречается лишь однажды*.



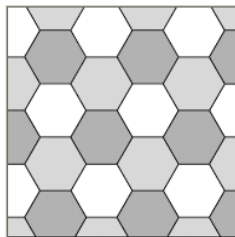
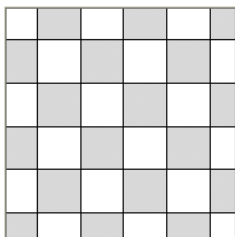
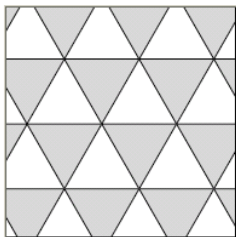
В ряде случаев периодичность неизбежна. Так, замощение плоскости правильными шестиугольниками возможно единственным образом, и оно заведомо периодически.



Под *регулярным замощением плоскости* мы будем понимать замощение правильными многоугольниками с одинаковой конфигурацией вокруг каждой вершины. Справедлива следующая

Теорема

Регулярное замощение плоскости возможно только с использованием трёх правильных многоугольников: треугольника, квадрата и шестиугольника.



Доказательство

В любой вершине *регулярного замощения* сумма углов сходящихся многоугольников должна составлять 360° . Для правильного n -угольника величина одного внутреннего угла равна

$$\alpha = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}.$$

Если в вершине сходится k таких углов, то

$$k \cdot \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n} = 360^\circ \iff k(n - 2) = 2n.$$

Выразим k и получим:

$$k = \frac{2n}{n - 2} = \frac{2(n - 2) + 4}{n - 2} = 2 + \frac{4}{n - 2}.$$

Потребуем, чтобы k было целым и $k \geq 3$. Тогда все решения: $(n = 3, k = 6)$, $(n = 4, k = 4)$ и $(n = 6, k = 3)$. Для любого другого n подобрать целое $k \geq 3$ невозможно.

17 кристаллографических групп

В 1891 году российский математик Евграф Фёдоров классифицировал все **кристаллографические группы** — *дискретные группы движений евклидова пространства*. На плоскости таких групп ровно 17; в трёхмерном пространстве — 230. Каждая из 17 плоских групп описывает определённый тип периодического орнамента и характеризуется набором симметрий: трансляциями, поворотами (порядка 2, 3, 4 или 6), отражениями и скользящими симметриями.



Евграф Фёдоров (1853–1919)



Все 17 групп встречаются в мусульманском искусстве — в частности, в декоре Альгамбры.

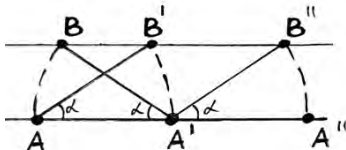
Почему нет поворотов 5-го порядка?

Пусть ось симметрии n -го порядка с углом поворота $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ выходит перпендикулярно плоскости чертежа в точке A , являющейся узлом в симметричном бесконечном ряду $A, A', A'', \dots$ с трансляцией a . Тогда, очевидно, в каждой из эквивалентных точек $A', A'', \dots$ тоже выходит такая же ось n .



Почему нет поворотов 5-го порядка?

Поворот в точке A вокруг оси n на угол α переведёт точку A' в положение B' , точку A'' в положение B'' и т.д. Такой же поворот вокруг оси n , выходящей в точке A' , переведёт точку A в положение B . Заметим, что точки $B, B', B'' \dots$ лежат на прямой, параллельной прямой AA' . В силу дискретности рассматриваемой группы движения, получим, что расстояние $BB' = Na$, где N — целое число.



Из рисунка видно, что $BB' = 2a \cos \alpha - a$, откуда

$$2a \cos \alpha - a = Na \quad \implies \quad a - 2a \cos \alpha = Na \quad \implies \quad \cos \alpha = \frac{1 - N}{2}.$$

Почему нет поворотов 5-го порядка?

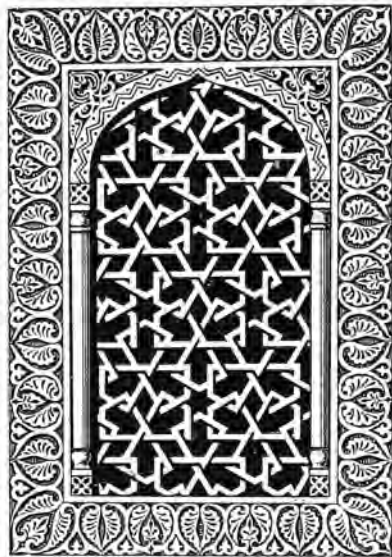
Зная, что $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, находим все возможные значения N и соответствующие им n .

N	-1	0	1	2	3
$\cos \alpha$	1	$1/2$	0	$-1/2$	-1
α	0°	60°	90°	120°	180°
Порядок оси симметрии	1	6	4	3	2

Таким образом, возможны повороты лишь порядков 1, 2, 3, 4 и 6; другие порядки невозможны.

Пример

Рассмотрим пример — окно мечети в Каире (XIV век). Оно обладает шестиугольной симметрией класса D_6 . Основной фигурой является петля в виде трилистника, различные элементы которой переплетены с исключительным мастерством. Почти не прерывающиеся лучи, пересекающие узор в трёх направлениях, получают поворотом горизонтальной прямой соответственно на 0° , 60° и 120° .





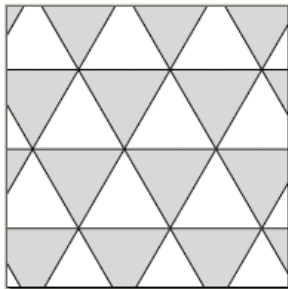
В 1924 году геометр Джордж Поля (до переезда в США — Дьёрдь Пойа) независимо пероткрыл результат Фёдорова и опубликовал работу, посвящённую *группам симметрий замощений*.

Джордж Поля (1887–1985)

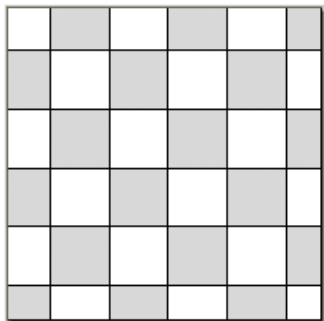
В 1936 году Эшер, заинтересовавшись мавританскими орнаментами, прочитал работу Полия. Несмотря на то, что всей математики, стоящей за ней, он, по собственному признанию, не понял, Эшер ухватил геометрическую суть: на основе всех 17 групп он создал более 40 работ.

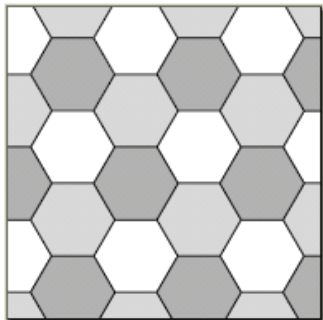


Метод Эшера заключался в следующем: *взять базовый правильный многоугольник, образующий мозаику, и применить к нему деформацию, сохраняющую групповые свойства симметрии.* Деформируя стороны многоугольника и перенося «выступы» с одной стороны на противоположную, Эшер превращал абстрактные геометрические фигуры в животных, птиц, ящериц, рыб — сохраняя при этом возможность замощения без пробелов и перекрытий.



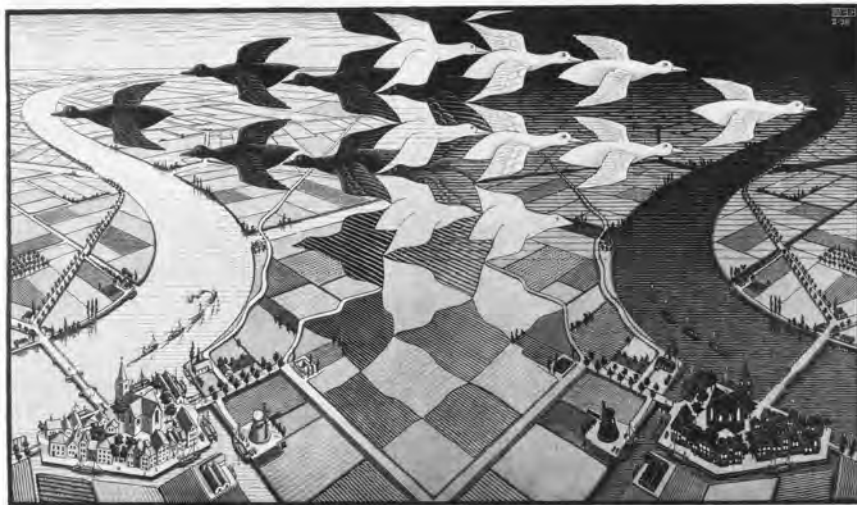
«Регулярное разбиение плоскости птицами», М. К. Эшер (справа)





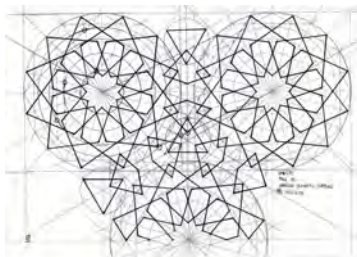
«Ящерица», М. К. Эшер (справа)

Кроме того, Эшер ввёл собственный вид замощений, который назвал «метаморфозами». Это такой вид замощений, где фигуры постепенно изменяются, взаимодействуют друг с другом, а иногда изменяют и саму плоскость.

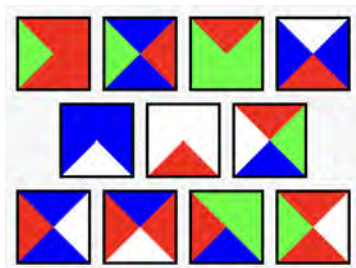


От периодических замощений к непериодическим

Естественным образом возникают два вопроса: можно ли копиями некоторой единственной моноплитки — возможно, разными способами — замостить всю плоскость, причём так, что *любое* такое замощение окажется непериодическим? Или, более общо: бывает ли так, что копиями плиток из некоторого конечного набора можно замостить плоскость *только* непериодически? Для таких наборов плиток существует специальное название — **апериодические наборы**, а соответствующие замощения плоскости называются **апериодическими замощениями**.



В начале 1960-х годов Хао Ван высказал предположение, что апериодических наборов плиток не существует. Иными словами, согласно гипотезе Вана, *если некоторый конечный набор плиток допускает замощение плоскости, то обязательно найдётся способ переложить плитки так, чтобы полученное замощение оказалось периодическим*. Однако уже в 1966 году Роберт Бергер показал, что гипотеза Вана неверна. В первоначальном доказательстве фигурировала конструкция из 20 426 различных плиток; немного позже Бергеру удалось уменьшить это число до 104. В 2015 году Э. Жанделем и М. Рао число плиток в апериодическом наборе Бергера было доведено до 11.

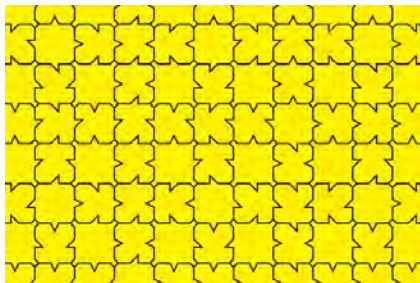
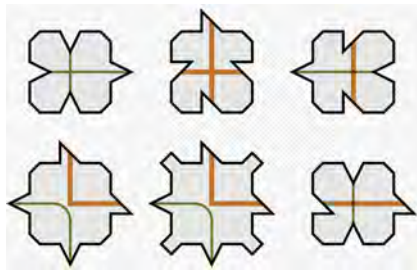




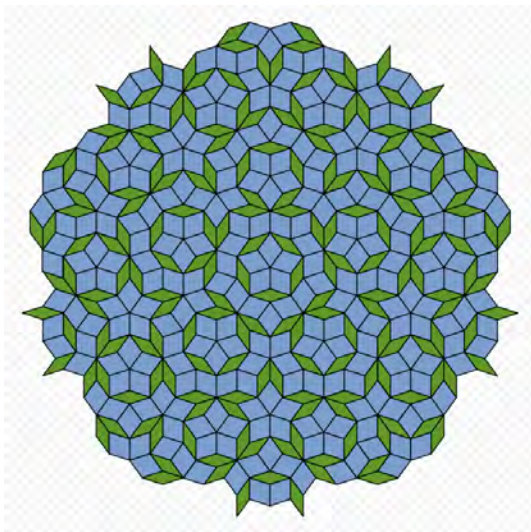
Людвиг Данцер (1927–2011)

Так возник следующий вопрос: *каково минимально возможное число различных плиток в апериодическом наборе?* И в частности — можно ли обойтись *всего одной плиткой?* Последний вопрос Людвиг Данцер в шутку окрестил *einstein problem*, что на русский можно перевести как «задача Эйнштейна». Прямой связи с знаменитым физиком, однако, нет: на немецком *ein Stein* дословно означает «один камень», что и отсылает к вопросу о существовании апериодической моноплитки.

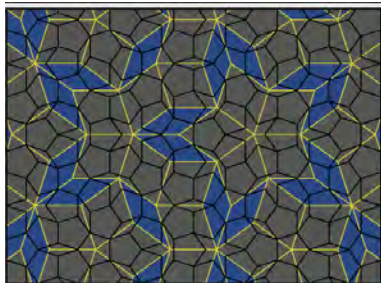
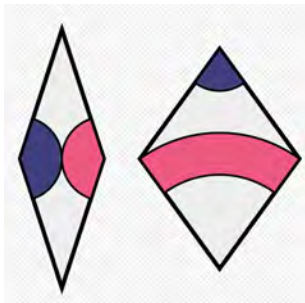
Первые промежуточные результаты на пути к одной моноплитке были получены довольно быстро. В 1971 году Рафаэль Робинсон придумал апериодический набор из 6 плиток (мозаика Робинсона).



В 1974 году Роджер Пенроуз сократил минимальное число плиток в наборе до 2 — задаваемое таким образом замощение называется *мозаика Пенроуза*.



Мозаика Пенроуза — это аperiodический набор из двух про-топлиток (в простейшей версии — двух ромбов с углами 36° и 72°), который допускает замощение плоскости, но не допускает ни одного периодического замощения. Получаемые замоще-ния являются **квазипериодическими**: они обладают поворот-ной симметрией порядка 5 (что невозможно для периодических замощений, где порядок симметрии может быть только 2, 3, 4 или 6), но не имеют нетривиальных трансляций.



Примечательно, что квазипериодические мозаики встречаются в исламских орнаментах XIII–XV вв. на территории Ирана, Узбекистана, Афганистана и Индии — за столетия до открытия Пенроуза.

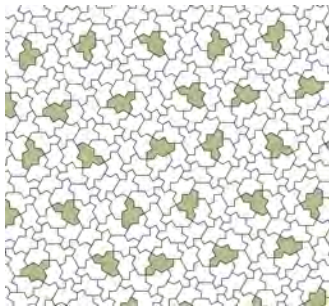




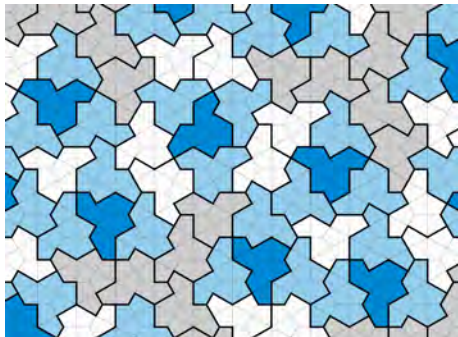
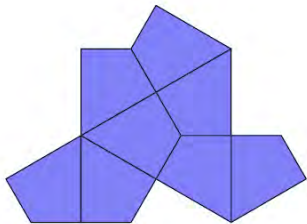
Дан Шехтман

В 1980-х годах выяснилось, что мозаика Пенроуза связана с **квазикристаллами** — сплавами, кристаллическая решётка которых обладает осью симметрии пятого порядка, невозможной для классических кристаллов. За открытие квазикристаллов Дан Шехтман был удостоен Нобелевской премии по химии за 2011 год.

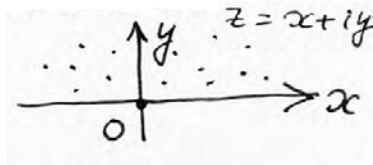
На фоне этого прорыва задача о поиске *единственной* апериодической моноплитки выглядела особенно заманчивой и в то же время недостижимой. И вот, наконец, в марте 2023 года в архиве электронных препринтов появилась статья с лаконичным названием *An aperiodic monotile*, в которой описан первый «честный» пример моноплитки, которой можно замостить плоскость без пробелов и наложений, и для которой *все* такие замощения являются непериодическими. Эту моноплитку открыл *Дэвид Смит* — британский математик-любитель, бывший специалист по печати из Йоркшира.



За характерную форму моноплитку сразу же окрестили «шляпой». Несмотря на долгую историю задачи, «шляпа» устроена изящно просто: это тринадцатиугольник, составленный из восьми одинаковых четырёхугольников, каждый из которых получается разрезанием равностороннего треугольника на три одинаковые части.



Ещё один сюжет



Рассмотрим ещё один сюжет — *за-
мощение плоскости Лобачевского в
модели Пуанкаре*. Для этого рас-
смотрим плоскость Лобачевского в
модели верхней полуплоскости.

В модели верхней полуплоскости задана *метрика Лобачевско-
го*: $ds^2 = \frac{dz d\bar{z}}{-(z - \bar{z})^2}$, или же, эквивалентно: $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$. Это
метрика отрицательной постоянной кривизны. Из курса
классической дифференциальной геометрии известно, что груп-
па изометрий верхней полуплоскости имеет следующий вид:

$$\left\{ w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, \quad ad - bc = 1 \right\} \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \mathbb{Z}_2.$$

Рассмотрим в $SL(2, \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2$ подгруппу H , порожденную матрицами $A_1, \dots, A_{2g}$, где $g \geq 2$, которые имеют следующий вид:

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{-k+1} \begin{pmatrix} \frac{\cos \beta + \sqrt{\cos 2\beta}}{\sin \beta} & 0 \\ 0 & \frac{\sin \beta}{\cos \beta + \sqrt{\cos 2\beta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}^{k-1},$$

где

$$\alpha = \frac{\pi(2g-1)}{4g}, \quad \beta = \frac{\pi}{4g}; \quad k = 1, 2, \dots, 2g.$$

Легко проверить, что для таких матриц выполняется соотношение:

$$A_1 \dots A_{2g} \cdot A_1^{-1} \dots A_{2g}^{-1} = \text{id}.$$

Оказывается, справедливо следующее

Утверждение

$H \simeq \pi_1(M_g^2)$, где M_g^2 — двумерная поверхность с g ручками; g — род поверхности.

Теорема

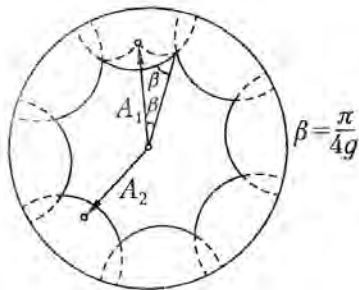
Плоскость Лобачевского $\mathbb{L}^2$ является универсальным накрытием над $M_g^2 = \mathbb{S}^2 + g$ (ручек). Слой F является фундаментальная группа $\pi_1(M_g^2)$. Она реализована как дискретная подгруппа в группе изометрий плоскости Лобачевского и действует на $\mathbb{L}^2$ свободно и эффективно. А потому $M_g^2 = \mathbb{L}^2 / \pi_1(M_g^2)$.

Какой вывод можно сделать? При накрытии мы получаем на поверхности M_g^2 риманову метрику постоянной отрицательной кривизны.

Следствие

На любой двумерной поверхности рода g , где $g \geq 2$, существует метрика постоянной отрицательной кривизны.

В модели Пуанкаре на открытом диске рассмотрим пример действия группы изометрий, порожденной матрицами $A_1, \dots, A_{2g}$ при $g = 2$. Рассмотрим восьмиугольник, ребра которого — дуги окружностей, выходящие на границу круга под углом $\pi/2$. В результате действия дискретной группы изометрий получаем замощение всего открытого диска. По мере приближения к границе круга евклидовы изображения этих восьмиугольников всё более уменьшаются. Склейка сторон 8-угольника даёт крендель M_2^2 .



Этот процесс в своеобразной художественной манере показан на известных гравюрах Эшера «Ангелы и дьяволы» и «Предел круга I».



Иногда Эшер использовал не правильные разбиения, а их более симметричные версии. Например, на гравюре «Предел круга III» дуги окружностей выходят на границу круга под углом, не равным $\pi/2$. Тот случай, когда красота оказалась важнее математической точности.



20. Мауриц Корнелис Эшер — невозможные объекты.

Под «логикой» пространства мы понимаем те *отношения между физическими объектами, которые обычны для реального мира*, и при нарушении которых возникают визуальные парадоксы, называемые оптическими иллюзиями. Большинство художников, экспериментирующие с логикой пространства, изменяют эти отношения между объектами, основываясь на своей интуиции. Рассмотрим некоторые невозможные объекты в знаменитых работах Эшера.



«Бельведер» (1958)

М. К. Эшер: «Слева, на переднем плане, лежит лист бумаги с чертежом куба. Места пересечения граней отмечены двумя кружками. Какая грань впереди, какая позади? В трехмерном мире невозможно увидеть переднюю и заднюю стороны одновременно, поэтому их невозможно изобразить. Однако есть возможность нарисовать предмет, передающий иную реальность, если смотреть на него сверху и снизу. Сидящий на скамейке юноша держит в руках именно такое **абсурдное подобие куба**. Он задумчиво разглядывает этот непостижимый предмет, оставаясь безразличным к тому, что бельведер за его спиной выстроен в том же невероятном, абсурдном стиле...



«Бельведер» (1958)

М. К. Эшер: «На полу нижней площадки, то есть внутри, стоит лестница, по которой взбираются двое. Однако, достигнув верхней площадки, они снова окажутся снаружи, под открытым небом, и снова им придется входить внутрь бельведера. Удивительно ли, что никому из присутствующих нет дела до заключенного, который просовывает голову между прутьями тюремной решетки и оплакивает свою судьбу?»

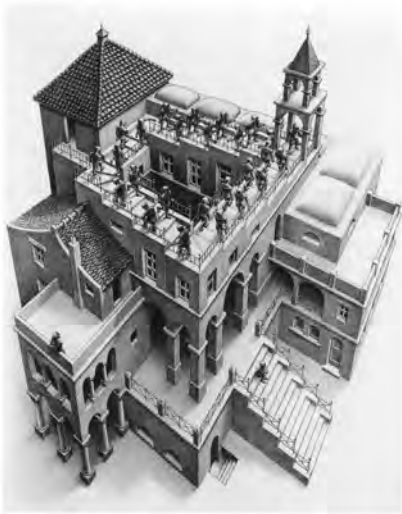


«Водопад» (1961)



Композиция основана на двух невозможных треугольниках Пенроуза, объединённых в единую структуру. По жёлобу, образованному треугольниками, течёт вода: падая вниз, она приводит в движение колесо, которое снова поднимает её наверх. Такая система (замкнутый цикл) **нарушает закон сохранения энергии** и служит наглядной иллюстрацией физически нереализуемого процесса: нарисован **вечный двигатель**. На башнях водопада размещены необычные многогранники: соединение трёх кубов (слева) и соединение трёх неправильных октаэдров (справа), символизирующие *математическую структуру в окружении невозможности*.

«Восхождение и спуск» (1960)



В основе композиции — лестница Пенроуза. Фигуры монахов движутся по замкнутому маршруту на крыше здания: одни непрерывно поднимаются, другие — спускаются. Локально каждый фрагмент лестницы выглядит корректным, но глобально такая лестница невозможна.

С математической точки зрения, композиция может быть интерпретирована как иллюстрация *гладкой непостоянной функции на окружности, не достигающей минимума и максимума*, что, естественно, НЕВОЗМОЖНО.

«Относительность» (1953)



М. К. Эшер: «Три силы тяжести направлены перпендикулярно одна другой. Три земные поверхности прорезают друг друга под прямым углом, и каждая населена человеческими существами. Обитатели двух разных миров не могут ходить, сидеть или стоять на одном и том же полу, поскольку у них разные представления о горизонтали и вертикали. *Однако они могут пользоваться одной и той же лестницей...*»

«Относительность» (1953)



М. К. Эшер: «Мы видим как наверху два человека идут рядом по лестничным ступенькам будто бы в одном направлении, — *тем не менее один движется вверх, а другой — вниз*. Контакт между ними невозможен, так как они живут в разных мирах и не подозревают о существовании друг друга».

«Рептилии» (1943)



Композиция визуализирует переход между пространствами различной размерности. Рептилия «выходит» из двумерной мозаики (плоскости листа) в трёхмерное пространство, перемещается по ряду объектов и затем возвращается в исходную мозаику.

Творчество Эшера демонстрирует, как математические концепции могут быть визуально воплощены в искусстве. *Его работы остаются уникальным мостом между математикой и искусством — мостом, по которому проходят в обоих направлениях: математики находят у Эшера наглядные иллюстрации абстрактных понятий, а художники — вдохновение в строгой геометрии.*



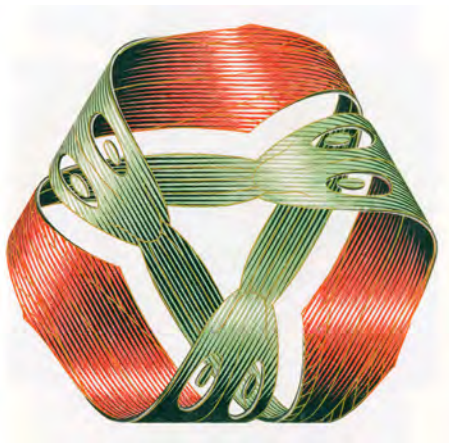
«Лента Мёбиуса 1» (Всадники), М. К. Эшер (1961)

Лента Мёбиуса в творчестве Эшера

На слайде представлена «Лента Мёбиуса II» (также известная как «Красные Муравьи») — знаменитая гравюра Эшера, созданная в 1963 году. На картине мы увидим, как огромные красные муравьи ползут по ленте Мёбиуса и никак не могут выбраться. И никогда не выберутся. Каждый из них видит своих сородичей, имеет задачу и цель, но не видит, что идет, в конечном счете, по кругу...



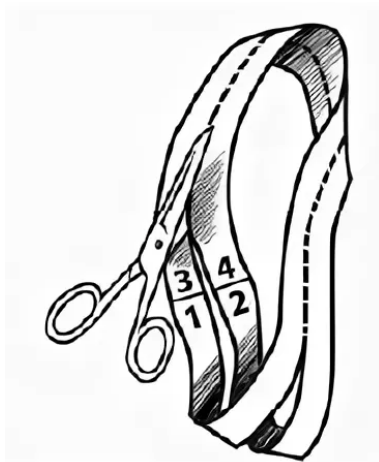
Ранее, в 1961 году Эшер написал картину «Лента Мёбиуса I», на которой изображено вложение ленты Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$, при котором лента «перекручена» на 3π .



«Лента Мёбиуса I», М. К. Эшер (1961)

Что получится, если разрезать ленту Мёбиуса по оси?

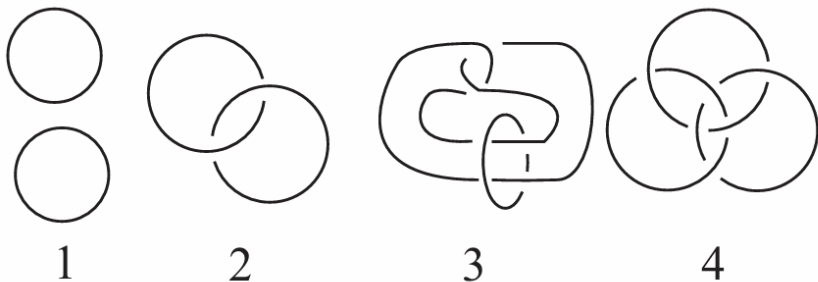
Рассмотрим стандартное вложение ленты Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$, т.е. такое вложение, при котором лента «перекручена» на π . **А что получится, если разрезать ленту Мёбиуса вдоль средней линии?**



Оказывается, получится *ориентируемая лента, перекрученная на 4π* .

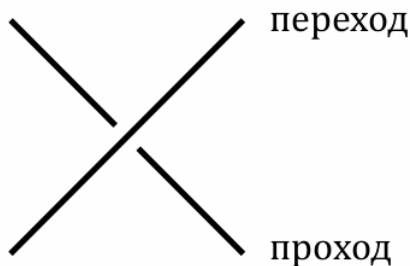


Зацеплением называется гладкое вложение конечного набора окружностей $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ в $\mathbb{R}^3$.



Определения

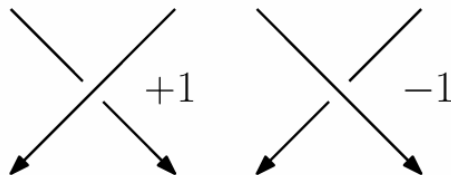
Для зацепления $L \in \mathbb{R}^3$ рассмотрим проекцию общего положения L на плоскость вдоль некоторого направления $\mathbf{v}$. Образ проекции называется *тенью*. В каждой двойной точке тени можно задать структуру *прохода-перехода* (*перекрёстка*). Тень с заданными проходами-переходами называется *диаграммой зацепления*.



Дугой будем называть часть зацепления (кривую), лежащую между перекрёстками.

Определения

Пусть $L = L_1 \sqcup \dots \sqcup L_n$ — диаграмма ориентированного зацепления с n компонентами. Каждому перекрёстку диаграммы сопоставим знак $+1$ или -1 в соответствии с рисунком.



Тогда для компонент L_i и L_j , $i \neq j$, коэффициент (индекс) зацепления $\text{lk}(L_i, L_j)$ определяется следующим образом:

$$\text{lk}(L_i, L_j) = \frac{1}{2} \sum_{c \in L_i \cap L_j} \text{sign}(c) = \sum_{c: L_i \text{ выше } L_j} \text{sign}(c).$$

Перекруткой ориентированной ленты будем называть величину, равную $2\pi \cdot |\text{lk}(L_1, L_2)|$, где L_1, L_2 — две кривые, являющиеся границами ленты.



Под *индексом зацепления двух лент* мы будем понимать индекс зацепления двух кривых — средних линий этих лент.

Теорема

1. Рассмотрим ленту Мёбиуса. Разрежем эту ленту вдоль её оси. Получится ориентируемая лента, закрученная на 4π . Обозначим её через C_1 .
2. Разрежем полученную ленту C_1 вдоль её оси. Получим две ориентируемые ленты, каждая из которых закручена снова на 4π , при этом ленты зацеплены с индексом зацепления, равным -2 .

Замечание. Продолжим описанный выше процесс, т.е. сделаем n шагов. Получим 2^{n-1} ориентируемых лент, каждая из которых закручена на 4π , и при этом каждая лента зацеплена с каждой с индексом зацепления -2 .

Доказательство

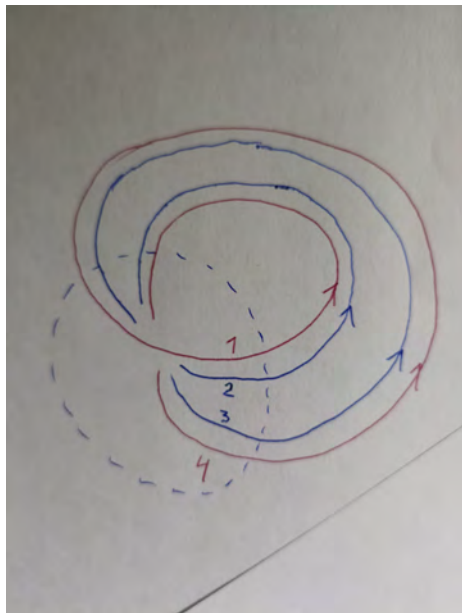
Сначала докажем, что в результате двух разрезов: разреза вдоль оси ленты Мёбиуса и разреза вдоль оси получившейся ленты — получится 2 ленты с индексом зацепления, равным -2 .

Рассмотрим ленту Мёбиуса в $\mathbb{R}^3$.

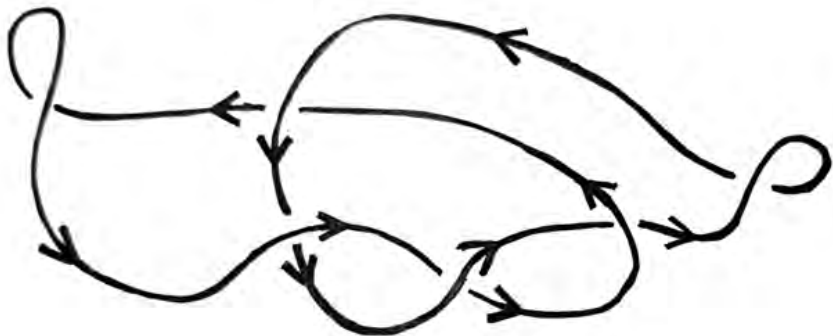


Изобразим на ней средние линии двух лент, получающихся после двух последовательных разрезов вдоль оси. Ориентируем кривые, как показано на рисунке. Занумеруем 4 дуги, проходящие вблизи точки пересечения, сверху вниз. Будем считать, что дуга 1 выше всех, под ней дуга 2, под ней дуга 3, самая нижняя — дуга 4.

Занумеруем кривые: дуги 1 и 4 являются элементами первой кривой, дуги 2 и 3 — второй.

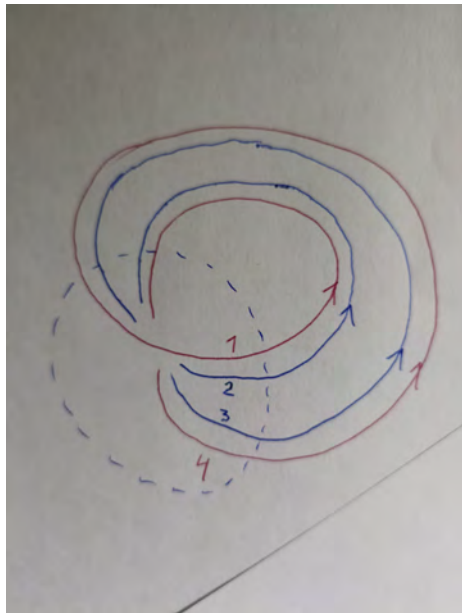


Построим проекцию этих кривых на плоскость так, чтобы у нас получилось четыре точки пересечения. Такая проекция существует, пример изображен на рисунке.



Первая дуга проходит выше второй и третьей, при этом знаки образованных этими дугами двух перекрестков равны -1 . Четвёртая дуга проходит ниже второй и третьей, а значит знаки образованных этими дугами двух перекрестков мы учитывать не будем.

Таким образом, индекс зацепления двух кривых равен -2 .



Заметим, что вторая кривая лежит на границе трубчатой окрестности первой (т.е. является её сателлитом): она проходит вдоль первой по параллели один раз, а по меридиану — столько раз, каков модуль индекса зацепления, т.е. дважды: $|\text{lk}(1, 2)| = 2$. Следовательно, перекрутка равна $2\pi \cdot 2 = 4\pi$.

