



Савва Александрович
Галкин

12. Сфера Александера

Теорема (К. Жордан, 1887)

Замкнутая плоская жорданова кривая (то есть образ окружности при непрерывном инъективном отображении на плоскость) делит $\mathbb{R}^2$ на две компоненты связности.

Теорема (А. Шёнфлис)

Существует гомеоморфизм плоскости в себя, переводящий заданную замкнутую кривую без самопересечений в окружность.

Следовательно, ограниченная компонента связности $\mathbb{R}^2$ в теореме Жордана гомеоморфна единичному диску, а неограниченная компонента гомеоморфна плоскости, из которой был вырезан диск.



Камилл Жордан (1838–1922)



Артур Шёнфлис (1853–1928)

Предыстория. Задача обобщения теорем Жордана и Шёнфлиса

Теорема (Брауэр, 1911)

$(n - 1)$ -мерное подмногообразие $\mathbb{R}^n$, гомеоморфное сфере, разбивает пространство на две связные компоненты и является их общей границей.

Гипотезу о том, что теорема Шёнфлиса обобщима для $\mathbb{R}^n$, опроверг в 1924 г. Джеймс Александер, приведя контрпример.



Лёйтзен Брауэр (1881–1966)



Джеймс Александер (1888–1971)



А.Т.Фоменко. Каталог-4. 1967 г. Ч/б, вертикал. Размер 22 х 32,5 см. Бумага, тушь, перо.

МАТЕМАТИКА: РОГАТАЯ СФЕРА (СФЕРА АЛЕКСАНДЕРА).

Из книги "Гомотопическая топология".

Изображен объект, хорошо известный в трехмерной топологии. Наглядно демонстрируется один из важных фактов в теории вложений двумерных поверхностей в трехмерное евклидово пространство. Хорошо известно, что если двумерная сфера гладко вложена в трехмерное евклидово пространство (т.е. вложена как гладкая несамопересекающаяся поверхность), то она разбивает пространство на две открытые области. Одна из них гомеоморфна трехмерному шару, а другая - дополнению к этому шару в пространстве. Обе эти области односвязны. Это означает, что любой непрерывный замкнутый путь (т.е. петля), лежащий в области, непрерывно стягивается по ней в точку.

Интуитивно очевидным кажется следующее предположение: односвязность этих двух областей остается справедливой и для топологических (т.е. непрерывных) вложений сферы в трехмерное евклидово пространство. Напомним, что такое вложение задается непрерывным отображением сферы в пространство, устанавливающим гомеоморфизм сферы с ее образом. Гомеоморфизм - это взаимно-однозначное и непрерывное в обе стороны отображение.

Однако здесь интуиция нас обманывает. Оказывается, топологические вложения сферы могут быть устроены существенно сложнее, чем гладкие вложения. Одно из таких (так называемых "диких") вложений и видит читатель. Оно не является локально плоским.

Вложение строится поэтапно и является "пределом" (в некотором точном смысле) следующих гладких (а потому - локально плоских) вложений. Нужно "зацепить пальцы рук" как показано на рисунке, причем пальцы не должны касаться друг друга. После этого из "конца" каждого пальца" вырастают два новых пальца (меньшего размера), которые также зацепляются, не касаясь друг друга. И так далее. На каждом шаге число вновь вырастающих пальцев удваивается. В результате вложение усложняется.

"Переходя к пределу", мы и получаем искомое топологическое вложение сферы. Оно не локально плоское в бесконечном числе точек.

Замечательно, что получившаяся "рогатая сфера" разбивает трехмерное пространство на две области, из которых одна гомеоморфна шару, а вторая - неодносвязна.

- На сфере вытягиваются два «пальца». Затем они сближаются, но не смыкаются.
- После этого из кончиков пальцев вытягиваются по два «пальца» меньшего размера, после чего их концы сближаются так, чтобы образовался «замочек».
- Затем для обеих пар меньших пальцев всё повторяется: появится 8 «пальцев» ещё меньшего размера.

Сферой Александера называется результат бесконечного количества таких шагов.

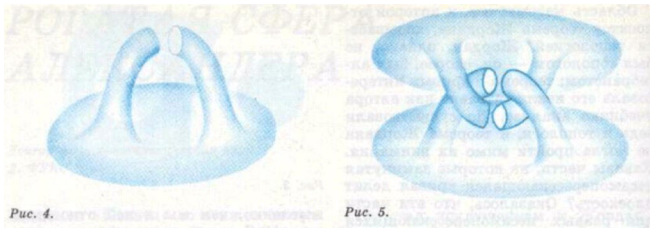
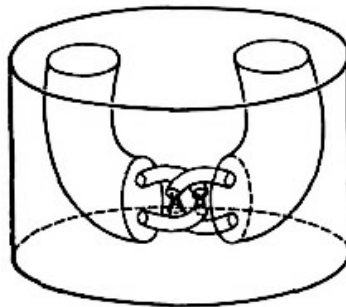
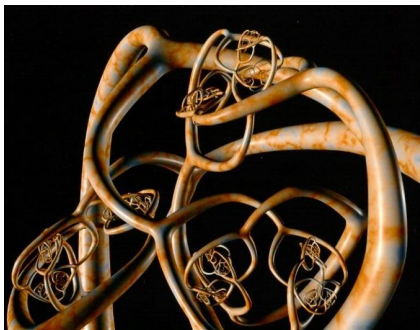


Рис.: Первые шаги построения сферы Александера



- Вкратце: почему $\bar{A}$ гомотопично шару? ⑦
Потому, что "пальцы" вырастают из пар дисков на S^2 .



так что шар
остается шаром
(гомотопичен D^3).
А потому $\bar{A}$ как
"предел" тоже
гомотопично шару.

- Вкратце: почему h — это гомотопичизм.
Т.е. если $x \neq y$ — две разные точки на сфере, то $h(x) \neq h(y)$. В самом деле, если $x \neq y$, то с некоторого момента (при построении h) эти точки окажутся в разных дисках, а потому — на разных "ручках", а потому уже никогда "не встретятся".

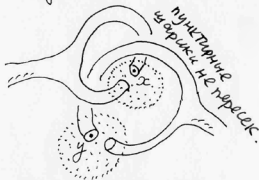


Рис.: Корректность

Внешняя компонента $\bar{B} = \mathbb{R}^3 \setminus S^3$ неодносвязна.

В самом деле, петлю, изображённую на рисунке ниже, невозможно стянуть в точку, так как она зацепится за бесконечное количество пальцев.

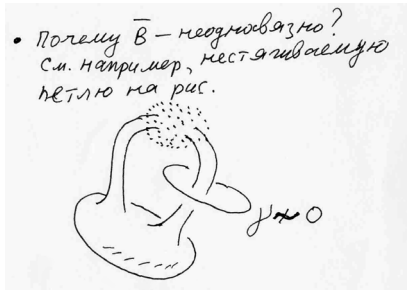


Рис.: Пример петли

Более строгое доказательство этого факта есть в заметке Франки Липперт «The Alexander horned sphere and Bing's hooked rug» (см. «The Alexander horned sphere and Bing's hooked rug» by Franca Lippert, Topological manifolds seminar, University of Glasgow)

13. Дикие узлы

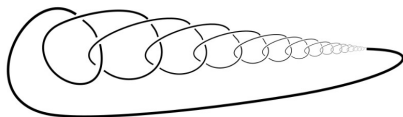


Рис.: Дикий узел

Узел (вложение S^1 в R^3) называется ручным, если существует его утолщение до полнотория $S^1 \times D^2$, то есть существует такое достаточно малое ε , что существует такое вложение $f : S^1 \times D^2 \rightarrow R^3$, что $f(t, D^2)$ — двумерный диск радиуса ε при любом t , а $f(*, \{0\})$ является изначальным узлом.

- Остальные узлы называются **дикими**.
- Дикие узлы получаются за счёт завязывания всё меньших и меньших переплетений, сходящихся к некоторой точке, которая называется **дикой точкой** узла.

Выберем по n точек на двух заданных параллельных плоскостях в $\mathbb{R}^3$.

Определения

Геометрической косой с n нитями называется набор из n попарно непересекающихся кривых такой, что:

- концы этих кривых расположены в отмеченных точках
- каждая плоскость, параллельная заданным и находящаяся между ними, пересекает геометрическую косу по ровно n точкам.

Изотопией кос называется шевеление нитей косы, сохраняющее фиксированные точки, а также не перемещающее точки нитей за пределы содержащих их плоскостей, параллельных заданным.

Косой называется класс эквивалентности геометрических кос относительно их изотопии.

Произведением двух кос с одинаковым числом нитей называется коса, состоящая из правой косы, левые концы которой соединены с правыми концами второй косы.

С этой операцией косы с фиксированным числом нитей образуют группы.

Классификация узлов с помощью кос

Существуют различные способы классификации ручных узлов: например, по теореме Александера любой ручной узел можно привести к виду замкнутой косы.

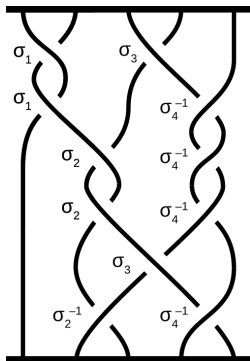


Рис.: Замкнутая коса

Классификация узлов

У узлов определены различные инварианты: многочлены Александера, Конвея, HOMFLY, инварианты Васильева (например, инвариант Концевича).

Также существует бесконечный список, перечисляющий все узлы, однако он избыточен: каждый из узлов перечислен в нём бесконечное количество раз.

Полный алгоритмический набор инвариантов узлов пока не найден, и установление изотопии двух узлов в общем случае является открытой задачей.

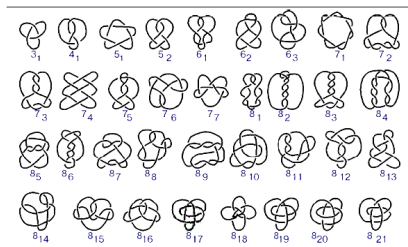


Рис.: Фрагмент списка, перечисляющего все узлы

Дикие узлы Фокса-Артина

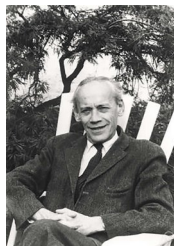


Рис.: Дуга Фокса-Артина

Диким узлом всегда является узел, содержащий **дугу Фокса-Артина** – вложение отрезка в $\mathbb{R}^3$, дополнение к которому неодносвязно.



Ральф Фокс (1913–1973)



Эмиль Артин (1898–1962)

Дуга Фокса-Артина



Рис.: Нетривиальный элемент фундаментальной группы дополнения в $\mathbb{R}^3$ к такой дуге



Рис.: Дополнение к обычному отрезку в $\mathbb{R}^3$ односвязно

Построение

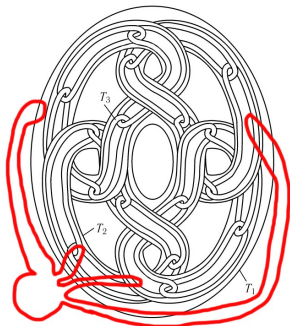
Строится узел Зуева при помощи ожерелья Антуана.

Этот узел выглядит так: сначала он проникает во внутренность большого тора, затем выпускает четыре языка, которые входят в четыре следующих тора, затем каждый язык выпускает четыре языка и т.д., стремясь приблизиться к ожерелью Антуана. В пределе получается несамопересекающаяся замкнутая кривая и множество ее диких точек есть в точности ожерелье Антуана.

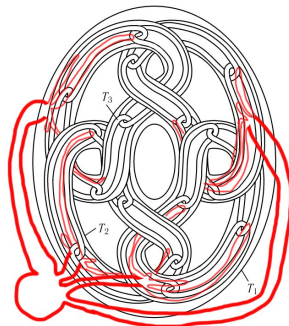
Таким образом, мы получили вложение $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ с дикими точками, образующими множество Кантора, вложенное в $\mathbb{R}^3$ так, что его дополнение неодносвязно.



См. А. Б. Сосинский, «Узлы. Хронология одной математической теории»



Первый шаг



Второй шаг

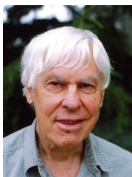


Рис.: Ожерелье Антуана есть на картине «Топологический зоопарк» А.Т.Фоменко

14. Выворачивание сфер в евклидовом пространстве

В 1957 году Стивен Смейл доказал возможность выворачивания двумерной сферы. Его дипломный консультант Рауль Ботт сначала не поверил в этот результат, объяснив это соображениями о степени отображения Гаусса (в самом деле, если сфера нечётномерна, то степень отображения Гаусса должна была бы смениться с 1 на -1, что невозможно при гомотопии, однако о чётномерных сферах это ничего не говорит).

Лишь в 1978 году Б. Морин привёл конкретный пример выворачивания наизнанку S^2 .



Стивен Смейл (1930)



Рауль Ботт (1923–2005)



Бернард Морин (1931–2018)

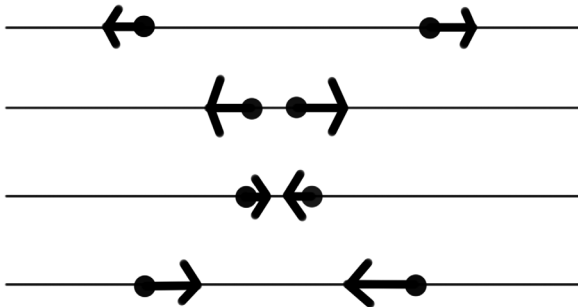


Рис.: Видно, что в классе погружений вывернуть S^0 наизнанку легко.

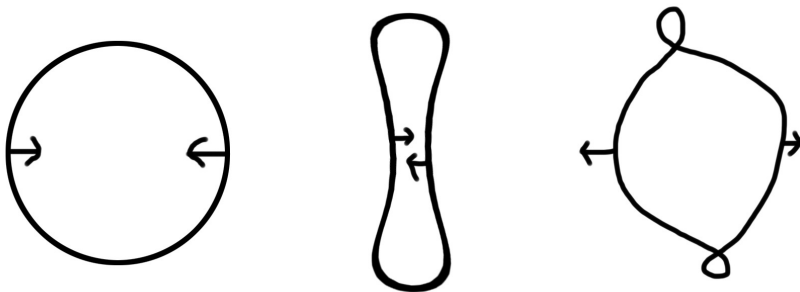
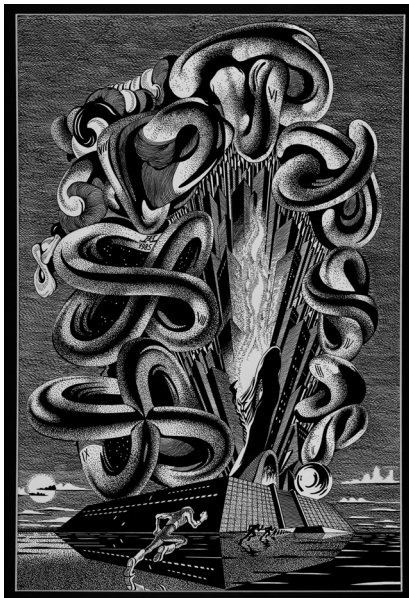


Рис.: Заметно, что с S^1 поступить аналогично не получается, поскольку появятся две петельки, дающие особенность.

Пример. Поверхность Морина

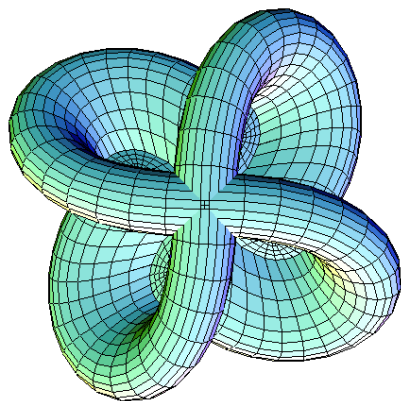


А.Т.Фоменко. Каталог-233. 1985 г. Ч/б, вертикал. Размер 34 x 51 см. Бумага, тушь, перо.

МАТЕМАТИКА: ДВУМЕРНУЮ СФЕРУ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ МОЖНО ВЫВЕРНУТЬ НАИЗНАНКУ. Интуитивно ясно, что стандартную окружность, вложенную в плоскость, нельзя "вывернуть наизнанку" посредством гладкой гомотопии в классе погружений (обязательно возникнут угловые точки, как результат стягивания бесконечно малых петель). Замечательно, что двумерную сферу можно вывернуть наизнанку в R^3 классе гладких погружений (самопересечения допускают, но изломы и потери гладкости запрещены). Наглядную деформацию построил Арнольд Шапиро. С.Смей доказал, что можно вывернуть наизнанку лишь сферу S^2 в R^3 и S^6 в R^7 ; остальные сферы (т.е. в остальных размерностях) невыворачиваемы. Изобразить процесс выворачивания S^2 в R^3 довольно сложно (известно несколько способов таких изображений, но все они описываются достаточно нетривиально). Наша работа показывает основные этапы этой деформации. Средством гладкой гомотопии (с самопересечениями) можно продеформировать двумерную сферу так, что она расположится вблизи так называемой поверхности Боя - замечательного погружения двумерной проективной плоскости RP^2 в R^3 . Это погружение изображается симметричной поверхностью. Если считать, что параметр t , описывающий выворачивание сферы, изменяется от 0 до 1, то положения сферы, занумерованные на рисунке римскими цифрами от I до IX, соответствуют изменению t от 1 до 1/2. В положении I сфера является стандартно вложенной, затем она начинает постепенно изгибаться и самопересекаться, и, наконец, в положении IX она располагается вблизи поверхности Боя так, что двукратно накрывает проективную плоскость. В этот момент сферу можно вывернуть наизнанку (используя неориентируемость проективной плоскости) и в результате внутренняя и внешняя поверхности погруженной сферы меняются местами. Затем деформация повторяется в обратном порядке: от положения IX до положения I. В результате мы возвращаемся к стандартно вложенной сфере, но теперь она вывернута наизнанку.

Пример. Поверхность Морина

Поверхность Морина. Видно, что её можно разбить на 4 конгруэнтные секции. Элегантное аналитическое описание поверхности можно найти в *Adam Bednorz, Witold Bednorz, «Analytic sphere eversion with minimum of topological events» — 2017*



Пример

Наглядная анимация о том, как может выглядеть выворачивание сферы наизнанку. Разные поверхности сферы покрашены в разные цвета.



Выворачивание 2-сферы. Поверхность Морина

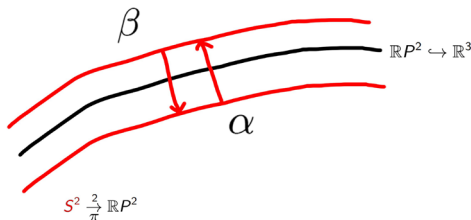


Рис.: Двухлистное накрытие сферой проективной плоскости в окрестности некоторой точки. Чёрная линия — фрагмент $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^3$, красные — S^2 в $\mathbb{R}^3$.

Пояснение: сферу S^2 удалось расположить в малой трубчатой окрестности вещественной проективной плоскости, погруженной в $\mathbb{R}^3$, так, чтобы сфера «накрывала» $\mathbb{R}P^2$ с двух сторон, что соответствует двухлистному накрытию сферой проективной плоскости. Красные листы можно поменять местами, после чего провести деформацию в обратном направлении.

На картине в качестве погружения $\mathbb{R}P^2$ в $\mathbb{R}^3$ выбрана поверхность Морина.

Поверхность Бойя

Другой пример такого погружения — поверхность Бойя (более подробно см. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б., «Курс гомотопической топологии»).



Рис.: Гипсовая модель поверхности Бойя из коллекции на кафедре Дифференциальной геометрии и приложений

Шаг 1

Пусть $n \in \{0, 2, 6\}$. Тогда S^n можно вывернуть наизнанку в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Этот факт следует из общей теоремы.

Теорема (С. Смейл, 1957)

Между множеством погружений S^k в $\mathbb{R}^n$ с точностью до регулярной гомотопии и $\pi_k(V_{n,k})$, где $V_{n,k}$ — многообразие Штифеля (многообразие ортонормированных k -реперов в $\mathbb{R}^n$), есть взаимно однозначное соответствие. См. S. Smale, "The Classification of Immersions of Spheres in Euclidean Spaces", *Ann. Math., Ser. 2*, 69, 327–344 (1959).

$V_{n+1,n} \cong SO_{n+1}$, поэтому достаточно убедиться, что $\pi_0(SO_1) \cong \pi_2(SO_3) \cong \pi_6(SO_7) \cong 0$. В самом деле, $\pi_0(SO_1) \cong 0$ и $\pi_2(SO_3) \cong \pi_2(\mathbb{R}P^3) \cong \pi_2(S^3) \cong 0$. Для последней гомотопической группы можно воспользоваться стандартным расслоением $SO_7 \rightarrow S^6$ со слоем SO_6 , рассмотреть соответствующую точную последовательность

$$\pi_6(SO_6) \rightarrow \pi_6(SO_7) \rightarrow \pi_6(S^6) \rightarrow \pi_5(SO_6) \rightarrow \pi_5(SO_7)$$

и воспользоваться периодичностью Ботта (см. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б., «Курс гомотопической топологии»).

Шаг 2

Пусть S^n можно вывернуть наизнанку в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда S^{n+1} параллелизуема.

В самом деле, пусть S^n можно вывернуть наизнанку.

- Из соображений степени отображения Гаусса ясно, что $n = 2k$. В таком случае существует гомотопия между стандартным вложением сферы и его отражением относительно гиперплоскости.
- Если рассмотреть такую гомотопию как отображение цилиндра, то её можно доопределить до погружения S^{n+1} в $\mathbb{R}^{n+1}$, а вместе с ним доопределить векторное поле единичной нормали так, чтобы оно ни в какой точке не было направлено вертикально вверх.
- Такому погружению соответствует отображение Гаусса $G(x)$, которое не может принять значение верхнего полюса сферы. Сферу с выколотым полюсом можно отождествить с $\mathbb{R}^{n+1}$ и взять там $n + 1$ независимых векторных полей.
- Соответственно, в каждой точке $x \in S^{n+1}$ мы получаем $n + 1$ независимых векторов в точке $G(x)$. Эти векторы касательные, поскольку G — отображение Гаусса.

Схема доказательства. Шаг 3

Теорема (Дж. Милнор, 1958)

Если над S^n существует GL_m -расслоение с ненулевым n -ным классом Штифеля-Уитни, то $n \in \{1, 2, 4, 8\}$.

Следствие 1 (обобщённая теорема Фробениуса)

Все возможные вещественные алгебры без делителей нуля — это $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ и алгебра октав (8-мерная вещественная неассоциативная алгебра без делителей нуля).

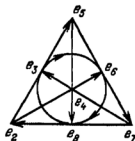


Рис.: Закон умножения в алгебре Oct.K примеру, $e_2 e_3 = e_5$.

Действительно, отображение $S^{n-1} \rightarrow GL_n$, сопоставляющее точке x операцию умножения слева на x , порождает соответствующее GL_n -расслоение S^n .

Следствие 2

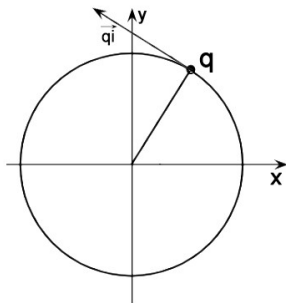
Если S^{n+1} параллелизуема, то $n \in \{0, 2, 6\}$.

Соответствующее GL_n -расслоение можно получить из отображения $x \rightarrow (x, v_1(x), \dots, v_{n-1}(x))$, где v_i — параллелизующие векторные поля.

Также существует наглядный пример параллелизации сфер, напрямую связанный с теоремой Фробениуса.

Можно рассмотреть $S^1 \subset \mathbb{C}$, $S^3 \subset \mathbb{H}$, $S^7 \subset \text{Oct}$.

- Рассмотрим точку $q \in S^1$ как комплексное число, и сопоставим ей вектор qi . Нетрудно заметить, что полученное векторное поле нигде не вырождается в ноль.
- Аналогично, для точки $q \in S^3 \subset \mathbb{H}$ рассмотрим три линейно независимых вектора: qi, qj, qk . Они будут ортогональны вектору q : к примеру, рассмотрим скалярное произведение (q, qi) . Если $q = a + bi + cj + dk$, то $(q, qi) = (a + bi + cj + dk, -b + ai + dj - ck) = -ab + ab + cd - cd = 0$.
- В алгебре октав есть 7 мнимых единиц: $i_m, m \in \{1, \dots, 7\}$. Соответственно, точке q можно сопоставить векторы $qi_m, m \in \{1, \dots, 7\}$.



15. Проблема Якобиана в размерности 3 и выше

Гипотеза о якобиане

Пусть F – такое комплексное полиномиальное отображение $\mathbb{C}^n$ в себя, что $\det dF$ постоянен и отличен от нуля. Тогда существует комплексное полиномиальное отображение, обратное к F .

Первым подобную задачу поставил Людвик Краус в 1884 для $n = 2$, а в 1939 Отт-Генрих Келлер обобщил вопрос. Стивен Смейл включил эту задачу в список важнейших проблем XXI века.



Людвик Краус (1857–1886)



Отт-Генрих Келлер (1906–1990)

Усиленная вещественная гипотеза о якобиане

Пусть F – такое полиномиальное отображение $\mathbb{R}^n$ в себя, что $\det dF$ всюду отличен от нуля. Тогда существует гладкое отображение, обратное к F .

В 1977 году Ш. Абьянкар показал, что если существуют многочлены от двух вещественных переменных t, h, f такие, что

$$J(h, t) = h - t, J(f, h) = -f, J(f, t) = -f + 3h^2 + 2h,$$

где $J(u(x, y), v(x, y)) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$, то отображение

$p(x, y) = t + h, q(x, y) = -t^2 - 6th(h + 1) - u(f, h)$, где $u(f, h)$ удовлетворяет $J(p, u) = -f(f + f(13 + 15h)^2 + 12h + 12fh)$, может быть контрпримером для $n = 2$.



Рис.: Шрирам Абьянкар (1930–2012)

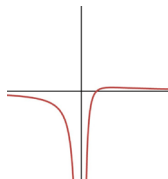
Контрпример к усиленной гипотезе о якобиане в $\mathbb{R}^2$ (С. Пинчук, 1994)

$$p(x, y) = t + h,$$

$$q(x, y) = -t^2 - 6th(h + 1) - u(f, h),$$

где $t = xy - 1$, $h = t(xt + 1)$, $f = (xt + 1)^2(t^2 + y)$.

$J(p, q) = t^2 + f^2 + (t + f(13 + 15h))^2$ отличен от 0, однако такое отображение не является диффеоморфизмом плоскости в себя, поскольку прообраз прямой $p = 0$ содержит график функции $y = \frac{x-1}{x^2}$.



Сергей Пинчук (1948) График $y = \frac{x-1}{x^2}$

См. *Pinchuk, Sergey (1994), «A counterexample to the strong real Jacobian conjecture», Mathematische Zeitschrift, 217 (1): 1–4*

Теорема (Xiang Zhang, 2020)

Полиномиальное отображение $(u(x, y), v(x, y)) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ с постоянным ненулевым якобианом инъективно.

См. *Xiang Zhang*, «*Jacobian conjecture in $\mathbb{R}^2$* », 2020, *arXiv:2011.12701*

Идея доказательства: введём на $\mathbb{R}^2$ стандартную симплектическую форму, тогда можно рассмотреть гамильтоновы векторные поля $\text{sgrad } u$, $\text{sgrad } v$. Из того, что якобиан постоянный, следует, что они коммутируют, пересекаются трансверсально, а также не имеют особенностей и периодических траекторий.

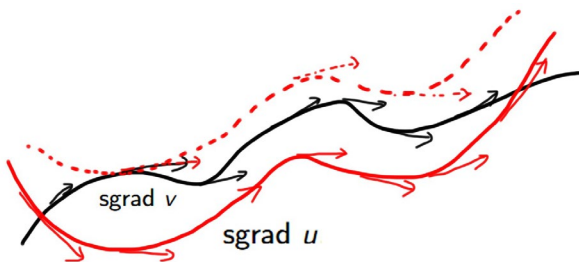
В самом деле, легко проверить, что $[\text{sgrad } u, \text{sgrad } v] = \text{sgrad } J(u, v) = 0$; Если в какой-то точке $\text{sgrad } u = 0$, то $u'_x = u'_y = 0$, следовательно, $J(u, v) = 0$; отсутствие периодических траекторий следует из того, что внутри области, ограниченной периодической траекторией, существует особенность векторного поля. Трансверсальность пересечения траекторий вытекает непосредственно из того, что $J(u, v)$ отличен от нуля.

Вещественный случай

Удалось показать, что у такого отображения все прообразы одной точки при отображении u должны лежать на одной траектории поля $\text{sgrad } u$. Аналогично и для функции v . Следовательно, если у двух точек будет одинаковый образ при отображении (u, v) , то проходящие через них траектории $\text{sgrad } u$, $\text{sgrad } v$ должны пересекаться в этих точках, что невозможно, поскольку влечёт касание векторных полей в некоторой точке.



Чжан Сян (1963)



В таком случае есть две касающиеся траектории

Пример, найденный с помощью ИИ

В 2026 году сотруднику компании Anthropic Левенту Альпёге удалось найти контрпример к комплексному случаю гипотезы о Якобиане для $n = 3$ с использованием большой языковой модели «*Claude Fable 5*». Для этого ИИ работал более 24 часов подряд. В процессе работы языковой моделью было написано около 130 программ и выяснено несколько вспомогательных фактов.

$$F(x, y, z) = (z(1 + xy)^3 + y^2(1 + xy)(4 + 3xy), \\ y + 3x(1 + xy)^2z + 3xy^2(4 + 3xy), 2x - 3x^2y - x^3z)$$

В самом деле, $\det dF = -2$, но $F(0, 0, -\frac{1}{4}) = F(-1, \frac{3}{2}, \frac{13}{2}) = F(1, -\frac{3}{2}, \frac{13}{2}) = (-\frac{1}{4}, 0, 0)$.

См. https://x.com/_alpoge_/status/2079028340955197566



Рис.: Левент Альпёге (1992)

Работа над задачей при $n = 2$ продолжается

- Если гипотеза неверна, то можно подобрать контрпример с целыми коэффициентами и Якобианом, тождественно равным 1 (Edwin Connell, Lou van den Dries, 1983)
- Гипотеза верна для многочленов степени 2 (Stuart Sui-Sheng Wang, 1980)
- Из гипотезы Якобиана в размерности 2 следует гипотеза Диксмье для алгебры Вейля A_1 (Kossivi Adjamagbo, Arno van den Essen, 2007)
- Гипотеза Диксмье для алгебры Вейля A_1 доказана сотрудником нашей кафедры А. Б. Жегловым в 2024 г. (см. *Zheglov, Alexander (2024). «The Conjecture of Dixmier for the first Weyl algebra is true». arXiv:2410.06959*)