



Даниил Андреевич
Ткаченко

*7. Разные варианты Канторовых
множеств. Хаусдорфова размерность.
Может быть нецелым числом.*

Пусть (M, ρ) — метрическое пространство. Пусть A — любое непустое его подмножество.

Определение

Диаметром множества A называется число $\sup_{x,y \in A} \rho(x,y) =: |A|$

Пусть (M, ρ) — метрическое пространство. Пусть A — любое непустое его подмножество.

Определение

Диаметром множества A называется число $\sup_{x,y \in A} \rho(x,y) =: |A|$

Пусть $\Omega \subset M$ — ограниченное подмножество.

Пусть $\alpha, \varepsilon > 0$ и

$$H^\alpha(\Omega) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} |U_i|^\alpha \mid \Omega \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i, |U_i| \leq \varepsilon \right\},$$

где $\{U_i\}_i$ — не более чем счётное покрытие множества Ω .

Определение

Число $H^\alpha(\Omega)$ называется α -мерой Хаусдорфа множества Ω

Оказывается, существует α_0 , такой, что

- ❶ При $\alpha < \alpha_0$ мера $H^\alpha(\Omega) = \infty$
- ❷ При $\alpha > \alpha_0$ мера $H^\alpha(\Omega) = 0$.

Определение

Число $\alpha_0 =: \dim_H(\Omega)$ называется *размерностью Хаусдорфа* (PX) множества Ω .

Для стандартных объектов (гладкие кривые, области в $\mathbb{R}^n$) хаусдорфова размерность совпадает с топологической. Однако PX может быть и не целым числом! (Примеры будут).

Дальше будем рассматривать подмножества **евклидова пространства**.
Перечислим некоторые свойства α -меры Хаусдорфа:

- ❶ $H^\alpha(r\Omega) = r^\alpha H^\alpha(\Omega)$, где $r\Omega$ — это сжатие множества Ω в r раз;
- ❷ Для непересекающихся Ω_1, Ω_2 верно $H^\alpha(\Omega_1 \cup \Omega_2) = H^\alpha(\Omega_1) + H^\alpha(\Omega_2)$;
- ❸ $H^\alpha(a + \Omega) = H^\alpha(\Omega)$ (инвариантность относительно сдвигов)

Стандартное канторово множество. Берётся отрезок единичной длины, делится на три равных куска — средний кусок выбрасывается. Аналогичный процесс делается для оставшихся отрезков, и так далее.

Известный факт, что получается множество с разными интересными свойствами: компактность, вполне несвязность, совершенство, нулевая мера Лебега, нигде не плотность.

Определение

Топологическое пространство называется *вполне несвязным*, если связными подмножествами являются исключительно пустое множество $\emptyset$ и одноточечные подмножества.

Определение

Совершенное множество — замкнутое множество, не имеющее изолированных точек.

Канторово множество

Некоторые свойства являются даже определяющими, как говорит следующая теорема.

Теорема (Л.Э.Я. Брауэр, 1910г, [6])

Любое компактное вполне несвязное совершенное метрическое пространство гомеоморфно канторову множеству.

Обозначать это стандартное канторово множество будем через C .

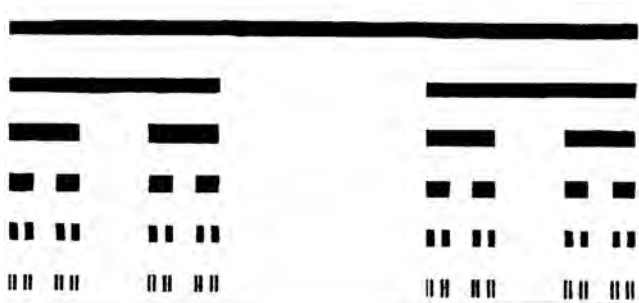


Рис.: Стандартное канторово множество.

Давайте найдём $\dim_H(\mathcal{C}) = \alpha_0$.

Доказательство. Это делается совсем просто.

Договоримся об обозначениях: $a + b\Omega := \{a + bx \mid x \in \Omega\}$.

Давайте найдём $\dim_H(\mathcal{C}) = \alpha_0$.

Доказательство. Это делается совсем просто.

Договоримся об обозначениях: $a + b\Omega := \{a + bx \mid x \in \Omega\}$.

Запишем очевидное равенство:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{3}\mathcal{C} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathcal{C}\right)$$

Давайте найдём $\dim_H(\mathcal{C}) = \alpha_0$.

Доказательство. Это делается совсем просто.

Договоримся об обозначениях: $a + b\Omega := \{a + bx \mid x \in \Omega\}$.

Запишем очевидное равенство:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{3}\mathcal{C} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathcal{C}\right)$$

Пусть $0 < H^{\alpha_0}(\mathcal{C}) < \infty$. Тогда

$$H^{\alpha_0}(\mathcal{C}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha_0} H^{\alpha_0}(\mathcal{C}) + \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha_0} H^{\alpha_0}(\mathcal{C})$$

Давайте найдём $\dim_H(\mathcal{C}) = \alpha_0$.

Доказательство. Это делается совсем просто.

Договоримся об обозначениях: $a + b\Omega := \{a + bx \mid x \in \Omega\}$.

Запишем очевидное равенство:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{3}\mathcal{C} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathcal{C}\right)$$

Пусть $0 < H^{\alpha_0}(\mathcal{C}) < \infty$. Тогда

$$H^{\alpha_0}(\mathcal{C}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha_0} H^{\alpha_0}(\mathcal{C}) + \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha_0} H^{\alpha_0}(\mathcal{C})$$

$$1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha_0} \implies 3^{\alpha_0} = 2 \implies \boxed{\dim_H(\mathcal{C}) = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63\dots}$$

Давайте найдём $\dim_H(\mathcal{C}) = \alpha_0$.

Доказательство. Это делается совсем просто.

Договоримся об обозначениях: $a + b\Omega := \{a + bx \mid x \in \Omega\}$.

Запишем очевидное равенство:

$$\mathcal{C} = \frac{1}{3}\mathcal{C} \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathcal{C}\right)$$

Пусть $0 < H^{\alpha_0}(\mathcal{C}) < \infty$. Тогда

$$H^{\alpha_0}(\mathcal{C}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha_0} H^{\alpha_0}(\mathcal{C}) + \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha_0} H^{\alpha_0}(\mathcal{C})$$

$$1 = 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha_0} \implies 3^{\alpha_0} = 2 \implies \boxed{\dim_H(\mathcal{C}) = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63\dots}$$

Здесь мы явно воспользовались тем, что предположили конечность и положительность меры $H^{\alpha_0}(\mathcal{C})$. Вопрос, почему оно в действительности так, не совсем тривиальный, поэтому опустим его.

Канторово множество

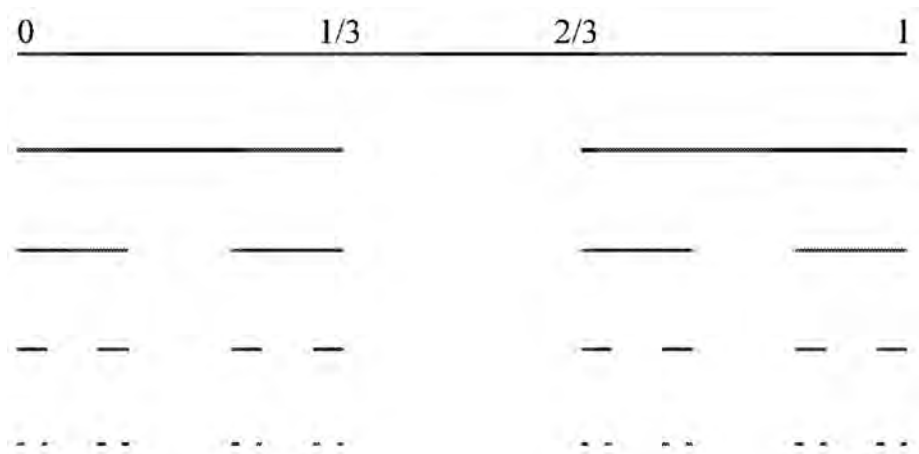


Рис.: Размерность Хаусдорфа равна $\frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63\dots$

Есть разные варианты канторовых множеств. Например, следующий. Стандартное канторово множество получалось, если на каждом шаге мы брали центральную часть отрезка длины $1/3$ от всего отрезка и выкидывали. Давайте зафиксируем $\alpha \in (0, 1)$. Тогда первый вариант состоит в следующем. Теперь берем центральную часть отрезка длины α от длины всего отрезка. Выкидываем. Остается два равных отрезка длины $\frac{1-\alpha}{2}$. Процесс повторяем. Получим вариант канторова множества $\mathcal{C}_\alpha$, при этом $\dim_H(\mathcal{C}_\alpha) = \frac{\ln 2}{\ln(\frac{2}{1-\alpha})}$ (считается аналогично).

Мера Лебега $\mathcal{C}_\alpha$ также нулевая.

Теперь будем удалять центральные части с быстро убывающей длиной: сначала $1/4$, потом $1/16$, потом $1/64$ и т.д. Снова получим вариант канторова множества, но

Теперь будем удалять центральные части с быстро убывающей длиной: сначала $1/4$, потом $1/16$, потом $1/64$ и т.д. Снова получим вариант канторова множества, но

- ❶ с положительной мерой Лебега, равной $\frac{9}{13}$;
- ❷ с хаусдорфовой размерностью $= 1$, хотя не содержит никакого отрезка.

Такой вариант канторова множества называется *толстым множеством*.

Теперь будем удалять центральные части с быстро убывающей длиной: сначала $1/4$, потом $1/16$, потом $1/64$ и т.д. Снова получим вариант канторова множества, но

- ❶ с положительной мерой Лебега, равной $\frac{9}{13}$;
- ❷ с хаусдорфовой размерностью $= 1$, хотя не содержит никакого отрезка.

Такой вариант канторова множества называется *толстым множеством*.

Понять, почему хаусдорфова размерность равна 1, достаточно просто. Мера Лебега равна $\frac{9}{13}$. А из определения хаусдорфовой размерности следует, что при $\alpha = 1$ мера H^1 совпадает с лебеговой. Поэтому $H^1(\text{толстое множество}) = \frac{9}{13}$. Значит, $\dim_H = 1$.

Канторово множество. p -адические целые числа $W(\mathbb{F}_p)$

Множество $W(\mathbb{F}_p)$ состоит из элементов, которые единственным образом записываются в виде формального ряда:

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n$$

где $a_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. При $p = 2$ это бесконечные двоичные последовательности, уходящие влево: $\dots a_2 a_1 a_0$.

Метрика вводится следующая: $|a - b|_p = p^{-k}$, где k — номер первой координаты, в которой элементы различаются.

Размерность $\dim_H(W(\mathbb{F}_p)) = 1$. *(не совсем тривиально вычисляется)*
Верна следующая

Теорема ([7])

$W(\mathbb{F}_p) \simeq$ канторово множество.

Как дальше будет видно, p -адические целые числа и p -адические солениды неспроста имеют одинаковые названия

Также следует обратить внимание на то, что $W(\mathbb{F}_p)$ обладает структурой кольца с единицей. Каждый элемент — это последовательность $(\dots, a_2, a_1, a_0)$. Сложение и умножение определяется сложением и умножением двух последовательностей в столбик, как в школе, но бесконечно влево.

Поэтому фактически мы можем на стандартном канторовом множестве $\mathcal{C}$ ввести структуру кольца, пользуясь гомеоморфизмом $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow W(\mathbb{F}_p)$: достаточно положить $\forall x, y \in \mathcal{C}$

$$x \oplus y := \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y))$$

и

$$x \odot y := \varphi^{-1}(\varphi(x) \cdot \varphi(y)).$$

Однако это будет искусственная структура, не имеющего ничего общего с порядком и арифметикой на прямой $\mathbb{R}$.

Верна следующая

Теорема

$\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_\alpha \simeq W(\mathbb{F}_p) \simeq$ толстое множество.

Все перечисленные выше объекты топологически неразличимы, гомеоморфны, однако имеют различные характеристики, как то: мера Любега, хаусдорфова размерность. А $W(\mathbb{F}_p)$ вообще обладает структурой кольца с единицей.

Ковёр Серпинского. Аналог канторова множества в $\mathbb{R}^2$

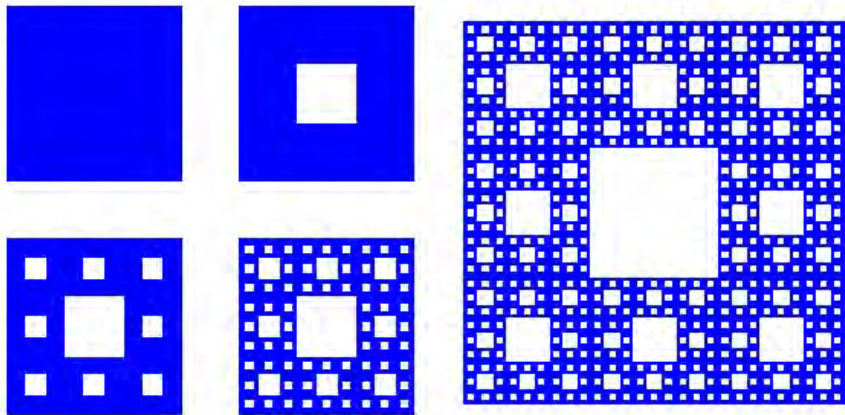


Рис.: Двумерный аналог канторова множества. Хаусдорфова размерность = $\frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.89 \dots$

Аналогично можно построить аналоги канторовых множеств в $\mathbb{R}^n$.

8. *Ожерелъе Антуана.*

Стандартное канторово множество можно очень просто вложить в $\mathbb{R}^3$: взять там прямую $\mathbb{R}^1$ и на ней канторово множество. Однако существует «дикое» вложение. Оно называется *ожерельем Антуана* и строится следующим образом. Берем полноторие. Внутри него располагаем несколько полноториев поменьше, сцепленных друг с другом.

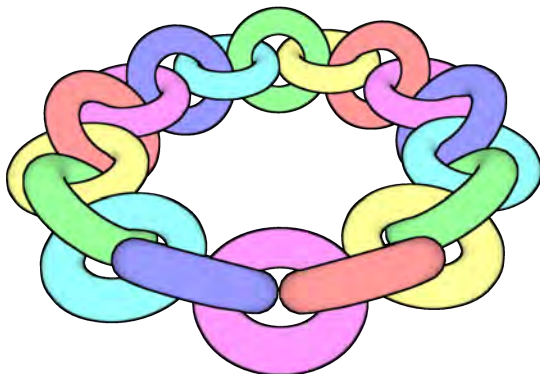


Рис.: Дикое вложение канторова множества в $\mathbb{R}^3$. Итерация 1

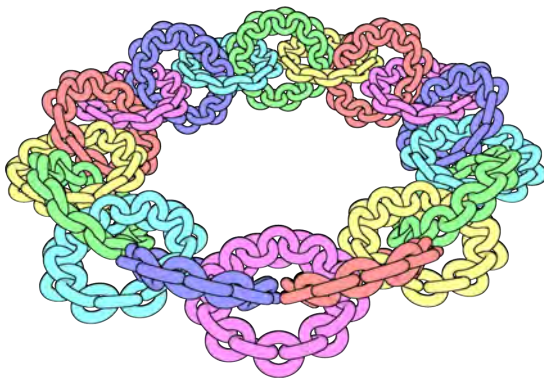


Рис.: Дикое вложение канторова множества в $\mathbb{R}^3$. Итерация 2

Процесс продолжаем до бесконечности. В пределе и получаем ожерелье Антуана, обозначаемое через букву $\mathcal{A}$.

В чём чудо? Рассмотрим стандартное канторово множество $\mathcal{C}$ на прямой $\mathbb{R}$, вложенной в $\mathbb{R}^3$. Тогда верно

Предложение

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}) = 0.$$

То есть дополнение к $\mathcal{C}$ односвязно.

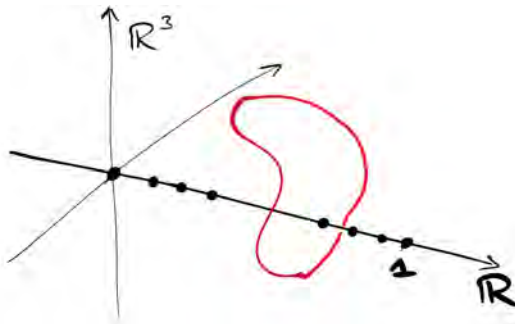


Рис.: Всякая петля, зацепляющая прямую, продевается через канторово множество, поскольку там очень много дырок.

Процесс продолжаем до бесконечности. В пределе и получаем ожерелье Антуана, обозначаемое через букву $\mathcal{A}$.

В чём чудо? Рассмотрим стандартное канторово множество $\mathcal{C}$ на прямой $\mathbb{R}$, вложенной в $\mathbb{R}^3$. Тогда верно

Предложение

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{C}) = 0.$$

То есть дополнение к $\mathcal{C}$ односвязно. Однако ожерелье Антуана это такое хитрое вложение канторова множества, что дополнение к ожерелью Антуана уже **неодносвязно!** То есть верна

Теорема

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{A}) \neq 0.$$

Этот пример показывает, что если простой топологический объект по-особому вложить, то он может создавать топологические преграды.

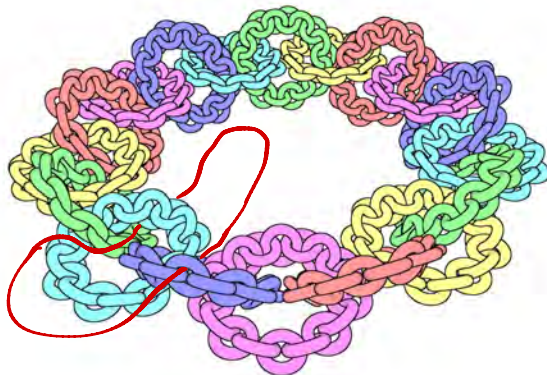


Рис.: Пример петли, которая не может быть стянута, продета через ожерелье Антуана. Она зацепляет бесконечное число монотонно убывающих торов.

9. P -адические соленоиды.

Теперь перейдем к p -адическим соленоидам. Снова возьмем полноторие. Внутрь него вложим полноторие поменьше, обвитое вокруг дырки исходного p раз (p — простое число). Берем третье полноторие, вкладываем его внутрь второго так, чтобы он обвивал дырку предыдущего также p раз. Таким образом, третье полноторие обвивает дырку исходного полнотория p^2 раз. Процесс продолжаем до бесконечности — получили p -адический соленоид.



Рис.: 2-адический соленоид. Первые несколько торов этой конструкции. Чтобы было видно, что происходит внутри, в торах проделаны большие отверстия.

Автор: А.Т. Фоменко.

Комментарий к картине. Этот объект известен в топологии как обладающий интересными свойствами. Его конструкция проста. Нужно взять полноторие, т. е. прямое произведение диска на окружность. Получится заполненный тор, бублик. Затем следует взять второе полноторие и вложить его в первое, как показано на рисунке. Т. е., намотав два раза вдоль оси первого полнотория. В результате второе полноторие расположится внутри первого, как змея, свернувшаяся в два кольца. На следующем шаге нужно взять третье полноторие и вложить его во второе, намотав два раза вдоль оси второго полнотория. В результате третье полноторие наматывается 4 раза вдоль оси первого. Продолжая, получаем бесконечную последовательность вложенных полноторий. Можно рассмотреть «их предел». Получающееся «предельное пространство» и называется 2-адическим соленоидом. На рисунке изображена последовательность граничных торов этих полноторий вплоть до тора с номером IX.

Часть поверхности каждого тора удалена, т. е. торы разрезаны, чтобы можно было видеть их внутренность. Интерес к этому объекту возрос в последнее время, когда обнаружилось, что такая «2-адическая намотка» торов естественно появляется в гамильтоновой и симплектической топологии. Здесь в качестве торов выступают так называемые торы Лиувилля. Оказалось, что такие «двукратные намотки торов» описывают важные свойства интегрируемых дифференциальных уравнений.

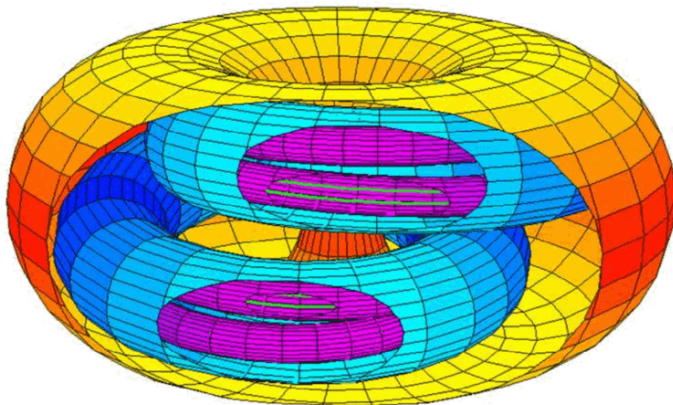


Рис.: Анимированный 2-адический соленоид. Показано несколько первых полноторий. Для запуска анимации следует нажать на картинку.

Где же здесь p -адические целые числа $W(\mathbb{F}_p)$? Так вот же они! Разрежем вдоль меридиана самого большого тора. Получим поперечное сечение.

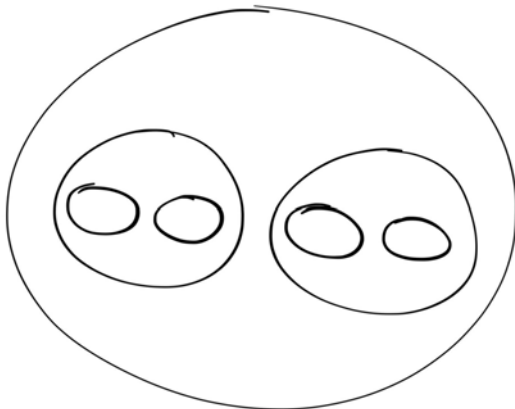


Рис.: Поперечное сечение 2-адического соленоида. Первый вложенный тор пересекает это сечение по двум дискам. Второй вложенный тор пересекает сечение в четырех дисках. И так далее.

Возьмём произвольную точку p -адического соленоида, лежащего в этом сечении. Значит, эта точка принадлежит всем вложенным полноториям. Следовательно, точка лежит в одном из p больших дисков в сечении; в этом диске она лежит в одном из p следующих дисков сечения. И так далее. Таким образом, точку p -адического соленоида в данном сечении можно закодировать последовательностью $a_0, a_1, \dots$, где $a_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, и a_i обозначают номер диска. Нумерация идёт с нуля и до $p-1$ — всего p дисков на каждом шаге.

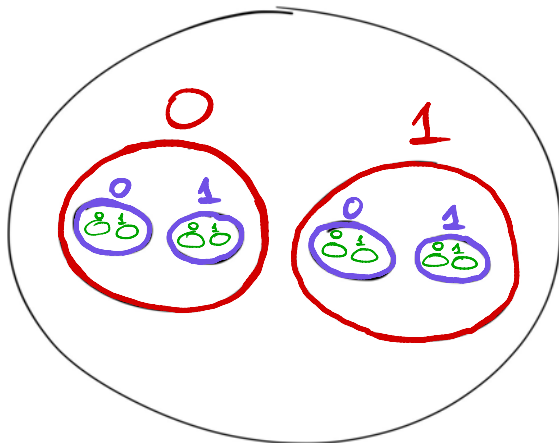


Рис.: Поперечное сечение 2-адического соленоида. Красным показан выбор a_0 , фиолетовым — a_1 , зелёным — a_2 . Каждый шаг — выбор, где точки быть, в левом или в правом полнотории.

Точка *p*-адического соленоида, таким образом, кодируется бесконечной последовательностью $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, где $a_i \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, и точкой на окружности $\mathbb{S}^1$. Этой последовательности сопоставляется *p*-адическое целое число $\sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n \in W(\mathbb{F}_p)$. Из этого соответствия следует

Теорема ([7])

Сечение *p*-адического соленоида $\simeq W(\mathbb{F}_p) \simeq \mathcal{C}$.

Таким образом, в сечение *p*-адического соленоида находится канторова пыль. Напомним несколько понятий. Топологическое пространство называется *связным*, если оно **не** разбивается на два открытых непустых непересекающихся множества; *локально связным*, если у каждой точки существует открытая окрестность, содержащая связную окрестность.

«Хорошие» пространства, как топологические многообразия или клеточные пространства, обладают тем свойством, что если они являются связными, то и локально связными.

«Хорошие» пространства, как топологические многообразия или клеточные пространства, обладают тем свойством, что если они являются связными, то и локально связными.

Чудо

p -адический соленоид является связным, но не локально связным топологическим пространством. В любой окрестности точки лежит канторова пыль (другое название стандартного канторова множества).

- ❶ Гамильтонова топология
- ❷ Математическая физика
- ❸ Квантовая криптография

В гамильтоновой топологии 2-адический солёноид — известная вещь. Его начальная итерация описывает неориентируемые перестройки торов Ливилля

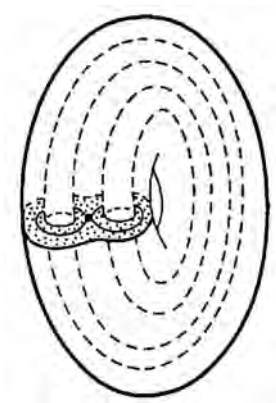


Рис.: 3-атом B . Бифуркация, при которой два тора перестраиваются в один через одну критическую окружность.

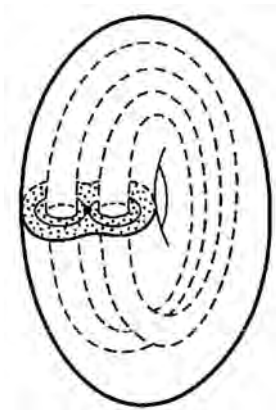


Рис.: 3-атом A^* . Начальная итерация 2-адического соленида, описывающая перестройку одного тора в один через одну критическую окружность.



Рис.: Превращение одного тора в один тор в окрестности особого слоя типа $(2,1)$ трехмерного расслоения Зейферта. Автор: А.Т. Фоменко.

Комментарий к картине. Перестройки торов Лиувилля в интегрируемых системах с двумя степенями свободы. Неориентируемая бифуркация. Особым слоем здесь является погруженная бутылка Клейна. Показано, как один тор, намотанный два вдоль оси объемлющего полнотория, деформируется, затем касается сам себя вдоль окружности и в этот момент перестраивается, превращаясь снова в один тор.

Итак, начальная итерация 2-адического соленоида представляет собою бифуркацию типа A^* . Начальная итерация $(m+1)$ -адического соленоида тоже будет представлять собою некоторую неориентируемую перестройку одного тора в один через $m+1$ критическую окружность. Эта бифуркация называется 3-атомом A^{m*} . Такие атомы также возникают в гамильтоновой топологии. А именно, в следующем подтипе интегрируемых гамильтоновых систем.

Интегрируемые билиарды представляют собою достаточно наглядные интегрируемые гамильтоновы системы. Кратко напомним, что билиардом в плоской области Ω называется динамическая система, описывающая равномерное движение материальной точки внутри этой области. По определению, вдоль траекторий сохраняется функция H — кинетическая энергия, равная квадрату модуля вектора скорости. Функции, сохраняющиеся вдоль траекторий, называются первыми интегралами системы. Билиард называется интегрируемым, если найдется дополнительный первый интеграл F , функционально независимый с H .

Однако не каждый билиард интегрируем! Гипотеза Биркгофа утверждает, что класс плоских интегрируемых билиардов ограничивается билиардами в областях, ограниченных дугами софокусных квадрик. Биркгофом была доказана интегрируемость билиарда в эллиптическом диске. Пусть уравнение

$$(b - \lambda)x^2 + (a - \lambda)y^2 = (a - \lambda)(b - \lambda)$$

задает семейство софокусных квадрик на плоскости с фиксированными параметрами семейства $a > b > 0$. Тогда дополнительный интеграл выглядит следующим образом:

$$\Lambda = \frac{bv_1^2 + av_2^2 - (v_1x - v_2y)^2}{v_1^2 + v_2^2}.$$

В.В. Ведюшкина расширила класс интегрируемых биллиардов, введя *биллиардные книжки*. Конструкция простая. Возьмём несколько плоских областей, ограниченных дугами квадрик (эллипсы, гиперболы) из одного софокусного семейства, и склеим вдоль этих дуг. Ребрам полученного клеточного пространства сопоставим перестановки, отвечающие тому, на какой лист точка будет попадать при столкновении о данное ребро. Эта конструкция и называется биллиардной книжкой, которая также интегрируема.

Пример бильярдной книжки

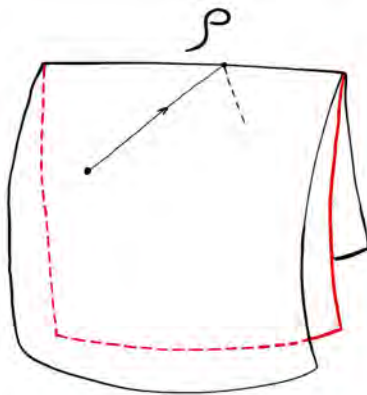


Рис.: Частица, движущаяся на листе i , после отражения о ребро с перестановкой ρ продолжит своё движение на листе $\rho(i)$.

А.Т. Фоменко ввёл биллиарды с *проскальзыванием* [5]. Поясним конструкцию на примере биллиарда в эллипсе. В обычном биллиарде при ударе точки о границу она бы продолжала своё движение по серой пунктирной линии, как изображено на рисунке ниже. А теперь скажем, что пусть точка, ударившись о границу, вылетает из диаметрально противоположной точки (см. тот же рисунок). Эта конструкция и называется проскальзыванием. Биллиард остаётся интегрируемым.

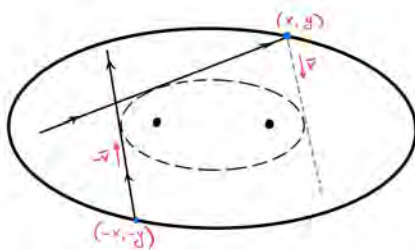


Рис.: Биллиард в эллипсе с проскальзыванием.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть имеется бильярдная книжка, склеенная из некоторого числа эллиптических дисков и колец. На ребра книжки накладывается ненулевое число проскальзываний. Тогда автором была получена следующая теорема.

Теорема (Ткаченко Д.А.)

Инвариант Фоменко произвольной бильярдной книжки, склеенной из эллиптических дисков и колец и произвольным образом оснащённой проскальзыванием вдоль граничных эллипсов и эллипсов склейки, имеет следующий вид:

- ① Часть молекулы, соответствующая уровню интеграла $\Lambda < b$, разбивается на две одинаковые части W . Каждая из них представляет собою произвольный граф Роба, в минимальных вершинах которого находятся атомы A , а во всех остальных вершинах находятся седловые атомы, **как без звёзд, так и со звёздами**;
- ② На фокальном уровне располагаются седловые атомы B и C_2 , которые соединяют свободные рёбра частей W . Если траектории, лежащие на некоторой компоненте связности особого слоя, проходят по такому числу дисков и проскальзываний, что их сумма нечётна, то этот атом имеет вид B , а если сумма чётна — C_2 ;
- ③ На рёбрах части молекулы, соответствующей уровню $\Lambda > b$, бифуркаций не возникает. В максимальных вершинах — атомы A .

Пример

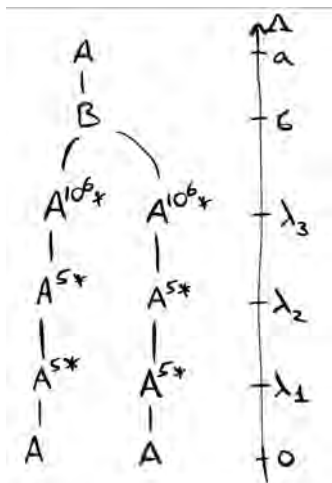


Рис.: Грубая молекулы бильярдной книжки, строение которой описано справа.

Устройство книжки

- 1 5 колец с параметром внутреннего эллипса λ_1 ;
- 2 5 колец с параметром внутреннего эллипса λ_2 ;
- 3 10^6 колец с параметром внутреннего эллипса λ_3 ;
- 4 На всех внутренних эллипсах введено проскальзывание;
- 5 Все кольца склеены друг с другом вдоль внешнего эллипса;
- 6 На внешнем эллипсе одного из колец введено проскальзывание.

В работах В.С. Владимирова и Я.И. Воловича p -адические соленоиды возникают при исследовании нелинейных псевдодифференциальных уравнений с бесконечным числом производных, которые первоначально появились в теории p -адических струн [1]

Идея: замена обычных вещественных чисел на p -адические в теории струн приводит к уравнениям нового типа, и p -адический соленоид оказывается естественным топологическим пространством, на котором эти уравнения определены.

Это представляет интерес для космологических моделей и исследования солитонных решений.

Кубит — это квантовый аналог бита. Кубит может находиться в суперпозиции — одновременно быть и 0, и 1 в некоторой пропорции.

Все возможные состояния одного кубита изображают на сфере Блоха. Это такая сфера, где северный полюс — это состояние 0, южный — состояние 1, а любая другая точка на поверхности — это суперпозиция.

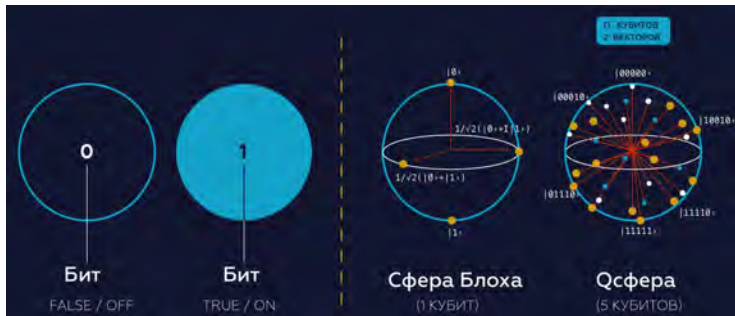


Рис.: Слева — обычный бит. Справа — кубит на сфере Блоха.

Пусть имеется некоторый алгоритм, который берет точку p -адического соленида (последовательность чисел) и преобразует ее в два числа — углы θ и φ , которые однозначно определяют точку на сфере Блоха.

Пусть имеется некоторый алгоритм, который берет точку p -адического соленида (последовательность чисел) и преобразует ее в два числа — углы θ и φ , которые однозначно определяют точку на сфере Блоха.

Благодаря своей структуре, p -адический соленид позволяет генерировать точки, которые равномерно распределены по всей сфере.

Пусть имеется некоторый алгоритм, который берет точку p -адического соленоида (последовательность чисел) и преобразует ее в два числа — углы θ и φ , которые однозначно определяют точку на сфере Блоха.

Благодаря своей структуре, p -адический соленоид позволяет генерировать точки, которые равномерно распределены по всей сфере.

Равномерное распределение означает, что вероятность попадания сгенерированной точки в любую область сферы пропорциональна площади этой области.

Пусть имеется некоторый алгоритм, который берет точку p -адического соленоида (последовательность чисел) и преобразует ее в два числа — углы θ и φ , которые однозначно определяют точку на сфере Блоха.

Благодаря своей структуре, p -адический соленоид позволяет генерировать точки, которые равномерно распределены по всей сфере.

Равномерное распределение означает, что вероятность попадания сгенерированной точки в любую область сферы пропорциональна площади этой области.

Таким образом, p -адический соленоид предоставляет инструмент, чтобы генерировать любые возможные состояния кубита на сфере Блоха. Это свойство важно в квантовой криптографии, поскольку позволяет получать случайные и непредсказуемые ключи.

10. *Существование полного инволютивного набора независимых полиномов. Некоммутативная интегрируемость эквивалентна коммутативной. Теорема Мищенко-Фоменко-Садэтова.*

Предварительно напомним основные понятия.

Определение

Симплектическим многообразием называется пара (M^{2n}, ω) , где M^{2n} — гладкое многообразие, ω — невырожденная замкнутая 2-форма на нём.

Из каждой гладкой функции H можно получить *векторное поле косоградиента* $\mathbf{sgrad} H$, определяя его из формулы:

$$\omega(v, \mathbf{sgrad} H) = v(H)$$

Определение

Две гладкие функции $F, G: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ *находятся в инволюции*, если их скобка Пуассона равна нулю:

$$\{F, G\} := \omega(\mathbf{sgrad} F, \mathbf{sgrad} G) = 0$$

Определение

Гладкие функции $F, G: M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ называются *независимыми*, или *функционально независимыми*, если их дифференциалы почти всюду линейно независимы.

Определение

Если на гладком симплектическом многообразии задан набор из n функционально независимых гладких функций $f_1, \dots, f_n$, находящихся в инволюции, т.е. $\{f_i, f_j\} = 0$, то будем говорить, что функции $f_1, \dots, f_n$ образуют *полный инволютивный (коммутативный) набор*.

Определение

Система $v = \text{sgrad } H$ называется *вполне интегрируемой по Лиувиллю*, если существует набор из n гладких функций $f_1, \dots, f_n$, что:

- $f_1, \dots, f_n$ — первые интегралы системы v ;
- $\{f_i, f_j\} = 0$;
- $f_1, \dots, f_n$ функционально независимы;
- Векторные поля $\text{sgrad } f_1, \dots, \text{sgrad } f_n$ полны.

Пусть у нас имеется полный инволютивный набор из n независимых гладких функций на гладком симплектическом многообразии M^{2n} . С этим набором естественно связано гладкое действие n -мерной коммутативной группы $\mathbb{R}^n$ на многообразии, сохраняющее симплектическую структуру.

Пусть у нас имеется полный инволютивный набор из n независимых гладких функций на гладком симплектическом многообразии M^{2n} . С этим набором естественно связано гладкое действие n -мерной коммутативной группы $\mathbb{R}^n$ на многообразии, сохраняющее симплектическую структуру.

А именно, пусть $e_1, \dots, e_n$ — образующие в абелевой группе $\mathbb{R}^n$. Каждая образующая e_i порождает одномерную подгруппу $\mathbb{R}_i^1$, которую представим в виде однопараметрической группы g_t^i диффеоморфизмов, порожденной векторным полем $v_i = \text{sgrad } f_i$.

Пусть у нас имеется полный инволютивный набор из n независимых гладких функций на гладком симплектическом многообразии M^{2n} . С этим набором естественно связано гладкое действие n -мерной коммутативной группы $\mathbb{R}^n$ на многообразии, сохраняющее симплектическую структуру.

А именно, пусть $e_1, \dots, e_n$ — образующие в абелевой группе $\mathbb{R}^n$. Каждая образующая e_i порождает одномерную подгруппу $\mathbb{R}_i^1$, которую представим в виде однопараметрической группы g_t^i диффеоморфизмов, порожденной векторным полем $v_i = \text{sgrad } f_i$.

Тогда абелева группа $\mathbb{R}^n$ гладко действует следующим образом: берем элемент $x = t_1 e_1 + \dots + t_n e_n$ и сопоставляем ему преобразование $\alpha(x): M^{2n} \rightarrow M^{2n}$ такое: $\alpha(x)y = g_{t_1}^1 \circ \dots \circ g_{t_n}^n(y)$, где $y \in M^{2n}$. Компактными связными неособыми орбитами этого действия являются торы Лиувилля $\mathbb{T}^n$.

Таким образом, каждая вполне интегрируемая гамильтонова система обладает определенным типом симметрий: с ней связано симплектическое действие коммутативной n -мерной группы на M^{2n} . При этом связные компактные неособые поверхности уровня интегралов совпадают с орбитами действия этой группы. Гамильтоновы системы, вполне интегрируемые по Лиувиллю, будем также называть *вполне интегрируемыми в коммутативном смысле*.

Таким образом, каждая вполне интегрируемая гамильтонова система обладает определенным типом симметрий: с ней связано симплектическое действие коммутативной n -мерной группы на M^{2n} . При этом связные компактные неособые поверхности уровня интегралов совпадают с орбитами действия этой группы. Гамильтоновы системы, вполне интегрируемые по Лиувиллю, будем также называть *вполне интегрируемыми в коммутативном смысле*.

Возникает естественный вопрос: на каждом ли гладком симплектическом многообразии существует хотя бы один полный инволютивный набор гладких независимых функций?

Ответ: да. Верна следующая

Теорема (А.В. Браилов [4])

На каждом симплектическом гладком многообразии всегда существует полный инволютивный набор гладких функций, функционально независимых почти всюду на многообразии.

Идея доказательства:

- 1 Для каждой точки $x \in M^{2n}$ существует шаровая окрестность с центром в этой точке с симплектическими координатами p_i, q_i ;

Идея доказательства:

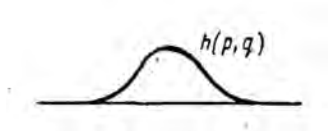
- 1 Для каждой точки $x \in M^{2n}$ существует шаровая окрестность с центром в этой точке с симплектическими координатами p_i, q_i ;
- 2 В шаре рассматривается набор функций $f_i = p_i^2 + q_i^2$, находящихся в инволюции;

Идея доказательства:

- 1 Для каждой точки $x \in M^{2n}$ существует шаровая окрестность с центром в этой точке с симплектическими координатами p_i, q_i ;
- 2 В шаре рассматривается набор функций $f_i = p_i^2 + q_i^2$, находящихся в инволюции;
- 3 А также функция $f = \sum_{i=1}^n f_i = \sum p_i^2 + q_i^2$;

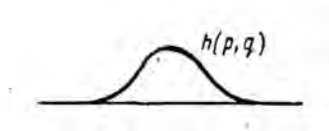
Идея доказательства:

- 1 Для каждой точки $x \in M^{2n}$ существует шаровая окрестность с центром в этой точке с симплектическими координатами p_i, q_i ;
- 2 В шаре рассматривается набор функций $f_i = p_i^2 + q_i^2$, находящихся в инволюции;
- 3 А также функция $f = \sum_{i=1}^n f_i = \sum p_i^2 + q_i^2$;
- 4 Строится гладкая функция $h(p, q)$, которая в центре шара равна 1, на границе — 0, и монотонно убывает с ростом f . На всем многообразии продолжается нулем;



Идея доказательства:

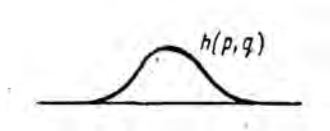
- 1 Для каждой точки $x \in M^{2n}$ существует шаровая окрестность с центром в этой точке с симплектическими координатами p_i, q_i ;
- 2 В шаре рассматривается набор функций $f_i = p_i^2 + q_i^2$, находящихся в инволюции;
- 3 А также функция $f = \sum_{i=1}^n f_i = \sum p_i^2 + q_i^2$;
- 4 Строится гладкая функция $h(p, q)$, которая в центре шара равна 1, на границе — 0, и монотонно убывает с ростом f . На всем многообразии продолжается нулем;



- 5 Получим функции на открытом шаре $hf_1, \dots, hf_n$, которые находятся в инволюции и независимы;

Идея доказательства:

- 1 Для каждой точки $x \in M^{2n}$ существует шаровая окрестность с центром в этой точке с симплектическими координатами p_i, q_i ;
- 2 В шаре рассматривается набор функций $f_i = p_i^2 + q_i^2$, находящихся в инволюции;
- 3 А также функция $f = \sum_{i=1}^n f_i = \sum p_i^2 + q_i^2$;
- 4 Строится гладкая функция $h(p, q)$, которая в центре шара равна 1, на границе — 0, и монотонно убывает с ростом f . На всем многообразии продолжается нулем;



- 5 Получим функции на открытом шаре $hf_1, \dots, hf_n$, которые находятся в инволюции и независимы;
- 6 Покрываем почти все многообразие M^{2n} (за исключением замкнутого множества меры нуль) открытыми непересекающимися шарами,

Строим на каждом из них набор функций и получаем n гладких функций на всем многообразии, которые находятся в инволюции и функционально независимы на открытом всюду плотном множестве.

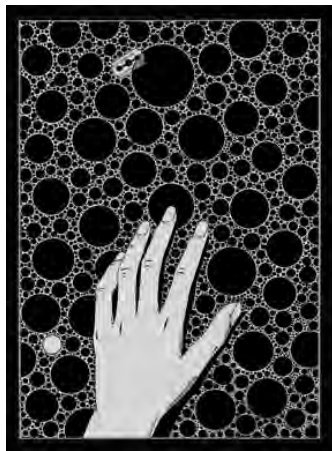


Рис.: Иллюстрация к теореме Браилова. А также фантазия на темы фракталов, аналогов канторовых множеств и не целой хаусдорфовой размерности. Автор: А.Т. Фоменко.

Показана идея доказательства следующей теоремы: на любом гладком симплектическом многообразии размерности $2n$ всегда существует набор из n гладких независимых функций, находящихся в инволюции. Такие семейства функций называются полными инволютивными. Поиск таких алгебраических семейств — одна из центральных задач гамильтоновой механики. Полные инволютивные семейства функций — это интегралы уравнений, т. е. величины, сохраняющиеся при движении вдоль интегральных траекторий. Для построения примера таких гладких (но не алгебраических) функций, нужно покрыть почти все многообразие M непересекающимися открытыми шарами так, чтобы дополнение к объединению шаров имело меру нуль. Такое счетное семейство шаров, постепенно уменьшающихся в размерах, и показано на рисунке. Затем достаточно построить полное инволютивное семейство функций на одном из шаров и повторить то же самое на остальных шарах. После чего остается лишь «сшить» функции вместе, опираясь на то, что каждая такая функция обращается в ноль на границе шара. Множества, подобные изображенному на рисунке, встречаются и в других разделах математики, например, в теории фракталов — множества Мандельброта и Жюлиа.

Через $C^\infty(M)$ обозначим линейное бесконечномерное пространство всех гладких функций на гладком симплектическом многообразии M^{2n} . Это пространство превращается в алгебру Ли относительно скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}$. Рассмотрим гамильтонову систему $v = \text{sgrad } H$ с гамильтонианом $H \in C^\infty(M)$. Тогда если система v вполне интегрируема по Лиувиллю, то H включается в коммутативную подалгебру функций $G(H)$ с размерностью, в точности равной n ; при этом в $G(H)$ можно выбрать аддитивный базис $f_1, \dots, f_n$, все функции которого функционально независимы (почти всюду) на M .

Определение

Будем говорить, что на симплектическом гладком многообразии M^{2n} задана *максимальная линейная коммутативная подалгебра* функций G_0 (в алгебре Ли $C^\infty(M)$), если $\dim G_0 = n$ и в G_0 можно выбрать аддитивный базис, состоящий из n функционально независимых на M^{2n} (почти всюду) функций $f_1, \dots, f_n$.

Определение

Будем говорить, что на симплектическом гладком многообразии M^{2n} задана *максимальная линейная коммутативная подалгебра* функций G_0 (в алгебре Ли $C^\infty(M)$), если $\dim G_0 = n$ и в G_0 можно выбрать аддитивный базис, состоящий из n функционально независимых на M^{2n} (почти всюду) функций $f_1, \dots, f_n$.

Итак, если на гладком симплектическом многообразии M^{2n} существует максимальная линейная коммутативная подалгебра функций, то, следовательно, существует и полный инволютивный набор из n гладких независимых функций.

Можно сформулировать важный вопрос симплектической и гамильтоновой геометрии.

Вопрос

Существует ли на гладком симплектическом многообразии хотя бы одна максимальная линейная коммутативная подалгебра G_0 в алгебре Ли функций $C^\infty(M)$?

Можно сформулировать важный вопрос симплектической и гамильтоновой геометрии.

Вопрос

Существует ли на гладком симплектическом многообразии хотя бы одна максимальная линейная коммутативная подалгебра G_0 в алгебре Ли функций $C^\infty(M)$?

Итак, сразу неясно, существует ли на произвольном симплектическом гладком многообразии M^{2n} хотя бы одна максимальная линейная коммутативная подалгебра функций, т.е. существует ли на M^{2n} хотя бы одна интегрируемая система. Теорема Браилова, сформулированная выше, дает положительный ответ в гладком случае. Однако построенный набор функций патологичен и не представляет никакого интереса с точки зрения содержательных приложений. Поэтому сузим класс функций, среди которых нужно искать максимальные коммутативные подалгебры, до классов полиномов на алгебраических многообразиях.

Оказывается, гамильтонова система может быть проинтегрирована не только в том случае, когда ее гамильтониан включается в максимальную линейную коммутативную подалгебру функций, но и в том случае, когда он включается в некоммутативную алгебру Ли G функций на M , обладающую тем свойством, что $\dim G + \text{rank } G = \dim M^{2n}$.

Оказывается, гамильтонова система может быть проинтегрирована не только в том случае, когда ее гамильтониан включается в максимальную линейную коммутативную подалгебру функций, но и в том случае, когда он включается в некоммутативную алгебру Ли G функций на M , обладающую тем свойством, что $\dim G + \text{rank } G = \dim M^{2n}$.

А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко обнаружили, что в некоторых случаях существование максимальной линейной коммутативной подалгебры функций (т.е. интегралов) можно вывести из факта существования *некоммутативной* алгебры функций, не являющихся, вообще говоря, интегралами данной системы.

А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко сформулировали две тесно связанные гипотезы:

Гипотеза 1 (гипотеза эквивалентности)

Пусть гамильтонова система $u = \text{sgrad } f$ на симплектическом многообразии вполне интегрируема в некоммутативном смысле, т.е. коммутативная алгебра ее интегралов H (где $f \in H$) включается в некоторую объемлющую некоммутативную алгебру функций G такую, что $\dim G + \text{rank } G = \dim M$. Тогда эта же система вполне интегрируема и в коммутативном смысле, т.е. существует другая коммутативная алгебра G_0 независимых интегралов такая, что $2 \dim G_0 = \dim M$ и $f \in G_0$. При этом интегралы алгебры G_0 принадлежат к тому же функциональному классу, что и функции, составляющие алгебру G . При этом функции алгебры G_0 функционально выражаются через функции алгебры G .

Гипотеза 2 (о слоении орбит на торы Лиувилля)

Пусть G — произвольная конечномерная алгебра Ли. Тогда существует конечномерное пространство F полиномов, в котором можно выбрать базис из функционально независимых полиномов, определенных на дуальном пространстве G^* . При этом любая пара полиномов $f, g \in F$ находится в инволюции на орбитах коприсоединенного представления Ad^* группы $\mathfrak{G} = \exp G$ на G^* (относительно стандартной симплектической структуры на орбитах) и $\dim F = \frac{1}{2}(\text{rank } G + \dim G)$. Тогда ограничения этих функций на орбиты общего положения образуют линейное пространство размерности $\frac{1}{2}(\dim G - \text{rank } G)$, в котором можно выбрать линейный базис из функционально независимых на орбите функций. Другими словами, ограничения этих полиномов на орбиты общего положения образуют полный инволютивный набор.

Доказательство гипотезы 2 позволяет редуцировать некоммутативную интегрируемость гамильтоновых систем к коммутативной. А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко доказали эту гипотезу для всех полупростых и редуктивных алгебр Ли. В 2004г. С.Т. Садэтов доказал гипотезу для случая любой конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики.

Доказательство гипотезы 2 позволяет редуцировать некоммутативную интегрируемость гамильтоновых систем к коммутативной. А.С. Мищенко и А.Т. Фоменко доказали эту гипотезу для всех полупростых и редуктивных алгебр Ли. В 2004г. С.Т. Садэтов доказал гипотезу для случая любой конечномерной алгебры Ли над полем нулевой характеристики.

Теорема (Мищенко–Фоменко–Садэтов, [3])

Пусть G — произвольная конечномерная алгебра Ли над полем нулевой характеристики. Тогда на коалгебре G^* существует (и строится алгоритмически) полный коммутативный набор полиномов (т.е. полный набор интегралов в инволюции).

Главное здесь чудо в доказательстве гипотезы 1 Мищенко–Фоменко.

Теорема [2]

Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие и $v = \text{sgrad } H$ — гамильтонова система, вполне интегрируемая в некоммутативном смысле на M (или в окрестности какой-то одной фиксированной поверхности уровня функций, порождающих максимальную линейную алгебру G с условием $\dim G + \text{rank } G = 2n$). Тогда эта же система вполне интегрируема по Лиувиллю, причем коммутирующие интегралы новой алгебры Ли G_0 (т.е. максимальной линейной коммутативной подалгебры на M) функционально (и явными формулами) выражаются через прежние функции алгебры Ли G .

Главное здесь чудо в доказательстве гипотезы 1 Мищенко–Фоменко.

Теорема [2]

Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие и $v = \text{sgrad } H$ — гамильтонова система, вполне интегрируемая в некоммутативном смысле на M (или в окрестности какой-то одной фиксированной поверхности уровня функций, порождающих максимальную линейную алгебру G с условием $\dim G + \text{rank } G = 2n$). Тогда эта же система вполне интегрируема по Лиувиллю, причем коммутирующие интегралы новой алгебры Ли G_0 (т.е. максимальной линейной коммутативной подалгебры на M) функционально (и явными формулами) выражаются через прежние функции алгебры Ли G .

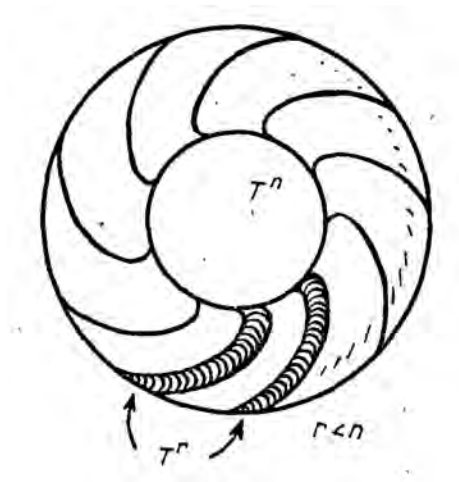
Чудо

Некоммутативная интегрируемость эквивалентна коммутативной.

Теорема Фоменко–Мищенко–Садэтова имеет геометрическую интерпретацию. Если исходная гамильтонова система допускает максимальную линейную некоммутативную алгебру G , то траектории системы определяют условно периодическое движение на r -мерных торах $\mathbb{T}^r$, где $r = \dim M - \dim G$. Если же система, кроме того, допускает максимальную коммутативную алгебру интегралов G_0 , то эти же интегральные траектории укладываются и на торы Лиувилля размерности n . Следовательно, в этом случае маломерные торы $\mathbb{T}^r$ можно естественно организовать в «большие» торы Лиувилля $\mathbb{T}^n$.

Геометрический смысл теоремы Фоменко–Мищенко–Садэтова

Так как торы $\mathbb{T}^n$ расслоены на маломерные инвариантные торы $\mathbb{T}^r$, траектории системы не задают всюду плотной (иррациональной) обмотки торов $\mathbb{T}^n$.



Покажем явный вид интегралов гамильтоновой системы на полупростых алгебрах Ли. Итак, пусть G — полупростая алгебра Ли. Она канонически отождествляется с дуальным пространством G^* через невырожденное $\mathfrak{G}$ -инвариантное скалярное произведение Киллинга. Через IG обозначим кольцо инвариантов алгебры G . Функция $f(X)$ на G называется инвариантом алгебры G , если $f(X) = f(\text{Ad}_g X)$ для любого $g \in \mathfrak{G}$. Нас интересуют полиномиальные инварианты полупростых алгебр, поэтому будем считать, что IG обозначает кольцо инвариантных полиномов на G .

Покажем явный вид интегралов гамильтоновой системы на полупростых алгебрах Ли. Итак, пусть G — полупростая алгебра Ли. Она канонически отождествляется с дуальным пространством G^* через невырожденное $\mathfrak{G}$ -инвариантное скалярное произведение Киллинга. Через IG обозначим кольцо инвариантов алгебры G . Функция $f(X)$ на G называется инвариантом алгебры G , если $f(X) = f(\text{Ad}_g X)$ для любого $g \in \mathfrak{G}$. Нас интересуют полиномиальные инварианты полупростых алгебр, поэтому будем считать, что IG обозначает кольцо инвариантных полиномов на G .

Итак, пусть $P_1(X), \dots, P_g(X)$ — инвариантные однородные полиномы, являющиеся образующими в кольце IG .

- Рассматриваем сдвиг аргумента $X \rightarrow X + \lambda a$, т.е. вычисляем функции $P_i(X + \lambda a)$.

Покажем явный вид интегралов гамильтоновой системы на полупростых алгебрах Ли. Итак, пусть G — полупростая алгебра Ли. Она канонически отождествляется с дуальным пространством G^* через невырожденное $\mathfrak{G}$ -инвариантное скалярное произведение Киллинга. Через IG обозначим кольцо инвариантов алгебры G . Функция $f(X)$ на G называется инвариантом алгебры G , если $f(X) = f(\operatorname{Ad}_g X)$ для любого $g \in \mathfrak{G}$. Нас интересуют полиномиальные инварианты полупростых алгебр, поэтому будем считать, что IG обозначает кольцо инвариантных полиномов на G .

Итак, пусть $P_1(X), \dots, P_g(X)$ — инвариантные однородные полиномы, являющиеся образующими в кольце IG .

- Рассматриваем сдвиг аргумента $X \rightarrow X + \lambda a$, т.е. вычисляем функции $P_i(X + \lambda a)$.
- Разлагаем получившиеся полиномы по степеням параметра λ , получаем $P_i(X + \lambda a) = \sum_j Q_{ij}(X, a) \lambda^j$.

Покажем явный вид интегралов гамильтоновой системы на полупростых алгебрах Ли. Итак, пусть G — полупростая алгебра Ли. Она канонически отождествляется с дуальным пространством G^* через невырожденное $\mathfrak{G}$ -инвариантное скалярное произведение Киллинга. Через IG обозначим кольцо инвариантов алгебры G . Функция $f(X)$ на G называется инвариантом алгебры G , если $f(X) = f(\text{Ad}_g X)$ для любого $g \in \mathfrak{G}$. Нас интересуют полиномиальные инварианты полупростых алгебр, поэтому будем считать, что IG обозначает кольцо инвариантных полиномов на G .

Итак, пусть $P_1(X), \dots, P_g(X)$ — инвариантные однородные полиномы, являющиеся образующими в кольце IG .

- Рассматриваем сдвиг аргумента $X \rightarrow X + \lambda a$, т.е. вычисляем функции $P_i(X + \lambda a)$.
- Разлагаем получившиеся полиномы по степеням параметра λ , получаем $P_i(X + \lambda a) = \sum_j Q_{ij}(X, a) \lambda^j$.
- Фиксируя a (элемент общего положения), получаем набор функций $Q_{ij}(X, a)$ на орбитах алгебры G .

Покажем явный вид интегралов гамильтоновой системы на полупростых алгебрах Ли. Итак, пусть G — полупростая алгебра Ли. Она канонически отождествляется с дуальным пространством G^* через невырожденное $\mathfrak{G}$ -инвариантное скалярное произведение Киллинга. Через IG обозначим кольцо инвариантов алгебры G . Функция $f(X)$ на G называется инвариантом алгебры G , если $f(X) = f(\text{Ad}_g X)$ для любого $g \in \mathfrak{G}$. Нас интересуют полиномиальные инварианты полупростых алгебр, поэтому будем считать, что IG обозначает кольцо инвариантных полиномов на G .

Итак, пусть $P_1(X), \dots, P_g(X)$ — инвариантные однородные полиномы, являющиеся образующими в кольце IG .

- Рассматриваем сдвиг аргумента $X \rightarrow X + \lambda a$, т.е. вычисляем функции $P_i(X + \lambda a)$.
- Разлагаем получившиеся полиномы по степеням параметра λ , получаем $P_i(X + \lambda a) = \sum_j Q_{ij}(X, a) \lambda^j$.
- Фиксируя a (элемент общего положения), получаем набор функций $Q_{ij}(X, a)$ на орбитах алгебры G .
- Они образуют коммутативную алгебру Ли размерности $\frac{1}{2} \dim \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ — орбита общего положения.

При этом набор полиномов $Q_{ij}(X, a)$ является избыточным. После ограничения на орбиты $\mathcal{O}$ некоторые из них становятся зависимыми. Тем не менее, из них можно выбрать ровно $\frac{1}{2} \dim \mathcal{O}$ независимых полиномов, коммутирующих относительно канонической скобки Пуассона.

11. *Фракталы.*

Введем основное определение.

Определение (по Мандельброту)

Фрактал — это множество, хаусдорфова размерность которого строго больше его топологической размерности.

Основные виды фракталов:

- 1 Геометрически рекурсивные;
- 2 Итерационные при помощи многочлена или голоморфной функции на плоскости;

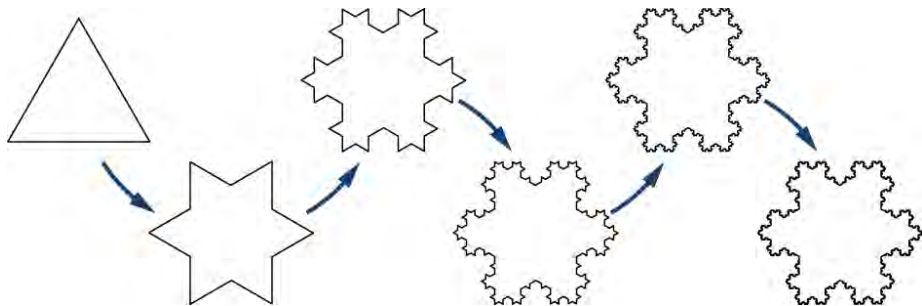


Рис.: Геометрический фрактал. Снежинка Коха.

Размерность Хаусдорфа $= \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26 \dots$

Что происходит? Взяли треугольник, к его сторонам приклеили треугольники поменьше, процесс повторяем.

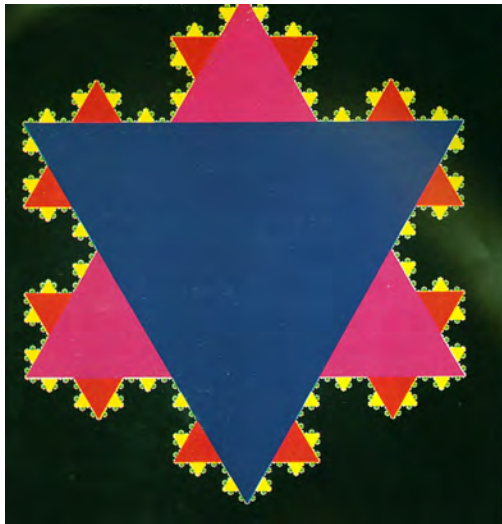


Рис.: Снежинка Коха.

Следуя определению Мандельброта, мы уже ранее сталкивались с фракталами. Так, канторово множество является фракталом.

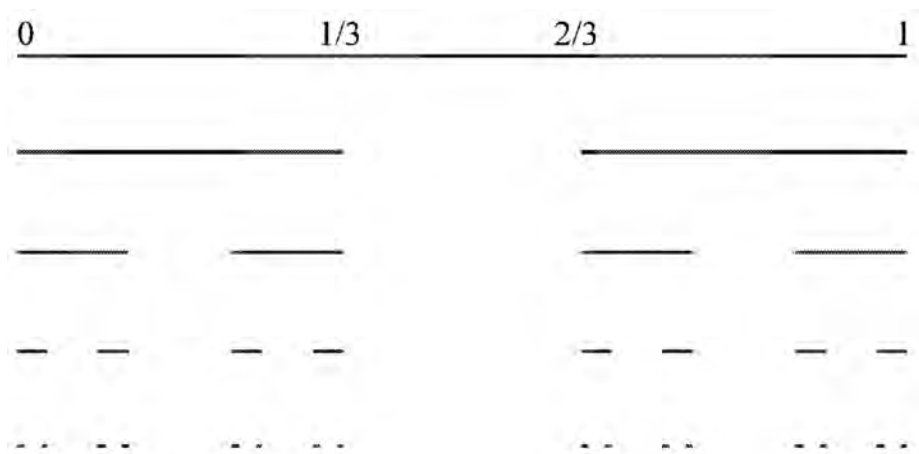


Рис.: Размерность Хаусдорфа равна $\frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63 \dots$. Топологическая размерность $= 0$.

Ковёр Серпинского тоже фрактал.

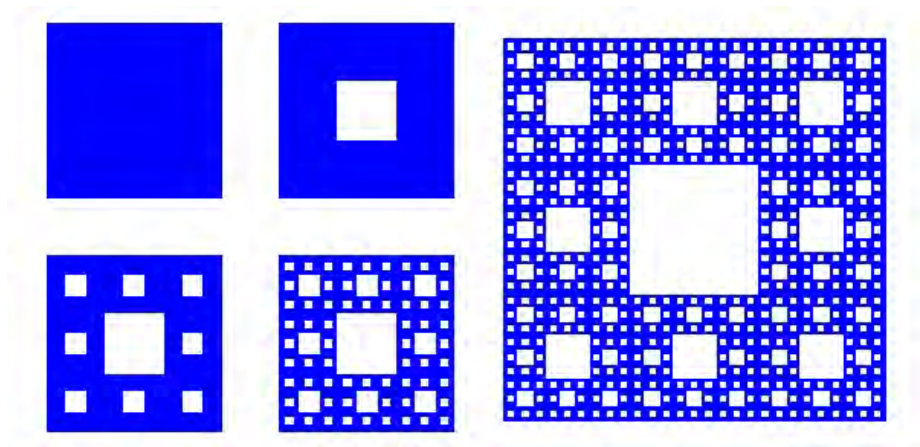


Рис.: Двумерный аналог канторова множества. Хаусдорфова размерность = $\frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.89 \dots$ Топологическая размерность = 1.

Перейдем к итерационным фракталам.

Определение

Пусть $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — голоморфная функция. *Орбитой точки* $z_0 \in \mathbb{C}$ называется множество

$$\{z_0, f(z_0), f^2(z_0), \dots, f^n(z_0), \dots\}.$$

Определение

Предельным множеством $\omega(z_0)$ *точки* z_0 называется множество

$$\omega(z_0) := \{w \in \mathbb{C} \mid \exists n_k \rightarrow \infty : f^{n_k}(z_0) \rightarrow w\}.$$

Определение

Аттрактор (притягивающее множество) $A \subset \mathbb{C}$ — это компактное инвариантное ($f(A) = A$) множество, которое *притягивает* траектории из некоторой открытой окрестности $U \supset A$:

$$\forall z \in U : \quad \text{dist}(f^n(z), A) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Множество всех точек, притягивающихся к A , называется *бассейном аттрактора*.

Пример

Для $f(z) = z^2$ точка 0 является аттрактором. Ее бассейн — открытый единичный круг $|z| < 1$.

Определение

Репеллер (отталкивающее множество) $R \subset \mathbb{C}$ — это компактное инвариантное ($f(R) = R$) множество, которое *отталкивает* траектории: любая точка, достаточно близкая к R , но не лежащая в нем, покидает его окрестность при итерациях.

Пример

Для $f(z) = z^2$ единичная окружность $|z| = 1$ является репеллером.

Определение

Множество Фату $\mathcal{F}(f)$ — это множество точек, в окрестности которых итерация f^n образует нормальное семейство (предсказуемое, гладкое поведение). Это объединение бассейнов аттракторов.

Определение

Множество Жюлиа $\mathcal{J}(f)$ — дополнение:

$$\mathcal{J}(f) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}(f)$$

$\mathcal{J}(f)$ является границей между бассейнами аттракторов и служит репеллером для f .

Для полиномов степени ≥ 2 множество Жюлиа, как правило, является фракталом.

Для любой точки $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ и любой её окрестности U существует $w \in U \cap \mathcal{J}(f)$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что:

- f^n является **конформным отображением** некоторой меньшей окрестности $V \subset U$;
- Образ $f^n(V)$ является окрестностью $W \subset \mathcal{J}(f)$;
- При достаточно большом n окрестность W покрывает сколь угодно большую часть $\mathcal{J}(f)$.

Следствие

Любой фрагмент $\mathcal{J}(f)$ содержит структуры, напоминающие целое.
Самоподобие возникает из-за бесконечного ветвления прообразов f^{-n} .

Чудо

Фракталы обладают локальной самоповторяемостью.

Зависимость фрактала от выбора функции

Функция	Степень	Симметрия	Особенность
$z^2 + c$	2	2-кратная	$\dim_H = 2$
$z^3 + c$	3	3-кратная	другая размерность
$z^2 + z + c$	2	нет	асимметричные узоры
$e^z + c$	∞	сдвиговая	бесконечнозвёздная структура

Как фракталы можно визуализировать? В качестве примера рассмотрим фрактал Мандельброта, задаваемый при помощи полинома $z^2 + c$.

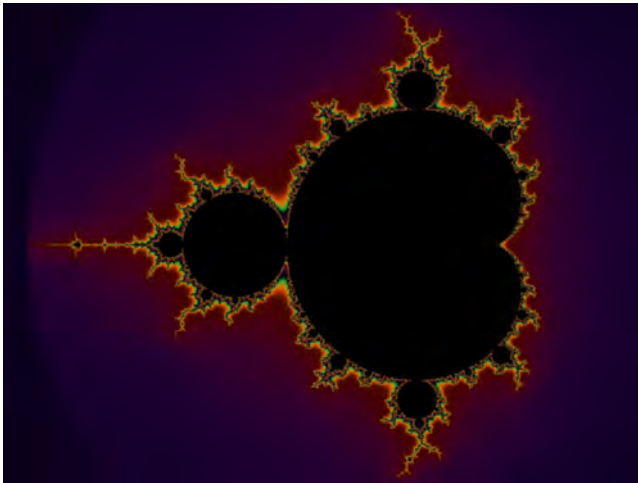


Рис.: Множество Б. Мандельброта, задаваемое полиномом $z^2 + c$. Хаусдорфова размерность границы = 2, а топологическая = 1.

Вся эта картина находится в круге радиуса 2. Попытайтесь самостоятельно найти картины в множестве Мандельброта из следующих слайдов можно на сайте <https://mandel.gart.nz/>.

Как строится картинка? Точки комплексной плоскости закрашиваются в зависимости от того, сколько итераций требуется последовательности $z_{n+1} = z_n^2 + c$, чтобы покинуть круг радиуса 2.

Точки, которые вылетают за одинаковое число шагов, получают один цвет. Точки, которые вовсе не вылетают, закрашиваются черным.

Так, например, выставив на сайте число итераций $N = 50$, можно будет обнаружить громадное число мест, закрашенных в черное, то есть достаточно много точек, которые не вылетают из круга за 50 итераций.



Рис.: Участок Starfish. Прорисовка (число итераций) 50

С увеличением числа N черных точек будет меньше, картинка становится красивее.

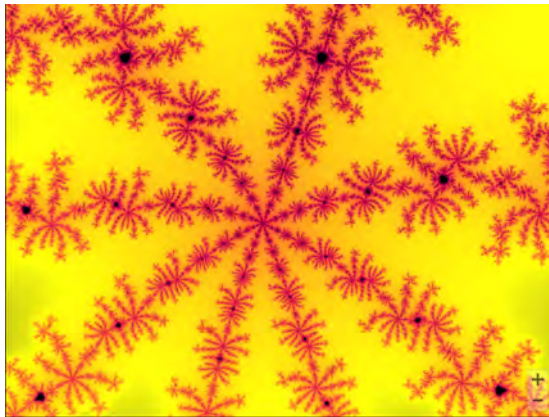
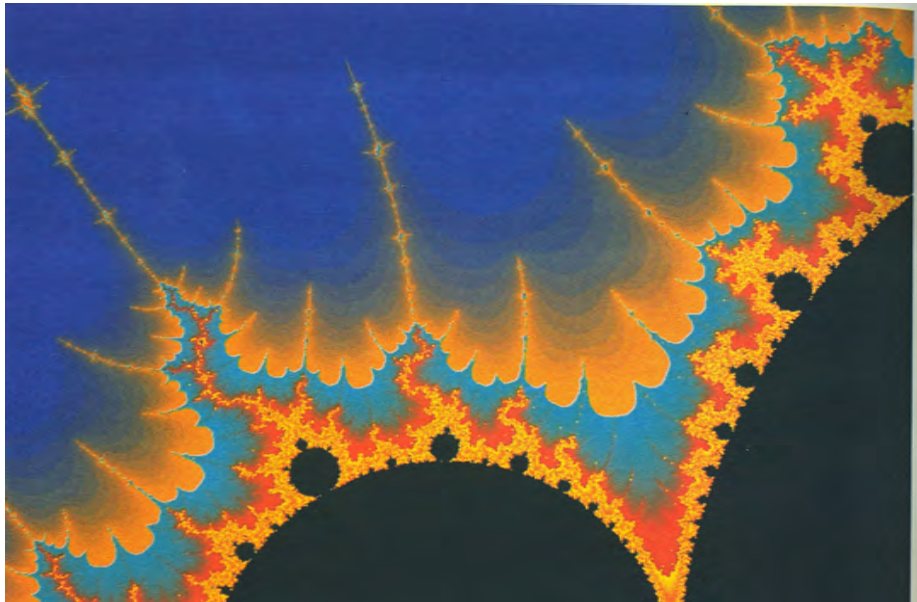
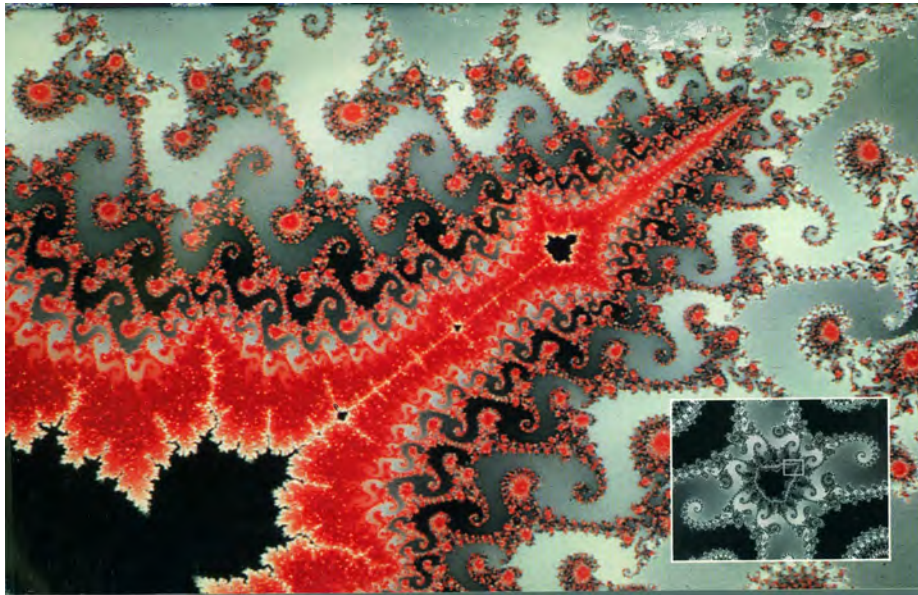


Рис.: Участок Starfish. Прорисовка (число итераций) 150

Дальше посмотрим на разные участки околोगраничного пространства в разных масштабах.





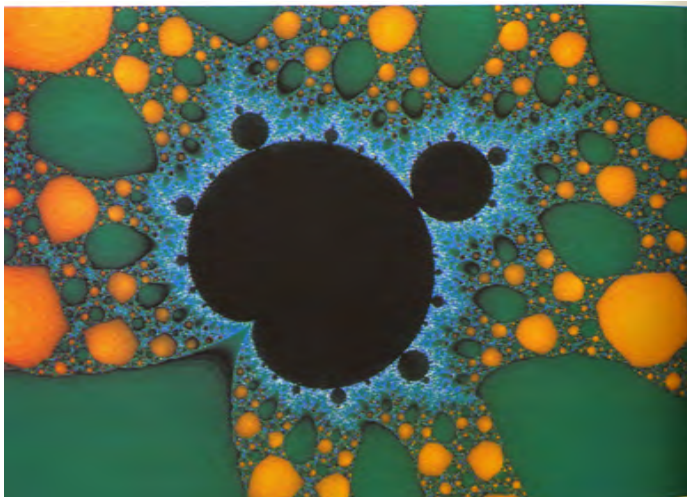
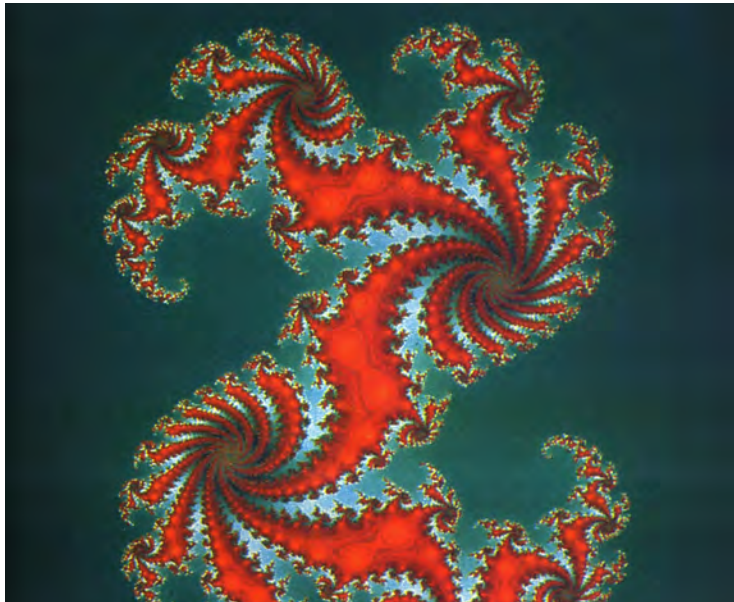
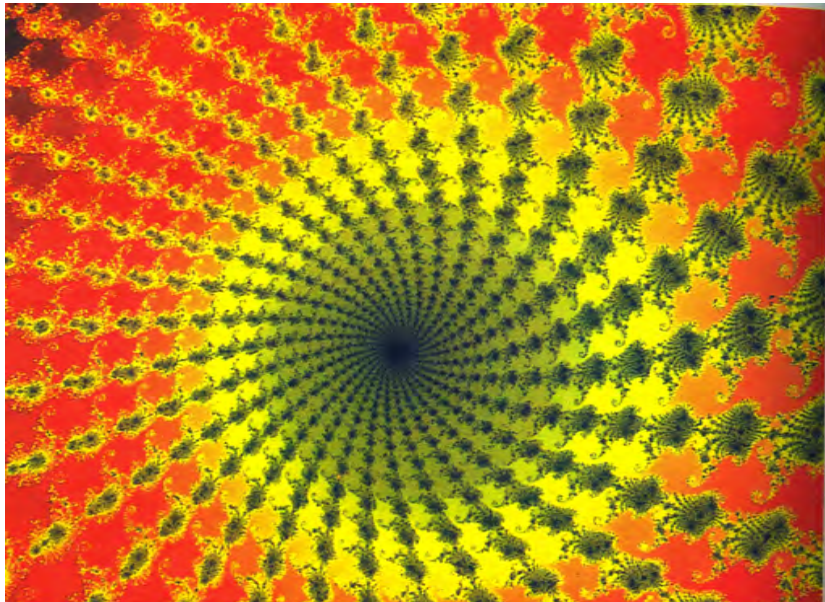


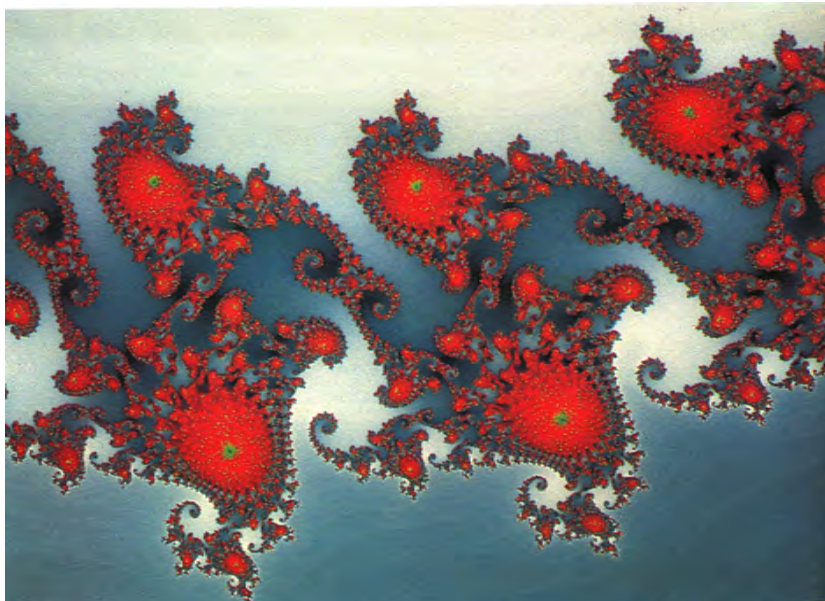
Рис.: Область множества Мандельброта, где совокупность точек, вылетающих за круг, образует пузыри

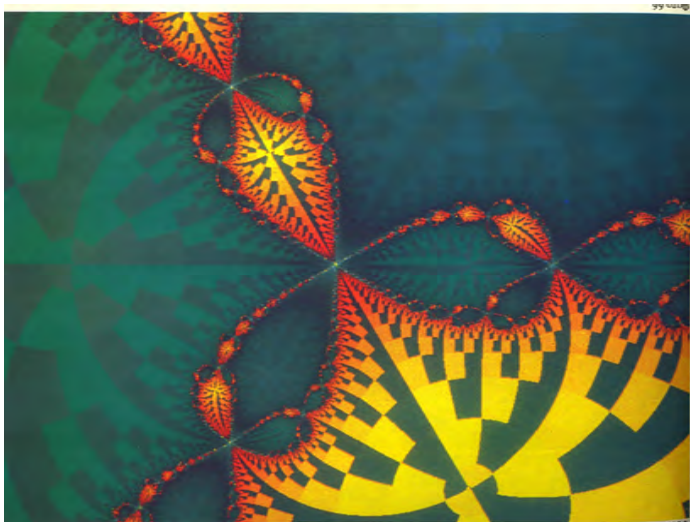


Рис.: Спиралевидный участок с пузырями









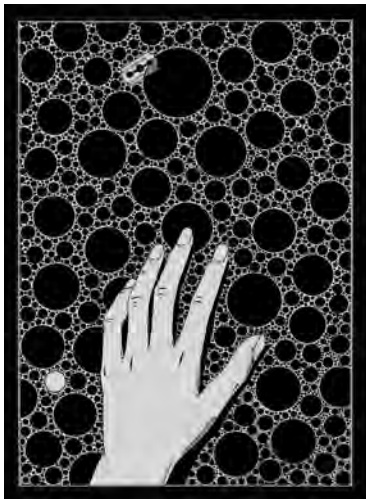


Рис.: Фантазия на темы фракталов, аналогов канторовых множеств и не целой хаусдорфовой размерности. Автор: А.Т. Фоменко.



Рис.: Картина «Топологический зоопарк», А.Т. Фоменко.

- [1] Владимиров В.С., Волович Я.И., “О нелинейном уравнении динамики в теории p -адической струны”, ТМФ, 138:3 (2004), 355–368; Theoret. and Math. Phys., 138:3 (2004), 297–309.
- [2] Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. Вып. XX. — М.: Изд-во Моск. ун-та. 1981. С. 5—54.
- [3] Садэтов С.Т. Доказательство гипотезы Мищенко–Фоменко // Доклады РАН. 2004. Т.397. №6. С. 751—754.
- [4] Фоменко А.Т. «Симплектическая геометрия. Методы и приложения». Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: ЛЕНАНД, 2022г. — 408с.
- [5] *Liouville Foliations of Topological Billiards with Slipping* / Fomenko A.T., Vedyushkina V.V., Zav'yalov V.N. // Russian Journal of Mathematical Physics. - 2021. - N. 28 - С. 37-55.
- [6] Л.Э.Я. Брауэр (1910), "О структуре совершенных множеств точек"
- [7] Robert, A. M. "A Course in p -adic Analysis"(Springer, GTM 198).