



Ирина Сергеевна
Кузнецова

1. Пример Адамса устойчивой мыльной пленки, но ретрагирующей на границу.

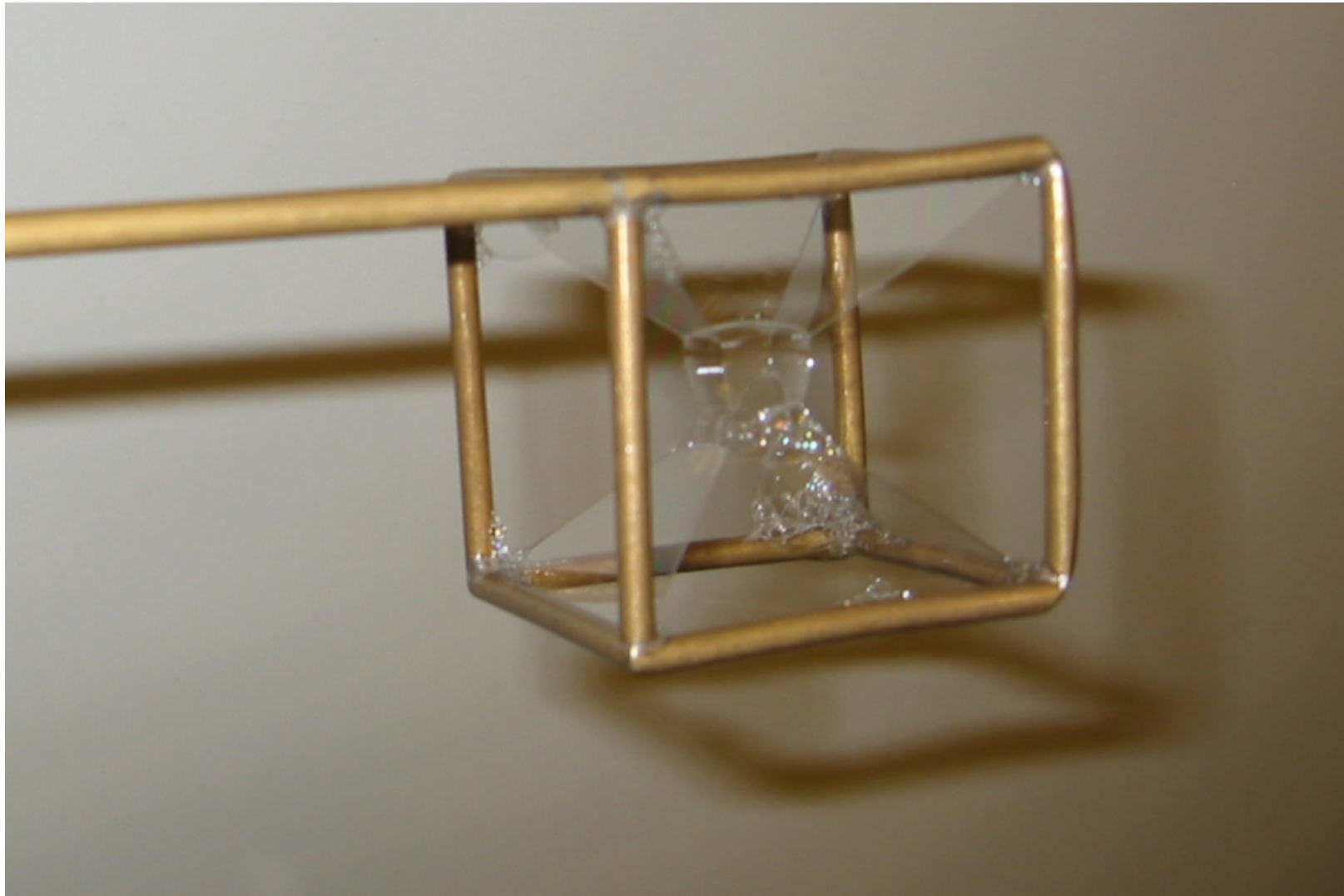
Минимальные поверхности

Определение

Минимальные поверхности — это поверхности локально наименьшей площади.

Первое из «чудес» связано с минимальными поверхностями. Их самым наглядным примером являются мыльные пузыри (они стремятся принять форму сферы) или мыльные пленки, которые натягиваются на проволочный каркас, если опустить его в мыльную воду.

Минимальные поверхности

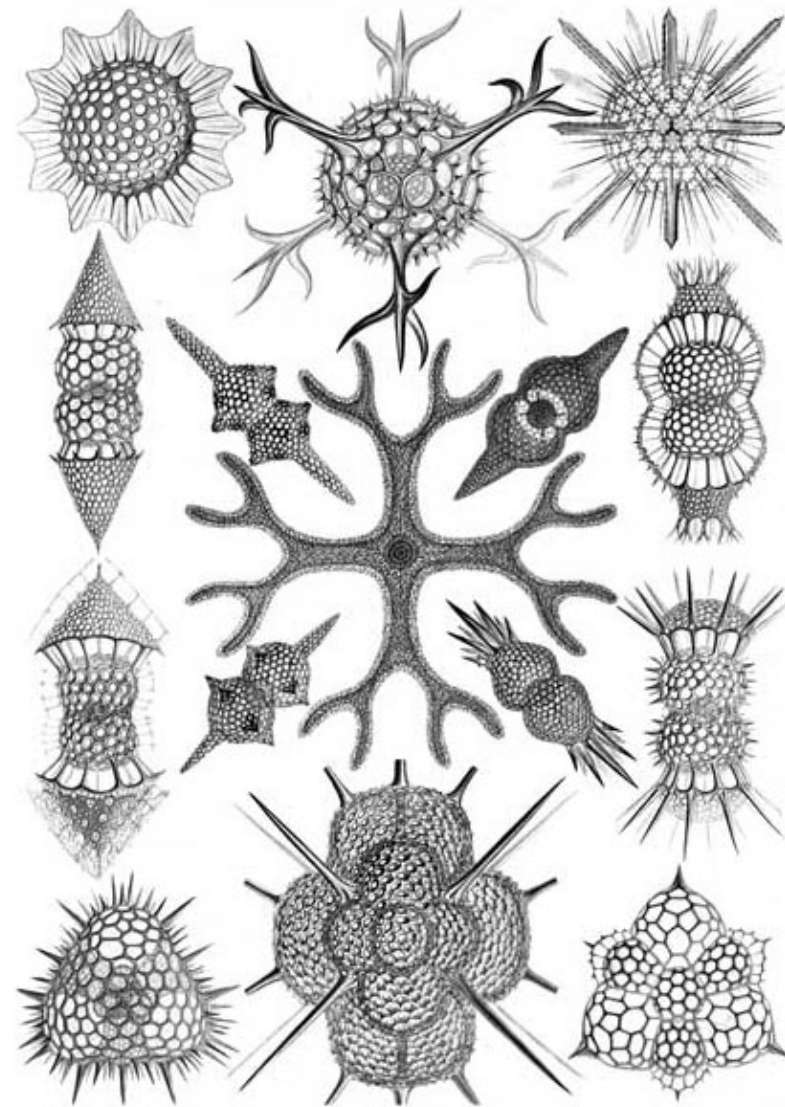
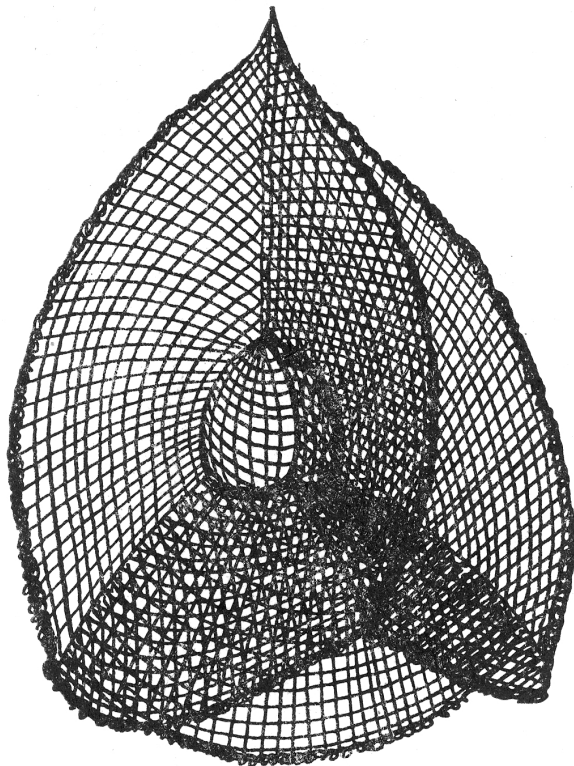
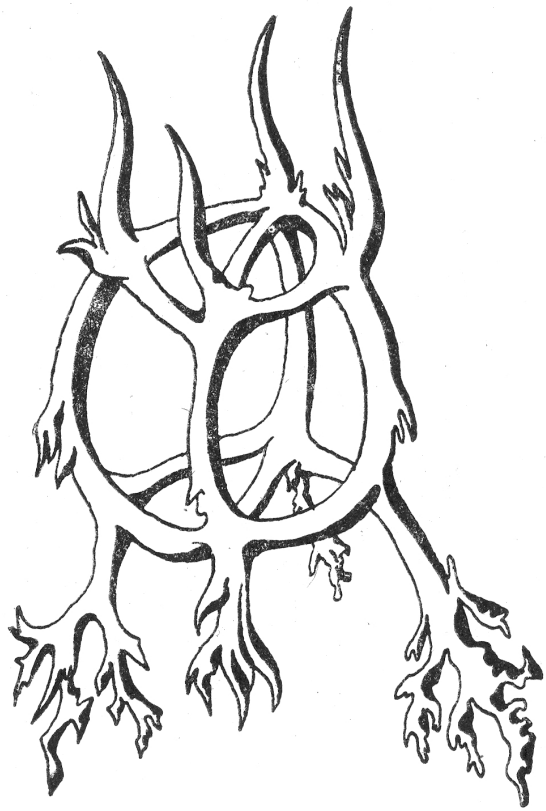


Минимальные поверхности

Минимальные поверхности встречаются и в природе. Например, скелеты радиолярий (микроскопических морских животных) представляют собой минимальные поверхности.

Мягкое тело живой радиолярии наполнено жидкими пузырьками. Под действием поверхностного натяжения они плотно прижимаются друг к другу. Границы между этими пузырьками образуют минимальные поверхности. Затем радиолярия впитывает из морской воды соли и минералы. Они оседают и застывают на границах между пузырьками. Когда мягкие ткани отмирают, остаётся прочный ажурный каркас. Он изображает структуру особенностей этой минимальной поверхности.

Минимальные поверхности



G-поверхности

Определение

Замкнутое k -мерное множество $X \subset \mathbb{R}^n$ является G -поверхностью, заклеивающей замкнутое $(k - 1)$ -мерное множество A для данной абелевой группы коэффициентов G , если A содержится в X и гомоморфизм $i_* : H_{k-1}(A, G) \rightarrow H_{k-1}(X, G)$, индуцированный вложением $i : A \rightarrow X$, тождественно равен нулю.

Другими словами, все $(k - 1)$ -мерные циклы, содержащиеся в границе A , должны «раствориться», аннулироваться в поверхности X . В этом смысле A является гомологической границей X .

G-поверхности

При рассмотрении минимальных поверхностей с алгебраической точки зрения возникает предположение, что любую пленку с «достаточно хорошей» границей можно представить в виде G -поверхности для некоторой абелевой группы G .

Пример Адамса

Оказывается, это не так.

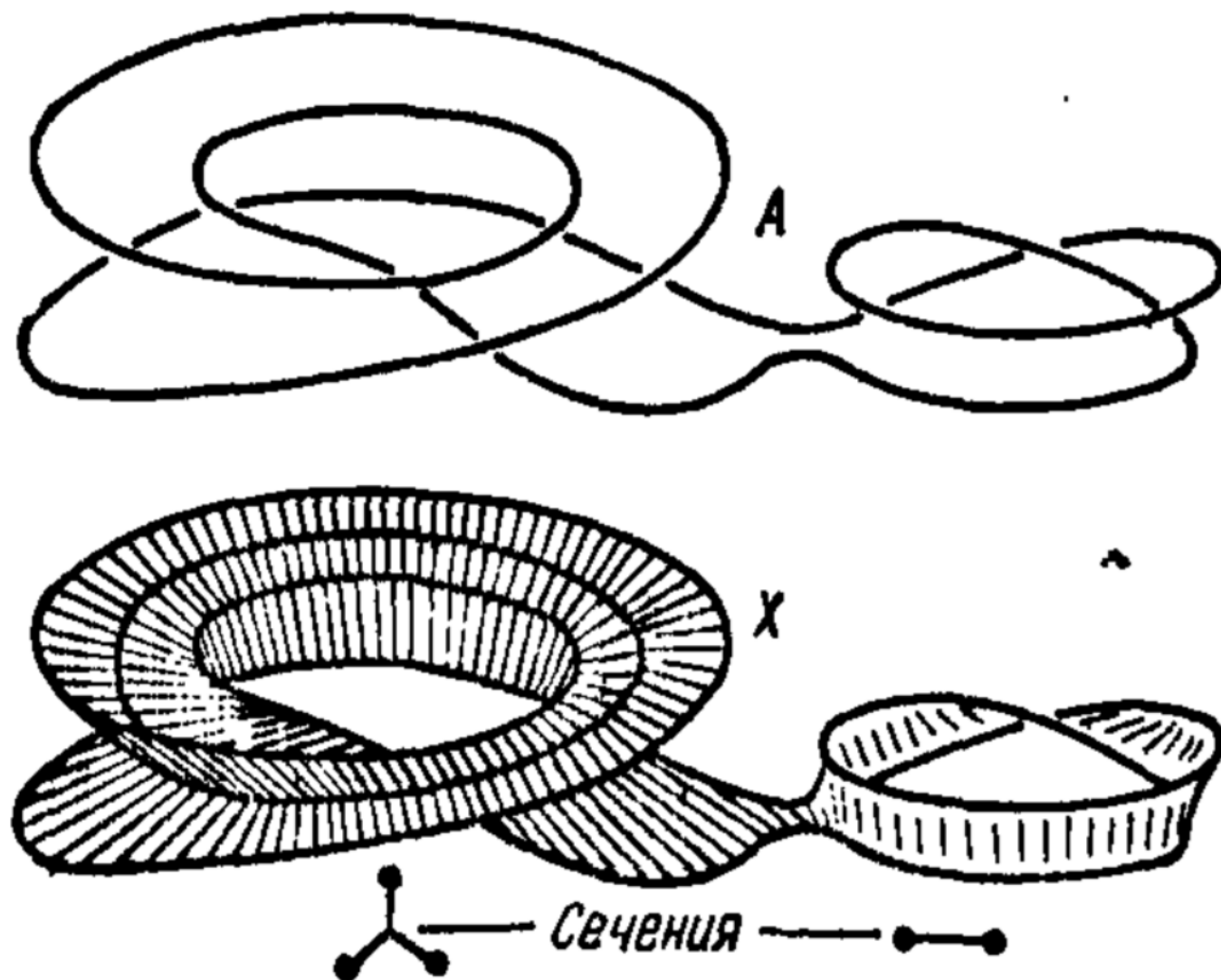
Дж. Ф. Адамс привел пример минимальной поверхности, которая не представляется в таком виде.

Джон Фрэнк Адамс — английский математик, один из основателей теории гомотопий.



Пример Адамса

Это мыльная пленка X , натянутая на контур A и представляющая собой соединенные «двойную» и «тройную» ленты Мебиуса (можно брать произвольные взаимно простые p и q). То есть граница X - это окружность, вложенная в R^3 без самопересечений.



Пример Адамса

Казалось бы, вполне «хорошая» поверхность. Почему же она не является G -поверхностью? Дело в том, что, хотя эта пленка является устойчивой, она ретрагирует на свою границу.

Определение

Подпространство A пространства X называется **ретрактом** X , если существует непрерывное отображение $f : X \rightarrow A$, определенное на всем X и оставляющее на месте все точки из A .

Теорема Хопфа

Аналитически это можно
доказать используя
теорему Хопфа.

Хайнц Хопф — немецкий и
швейцарский математик.



Теорема Хопфа

4. **Случай существования ретракции пространства на подпространство, гомеоморфное сфере.**

Докажем теорему о ретракции, которая будет нужна при изучении вариационных задач. Рассмотрим в качестве группы коэффициентов теории клеточных гомологий абелеву группу (по сложению) $U = \mathbf{R}^1(\text{mod } 1)$, т. е. окружность.

Теорема 3 (Хопф). Пусть задано вложение i сферы S^{n-1} в конечный n -мерный клеточный комплекс K . Пусть гомоморфизм $i_* : H_{n-1}(S^{n-1}, U) \rightarrow H_{n-1}(K, U)$, индуцированный этим вложением, является мономорфизмом. Тогда сфера $S_0^{n-1} = iS^{n-1}$ является ретрактом K , т. е. существует непрерывное отображение $f : K \rightarrow S_0^{n-1}$, тождественное на сфере S_0^{n-1} .

Доказательство. Приводимый нами конструктивный вариант доказательства, необходимый для явного построения

Пример Адамса

Существует теорема, утверждающая, что если пленка представляет собой поверхность, то край этой пленки не является ее ретрактом. Однако в приведенном примере мыльная пленка содержит целую окружность, состоящую из особых точек кратности 3. Значит, эта пленка не является многообразием, и потому может ретрагироваться на свою границу.

Геометрически это показала Татьяна Николаевна Фоменко.

Пример Адамса

$\varphi_t: X \rightarrow X$ такая, что φ_0 — тождественное отображение X на себя, а φ_1 отображает X в A , причем для всех t отображение φ_t оставляет A неподвижным. Так как композиция $A \xrightarrow{i} X \xrightarrow{\varphi_1} A$ является тождественным отображением, а композиция $X \xrightarrow{\varphi_1} A \xrightarrow{i} X$ гомотопна тождественному отображению, то X и A гомотопически эквивалентны. В нашем случае A — окруж-

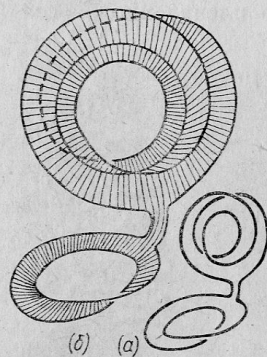


Рис. 49

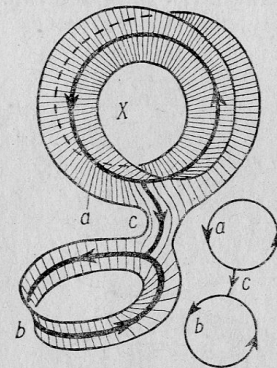


Рис. 50(a)

ность, X эквивалентно букету двух окружностей, т. е. A и X гомотопически не эквивалентны, т. е. A не является деформационным ретрактом.

Существование ретракции было получено из алгебраических свойств этих комплексов. Полезно наглядно представить, как происходит эта ретракция геометрически. Это построение выполнено Т. Н. Фоменко. Воспользуемся приведенным в гл. 1 гео-

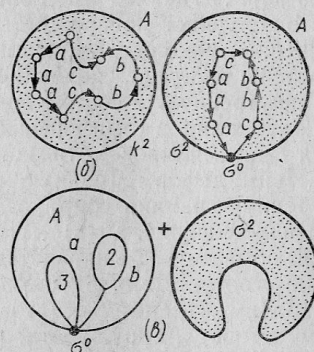


Рис. 50(б), (в)

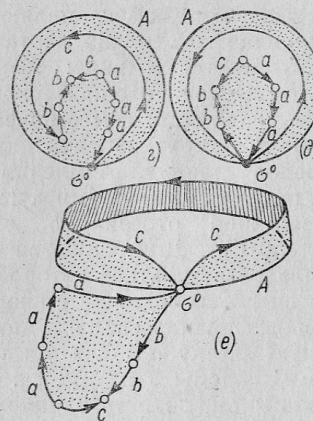


Рис. 50(г)—(е)

Пример Адамса

метрическим доказательством теоремы Хопфа. В нашем случае комплекс X двумерен, и его одномерный остов совпадает с букетом двух окружностей, одна из которых является осью обычного листа Мебиуса, а другая — осью тройного листа Мебиуса. В последнем случае окружность состоит из сингулярных точек мыльной пленки. Поступая по схеме § 2, гл. 1, рассмотрим клеточное разбиение X . Ясно, что $X = \sigma^0 \cup \sigma_1^1 \cup \sigma_2^1 \cup \sigma^2$, где σ^2 — единственная двумерная клетка. Как приклеивается она к одномерному остову? Разрежем мыльную пленку вдоль осей b и a

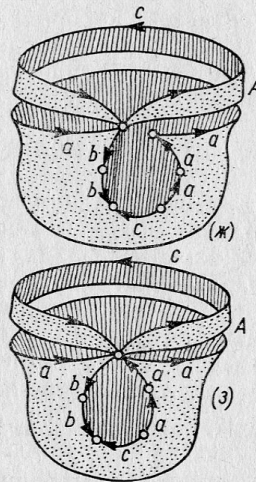


Рис. 50(ж), (з)

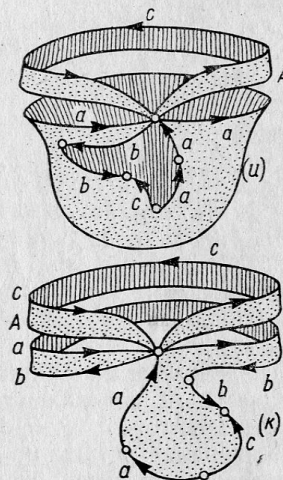
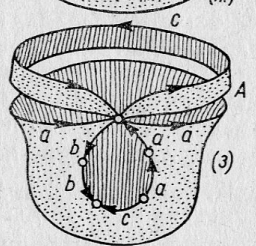


Рис. 50(и), (к)

соответственно двойного и тройного листов Мебиуса и вдоль короткого отрезка c , являющегося осью перепонки-мостика, соединяющего эти два листа Мебиуса (рис. 50(а)). Пленка X представляется в виде: $X = \sigma^0 \cup a \cup b \cup c \cup k^2$, где k^2 — кольцо. После разреза по одномерному остову пленка превращается в плоскую область, гомеоморфную обычному кольцу k^2 , граница которого состоит из двух окружностей: внешней, являющейся исходной границей A пленки X , и внутренней, представленной в виде объединения семи дуг: трех экземпляров отрезка a , двух экземпляров отрезка b и двух экземпляров отрезка c (рис. 50(б)). Для удобства осуществим деформационную ретракцию, в результате которой внутренняя граница соприкоснется в одной своей точке с внешней границей (рис. 50(в)). Получившаяся полная граница двумерной области ограничивает двумерную клетку σ^2 . Для установления соответствия с обозначениями теоремы 3 из § 2 гл. 1 обозначим A через S_0^1 (это выделенная окружность в одномерном остове), окружность a — через S_1^1 и окружность b — через S_2^1 . Тогда коэффициенты

Пример Адамса

инцидентности клетки σ^2 с этими окружностями таковы: $[\sigma_2 : A] = 1$, $[\sigma^2 : a] = 3$, $[\sigma^2 : b] = 2$. Следуя конструкции § 2 гл. 1, нужно построить отображение g одномерного остова пленки X на окружность A . Отообразим A на себя тождественно. Самое главное — определить g на окружностях a и b . Нужно подобрать такие целые числа m и n , чтобы $m \cdot [\sigma^2 : a] - n \cdot [\sigma^2 : b] = 1$, т. е. $3m - 2n = 1$. Затем следует построить отображение g , которое отообразит a со степенью m на A , а b со степенью n на A .

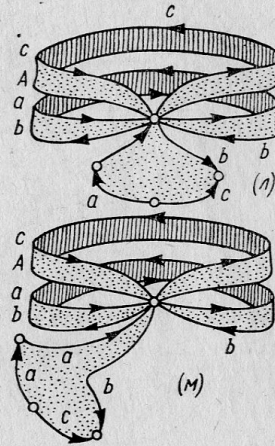


Рис. 50(л), (м)

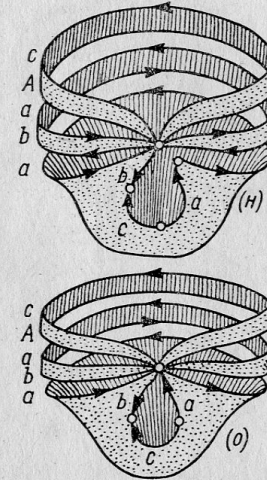


Рис. 50(н), (о)

В нашем случае достаточно положить $m = n = 1$, т. е. можно считать, что a и b отображаются на A гомеоморфно. Согласно теореме 3 (§ 2 гл. 1) это отображение g продолжается до отображения f всей пленки на A , что и требуется. Осталось изобразить это отображение наглядно. Оказывается, после того как мы разрезали пленку по одномерному остову, искомое отображение f реализуется в $\mathbb{R}^3$ как последовательность непрерывных деформаций клетки σ^2 . Начнем с того, что фиксируем A и растянем сторону c так, чтобы она намоталась на A со степенью единица (рис. 50(г)). Но при этом мы не будем отождествлять A и c и прервем операцию, сохранив узкую полосу, ограниченную на рис. 50(д) окружностями A и c . Оставшаяся часть двумерной клетки образует диск, приклеенный к точке σ^0 в получившейся полоске между A и c . Берем ребро a и наматываем его вдоль A так, как показано на рис. 50(е) и рис. 50(ж). Свисающий с точки σ^0 диск обворачивается вокруг A , и в результате получается мешок с границей a , причем в мешке имеется дырка с границей $bbs^{-1}aa$. Это слово выписано при движении против часовой стрелки на гра-

Пример Адамса

нище дырки, степень $+1$ или -1 указывает на ориентацию соответствующего ребра (рис. 50(з)). Продолжаем намотку двумерной клетки. Берем b и также наматываем его вдоль A , действуя так, как показано на рис. 50(и). В результате получается картина, показанная на рис. 50(к), и итогом этой операции является поверхность, изображенная на рис. 50(л). Граница свисающего диска упростилась по сравнению с предыду-

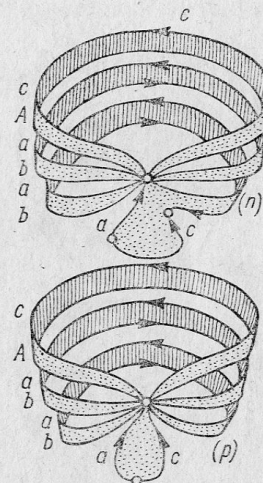


Рис. 50(п), (р)

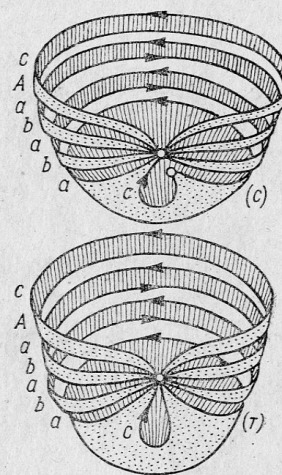


Рис. 50(с), (т)

щим шагом и имеет вид $a^{-1}a^{-1}cb^{-1}$. Берем следующий экземпляр ребра a и наматываем его вдоль A , как показано на рис. 50(м) и 50(н). Итак, мы последовательно чередуем намотку ребер типа a и типа b . Результат см. на рис. 50(о). Мы снова получили мешок с границей a и с дыркой bca . Берем оставшийся экземпляр ребра b (на этот раз он последний) и наматываем его вдоль A как показано на рис. 50(п). В итоге получаем поверхность на рис. 50(р), содержащую свисающий диск с границей $a^{-1}c$. Берем последний экземпляр ребра a и снова повторяем намотку, показанную на рис. 50(с). В результате получаем поверхность на рис. 50(т) с мешком, границей которого является a и который содержит дырку с границей c . На последнем шаге растягиваем сторону c , раздуваем дырку и добиваемся того, что мешок превращается в узкую полосу, обтягивающую A (рис. 50(у)). Построенная нами непрерывная деформация разрезанной пленки X замечательна тем, что теперь пленка состоит из четырех узких полосок, соединенных в одной точке σ^0 и расположенных в пространстве вдоль окружности A , в непосредственной близости от нее. Теперь все ребра

Пример Адамса

a ориентированы в одном направлении относительно A и все ребра b также ориентированы одинаково, в направлении, противоположном направлению ребер a . Два ребра c также ориентированы одинаково (в направлении a). Так как все ребра одного типа ориентированы одинаково, то переходим к заключительному этапу. Стягиваем каждую из четырех полосок на ее ось, среднюю линию, и получаем четыре окружности на

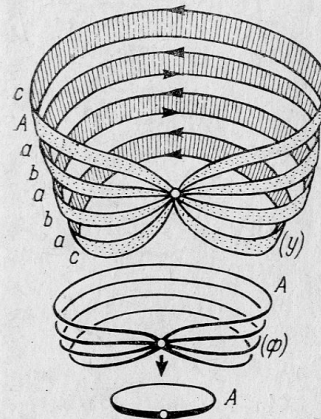


Рис. 50(y), (φ)

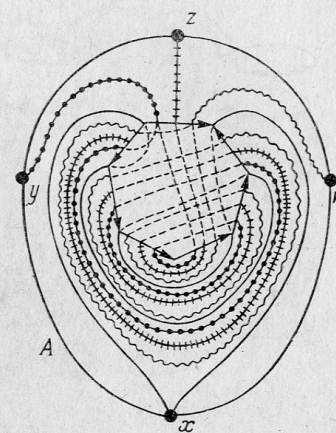


Рис. 50(x)

рис. 50(φ), которые одним и тем же способом отображаем на A . Построенное отображение непрерывно вследствие согласованности всех ребер одного типа на поверхности рис. 50(y). Этим и завершается построение искомой ретракции. Тот же механизм действует и в случае, когда мы рассматриваем сумму не двойного и тройного листов Мебиуса, а сумму p -кратного и q -кратного листов Мебиуса, где числа p и q взаимно-просты. Наглядное изображение ретракции в принципе сохраняется, однако добавляется намотка окружностей a и b со степенями m и n на окружность A , где числа m и n таковы, что $mp - nq = 1$. Эта намотка усложняет геометрическую картину, но не меняет принципа построения ретракции.

В заключение приведем чертеж, показывающий, как распределены на плоской области k^2 (кольцо с границей $A + 3a + 2b$) прообразы точек A . Рассмотрим точку x из A , и пусть f — ретракция X на A . Рассмотрим полный прообраз $f^{-1}(x)$. Он является системой непрерывных дуг в кольце k^2 . На рис. 50(x) выбраны 4 точки x, y, z, w на A , и для каждой из них нарисован полный прообраз. Он состоит, вообще говоря, из нескольких компонент связности. Пунктир показывает склейку траекторий, принадлежащих одному прообразу.

Приведем также второй пример Адамса — минимальную пленку X , стягивающую контур A , показанный на рис. 51(a).

Деформационный ретракт

Заметим, что рассмотренная пленка не является деформационным ретрактом.

Определение

Подмножество A топологического пространства X называется **деформационным ретрактом** пространства X , если существует непрерывное отображение (гомотопия)

$$F : X \times [0, 1] \rightarrow X,$$

удовлетворяющее следующим трем условиям для любых $x \in X$ и $a \in A$:

- ① $F(x, 0) = x$,
- ② $F(x, 1) \in A$,
- ③ $F(a, t) = a \ \forall t \in [0, 1]$.

Пример Адамса

Однако пример устойчивой мыльной пленки, которая деформационно ретрагируется на границу, существует([1]). Он представлен на рисунке справа. Граница также гомеоморфна окружности, однако множество особых точек устроено сложнее.

[1] Фоменко, А. Т. Топологические вариационные задачи / А. Т. Фоменко. — Москва : Изд-во Моск. ун-та, 1984. — 216 с.

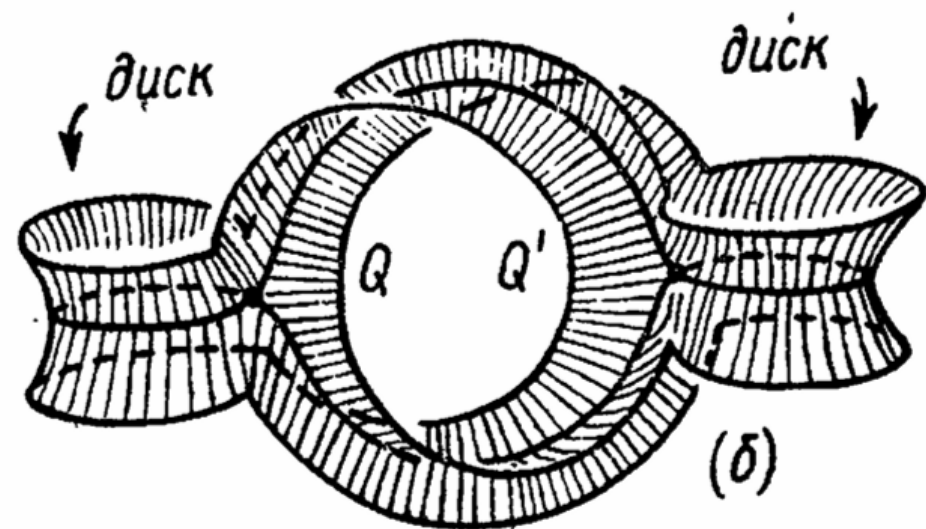
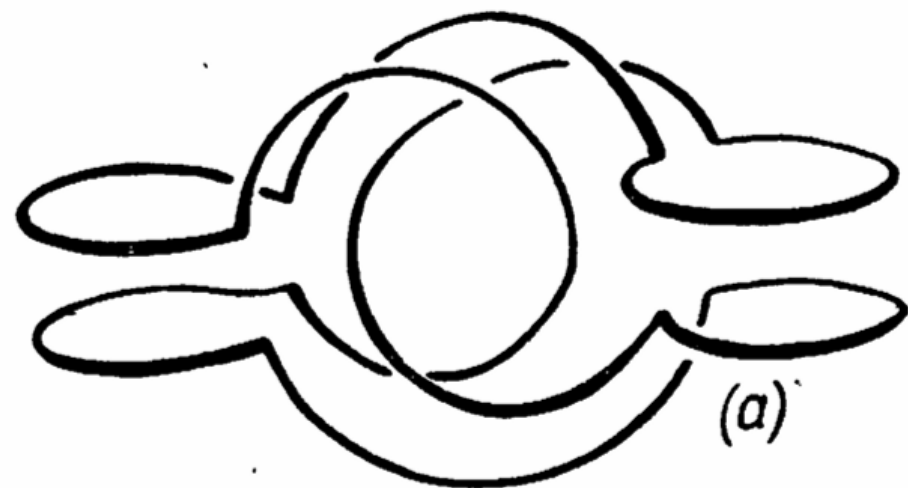


Рис. 51 (а), (б)

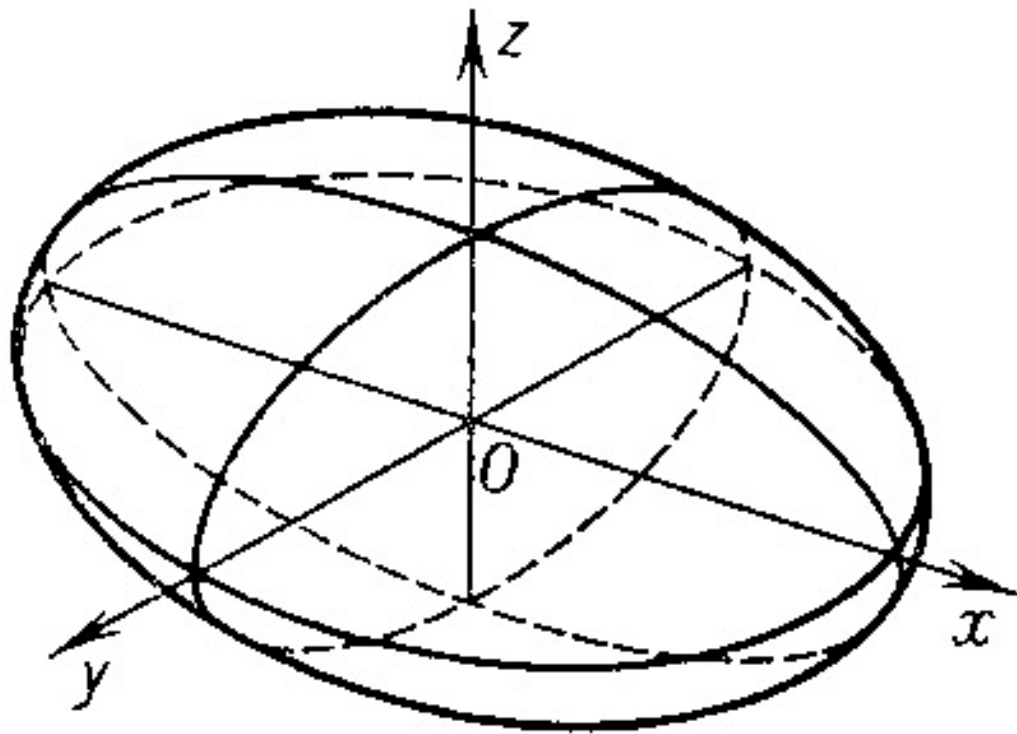
*2. Категория Люстерника-
Шнирельмана и гипотеза
Пуанкаре о трех геодезических.*

Гипотеза Пуанкаре

В 1905 году великий французский математик Анри Пуанкаре (1854-1912) выдвинул гипотезу о том, что на любой гладкой выпуклой поверхности, гомеоморфной сфере, есть хотя бы три замкнутые геодезические.

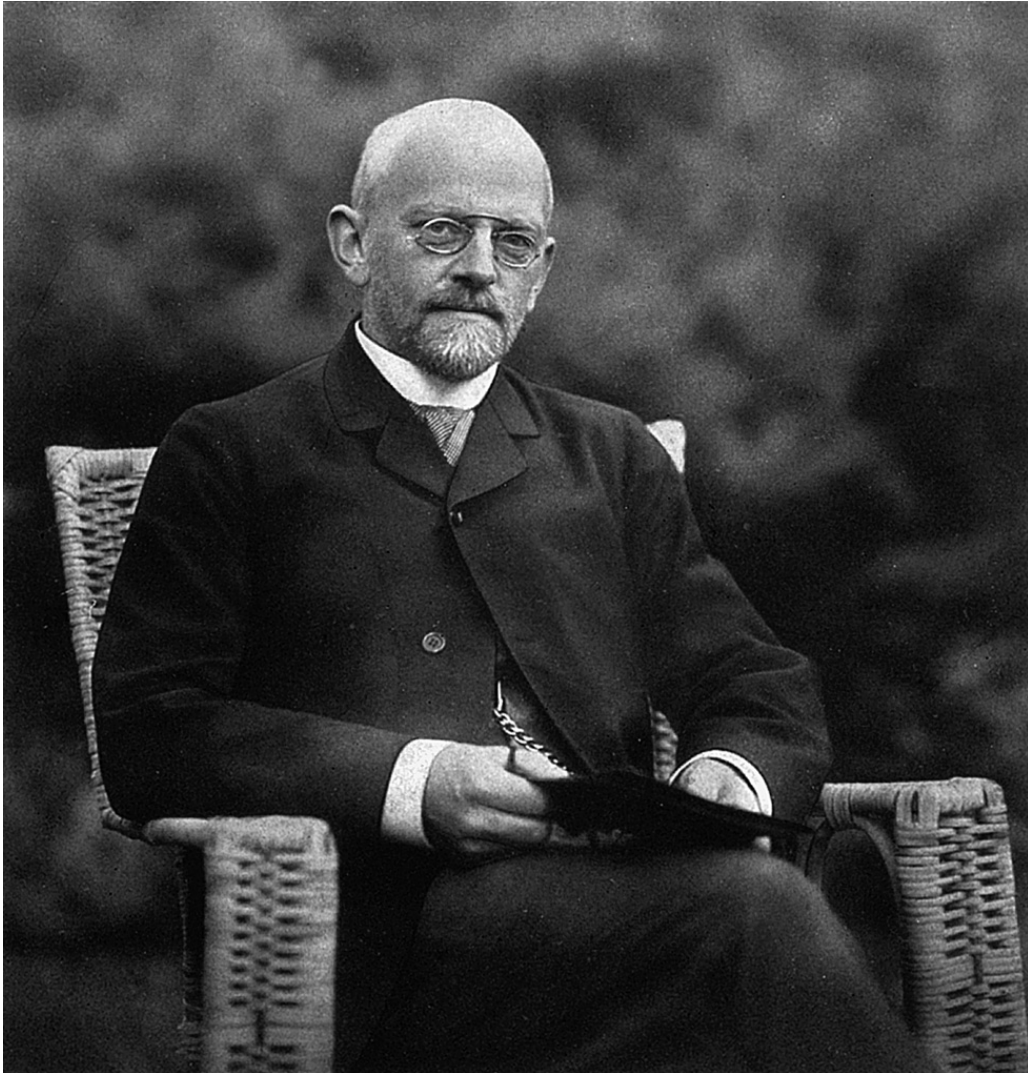


Гипотеза Пуанкаре



Откуда взялось число три в этой гипотезе? Дело в том, что долгое время считалось, что на эллипсоиде, у которого длины всех осей различны, таких геодезических ровно три — это три его «экватора», т. е. три сечения эллипсоида координатными плоскостями.

Гипотеза Пуанкаре



В общем виде эта проблема долго оставалась нерешенной. Занимались ею многие видные ученые. Крупнейший математик XX века Давид Гильберт (1862-1943) писал об этой задаче в своей книге «Наглядная геометрия», созданной в соавторстве с С. Э. Кон-Фоссеном.

Гипотеза Пуанкаре

Ею занимался один из основателей общей топологии Павел Самуилович Урысон (1898-1924).



Павел Самуилович Урысон (1898—1924)

Гипотеза Пуанкаре

В 1930 году гипотеза Пуанкаре, наконец, была доказана. Это сделали советские математики Лазарь Аронович Люстерник (1899-1981) и Лев Генрихович Шнирельман (1905-1938).



Категории Люстерника-Шнирельмана

Для этого они разработали новую теорию топологических методов в вариационных задачах - категории Люстерника-Шнирельмана.

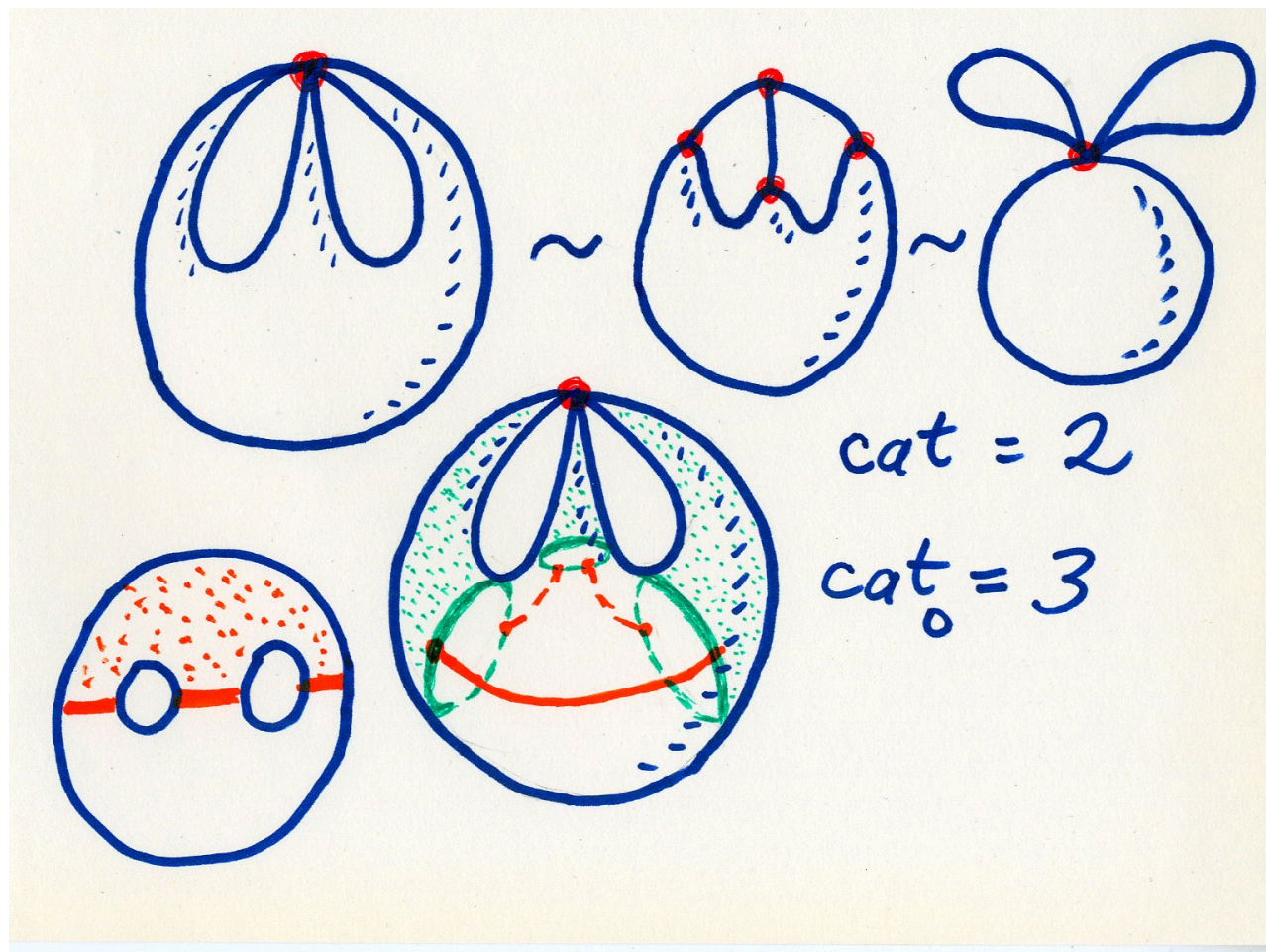
Определение

Пусть X — хаусдорфово топологическое пространство. **Категорией Люстерника-Шнирельмана** пространства X называется минимальное число замкнутых подмножеств X , которыми можно покрыть это пространство, и каждое из которых может быть непрерывно стянуто в точку по X .

Категории Люстерника-Шнирельмана

По легенде изначально был вариант определения категории со стягиваемостью каждого подмножества по себе (обозначают $cat_0 X$). Однако почти сразу стало ясно, что такая величина не является гомотопическим инвариантом.

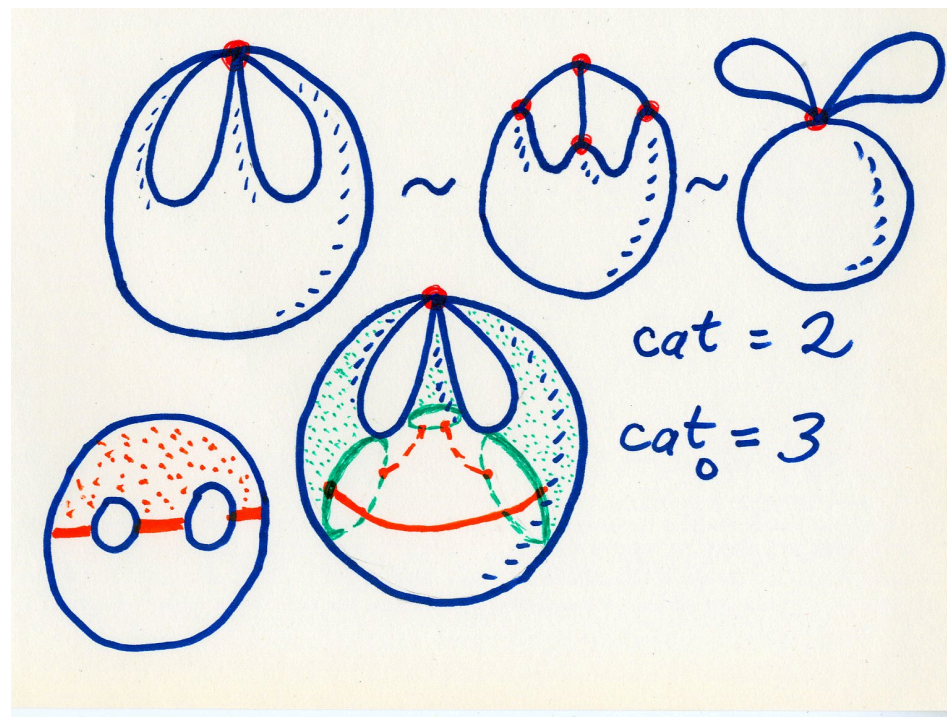
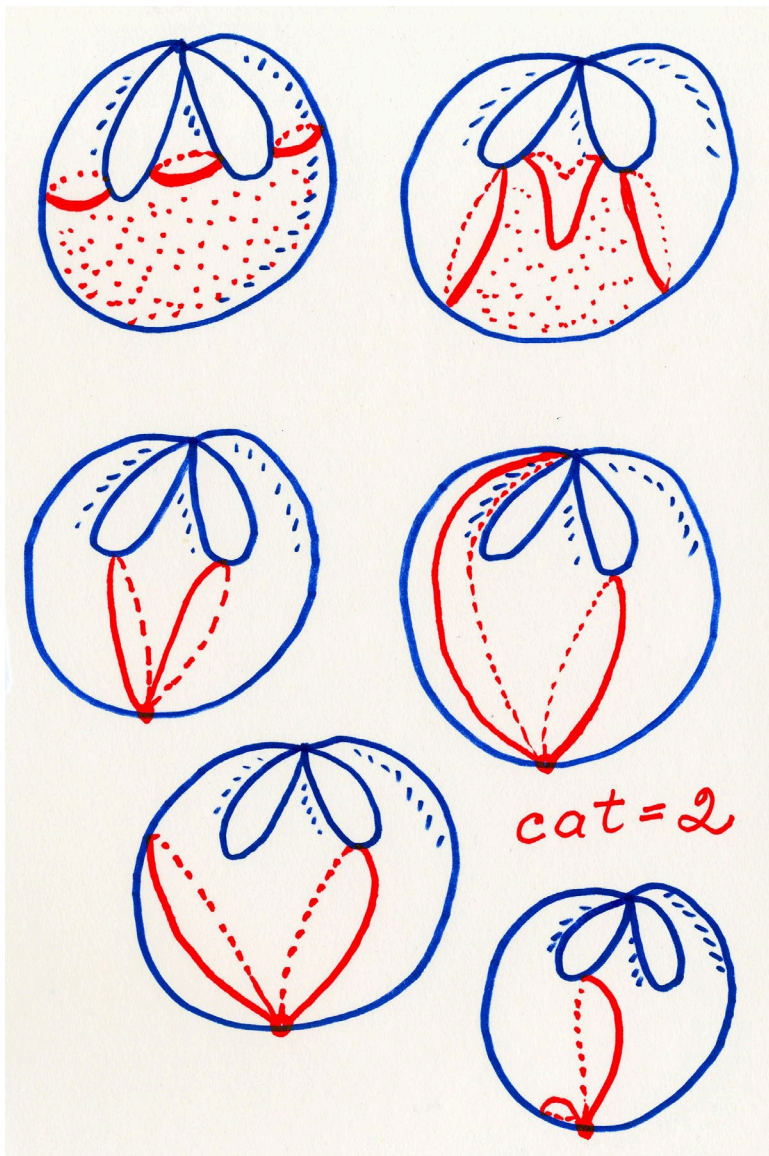
Категории Люстерника-Шнирельмана



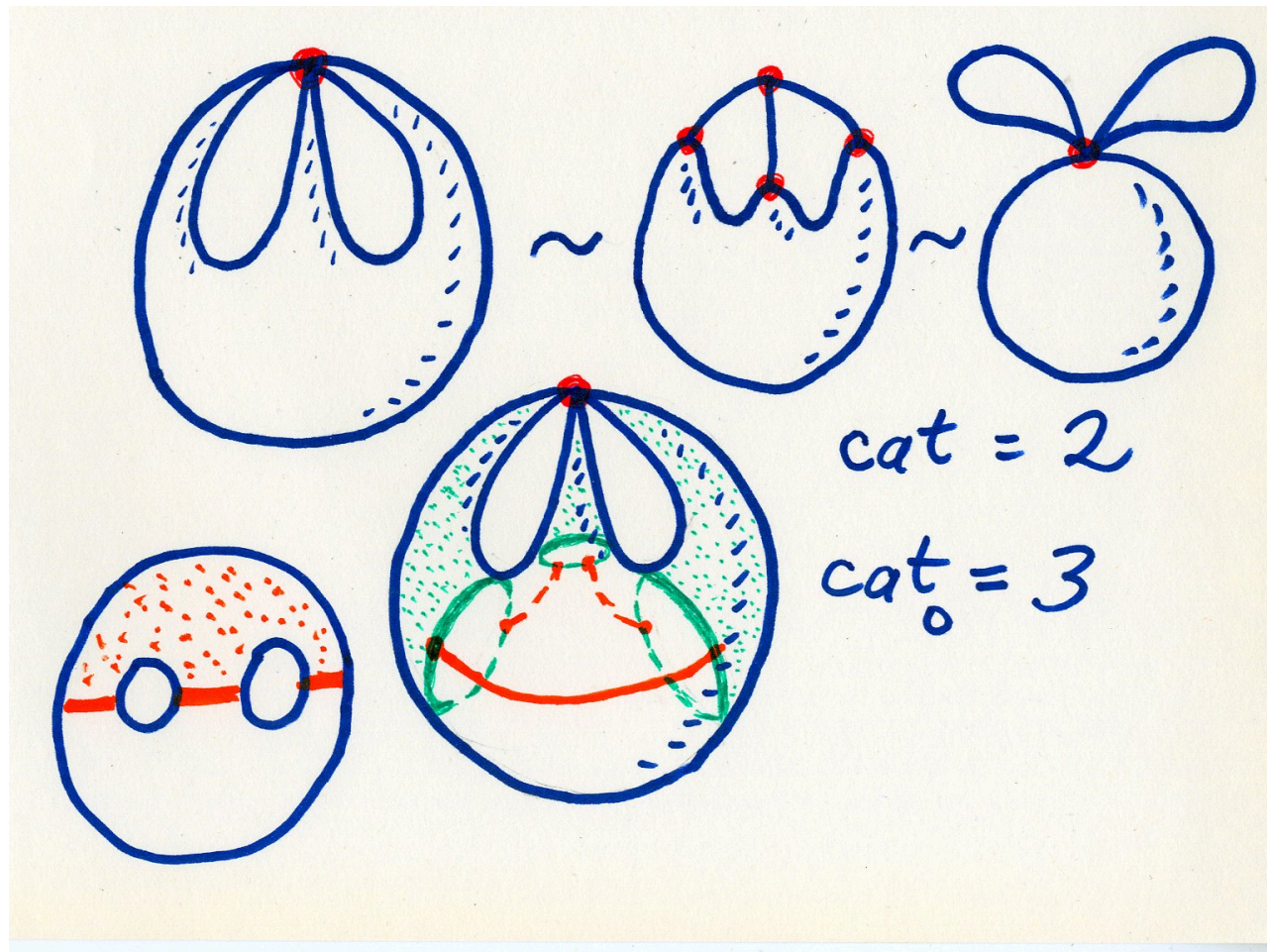
Рассмотрим пространство X , представленное на картинке слева, а именно сферу с тремя склеенными точками. Оно не стягивается по себе в точку, а значит, в любом варианте определения $cat X > 1$ ($cat_0 X > 1$). Разобьем X на два подмножества, как показано на рисунке. В качестве первого подмножества выберем три конуса, со склеенными вершинами (на рисунке они закрашены зеленым цветом), а в качестве второго - диск без двух точек, оставшийся после «отрезания» конусов.

Категории Люстерника-Шнирельмана

Оба этих подмножества стягиваются в точку по X .
Действительно, конусы стягиваются в общую вершину по самим себе. Диск же стягивается в букет двух окружностей на X , каждую из которых мы можем «протащить» через точку «склейки» и стянуть в точку, как показано на рисунке слева.



Категории Люстерника-Шнирельмана

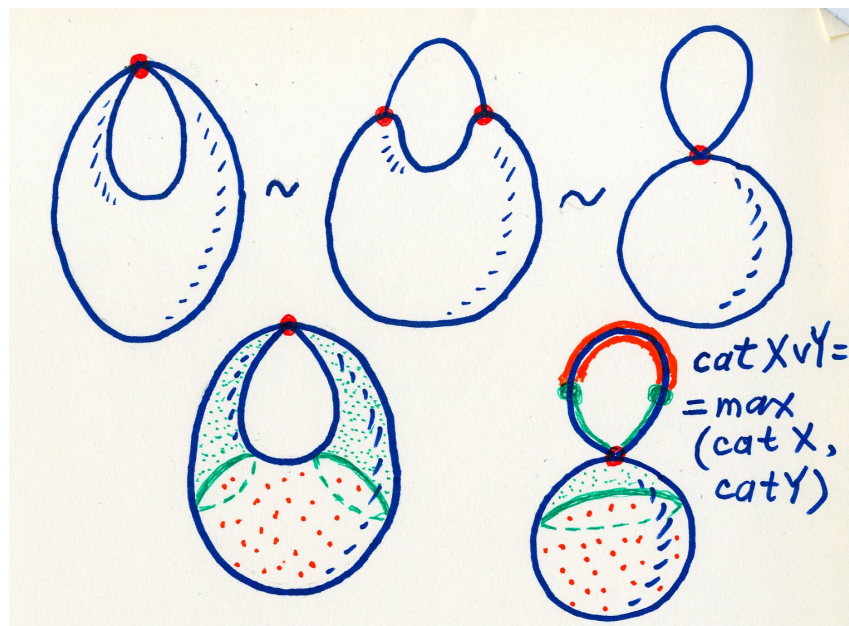


Таким образом, категория Люстерника-Шнирельмана X (в классическом определении) равна 2. Заметим, что диск без двух точек не стягивается по себе в точку. А значит, чтобы получить разбиение, которое удовлетворяют другому варианту определения категории, придется сам диск разбить еще на два подмножества, как показано на рисунке («красная» и «белая» части диска). Тем самым, $cat_0 X = 3$.

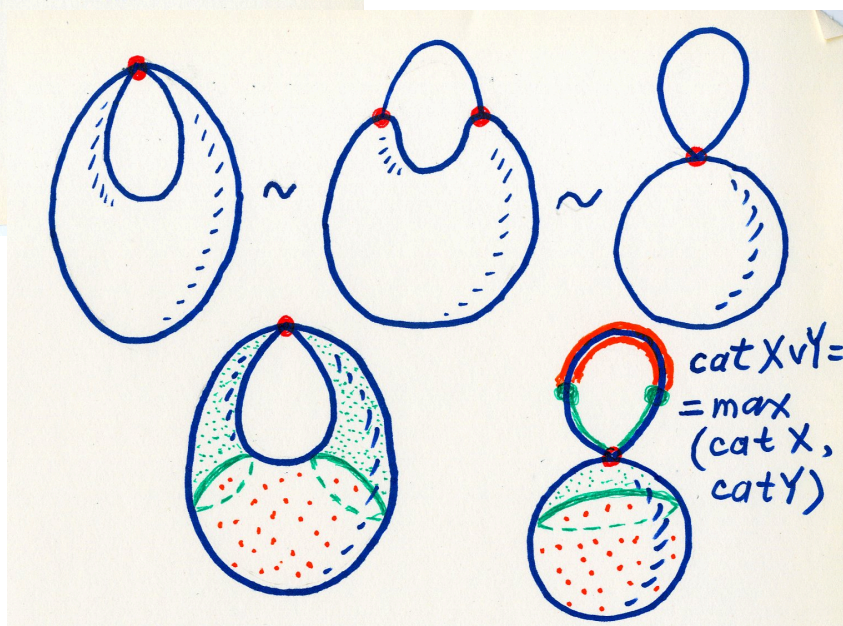
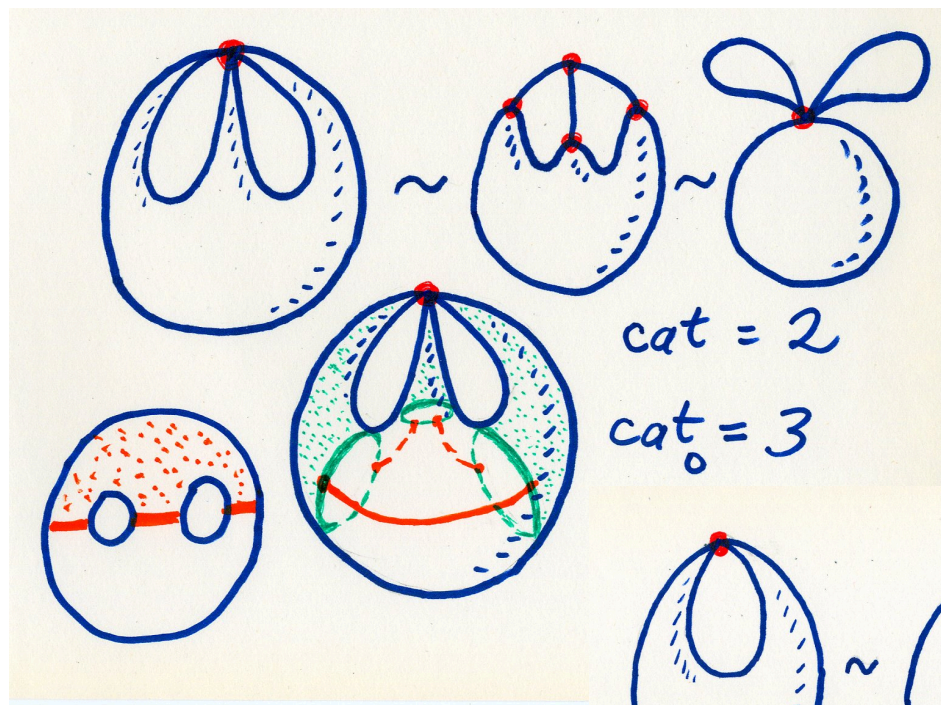
Категории Люстерника-Шнирельмана

Теорема

Пусть X является букетом n пространств, т.е. $X = X_1 \vee \dots \vee X_n$, где X_j , $1 \leq j \leq n$, — хаусдорфовы топологические пространства. Тогда $\text{cat} X = \max_{1 \leq j \leq n} \text{cat} X_j$.



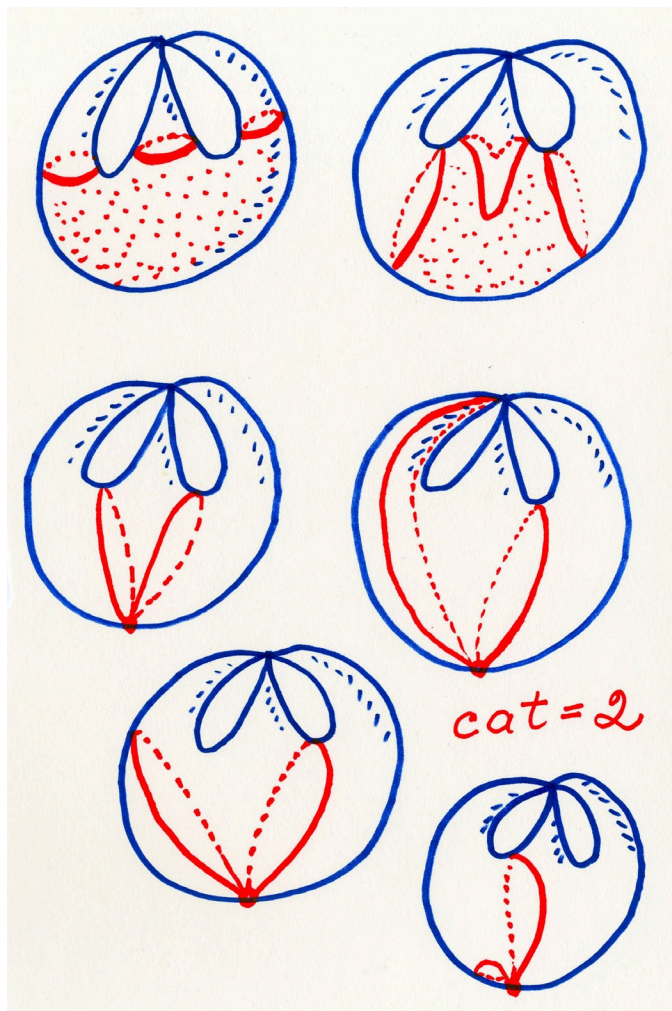
Категории Люстерника-Шнирельмана



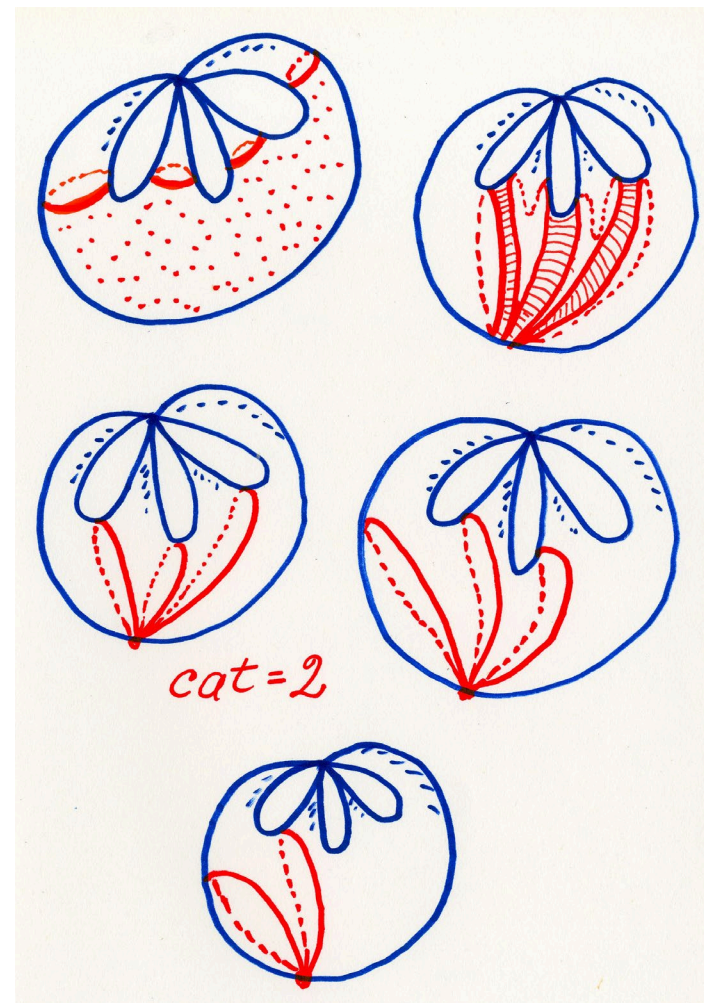
Заметим, что наше пространство гомотопически эквивалентно букету двух окружностей и сферы. Категория такого букета равна по теореме $cat X = \max\{cat S^1, cat S^2\} = 2 \neq cat_0 X = 3$.

Таким образом, чтобы категория была гомотопическим инвариантом, недостаточно разбивать пространство на подмножества, стягиваемые в точку по себе.

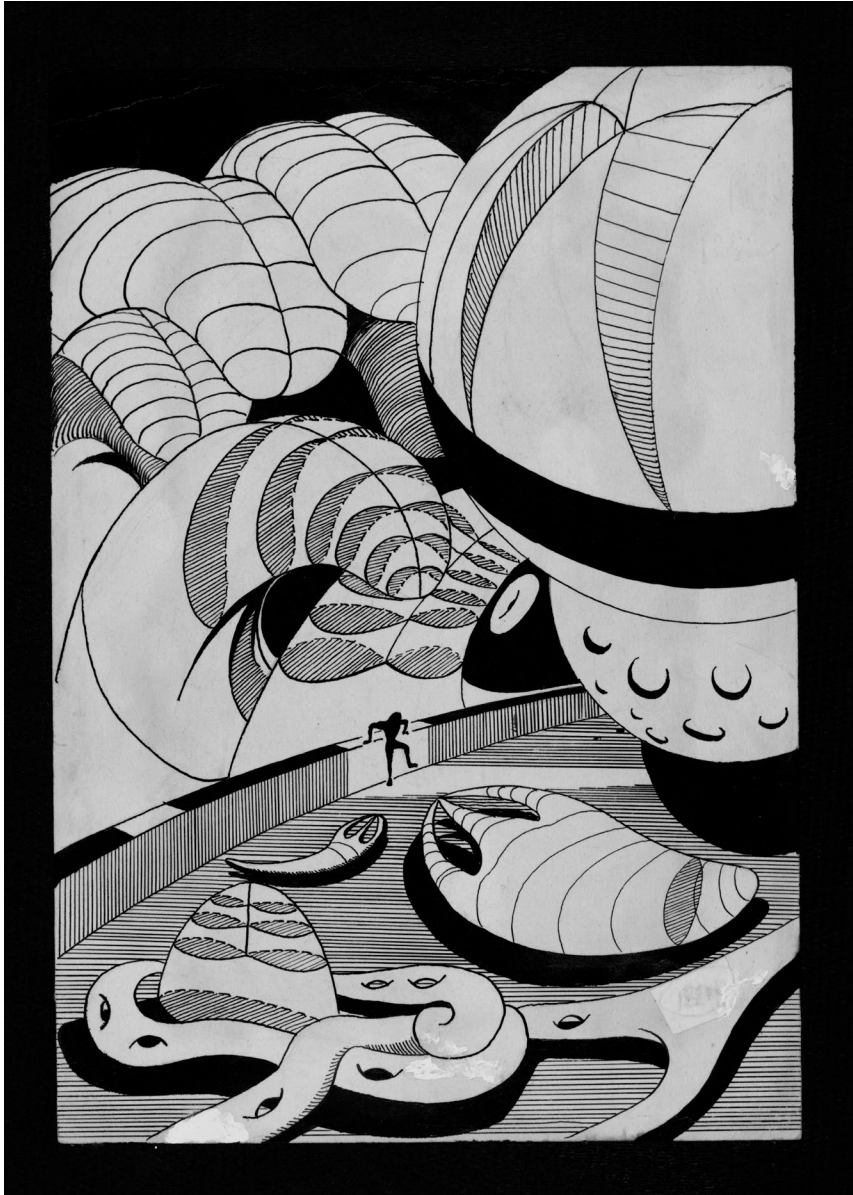
Категории Люстерника-Шнирельмана



Отметим, что если увеличить количество «петель» в рассмотренном пространстве, то категория по-прежнему будет равна двум. Разбиение на два подмножества будет устроено так же: несколько конусов со склеенными вершинами, и диск без какого-то числа точек, который стягивается по X в точку тем же способом (см. рисунки).



Двумерные поверхности в трехмерном пространстве



Слева представлена одна из картин А. Т. Фоменко «Двумерные поверхности в трехмерном пространстве». Справа видны сферы - простейшие 2-многообразия. Слева, как листья гигантских папоротников, вырастают проективные плоскости. Наверху - тор, "бублик". На переднем плане - лист Мебиуса, в виде "скрещенного колпака". Здесь же - двумерные поверхности большого рода, т.е. сферы с большим числом ручек. А также - две поверхности, не являющиеся многообразиями. Это - сферы с тремя отождествленными точками, те самые пространства, которые мы рассматривали на предыдущих слайдах. Получается нечто похожее на морское животное.

Теорема Люстерника-Шнирельмана

Теорема

Пусть M — связное гладкое многообразие, и f — гладкая функция на M с изолированными точками бифуркации. Пусть $\mu(f)$ — количество этих точек. Тогда $\mu(f) \geq \text{cat}M$.

Теорема верна в более общем случае, а именно:

Пусть M - «хорошее» топологическое пространство, а f - непрерывная функция на M с изолированными точками бифуркации. Тогда количество точек бифуркации оценивается снизу категорией пространства M .

Категория в проблеме Пуанкаре

Гипотеза Пуанкаре была доказана Люстерником и Шнирельманом на основе предыдущей теоремы. В качестве M надо рассмотреть бесконечномерное пространство ΩM всех петель на M (петля - это непрерывное отображение окружности в M). В качестве f надо взять функционал длины петель. Тогда точки бифуркации f - это замкнутые геодезические.

Опуская важные детали сформулируем суть дела. Если M гомеоморфно сфере, то, как оказывается, категория ΩM не меньше, чем 3. То есть на выпуклой двумерной замкнутой поверхности, гомеоморфной сфере, действительно существует не менее трех замкнутых геодезических, что и доказывает гипотезу Пуанкаре.

Гипотеза Пуанкаре

В 1992-1993 годах, в работах американских математиков Дж. Фрэнкс и В. Бангерт было доказано, что на самом деле на любой гладкой замкнутой выпуклой поверхности существует не три, а бесконечно много замкнутых геодезических.

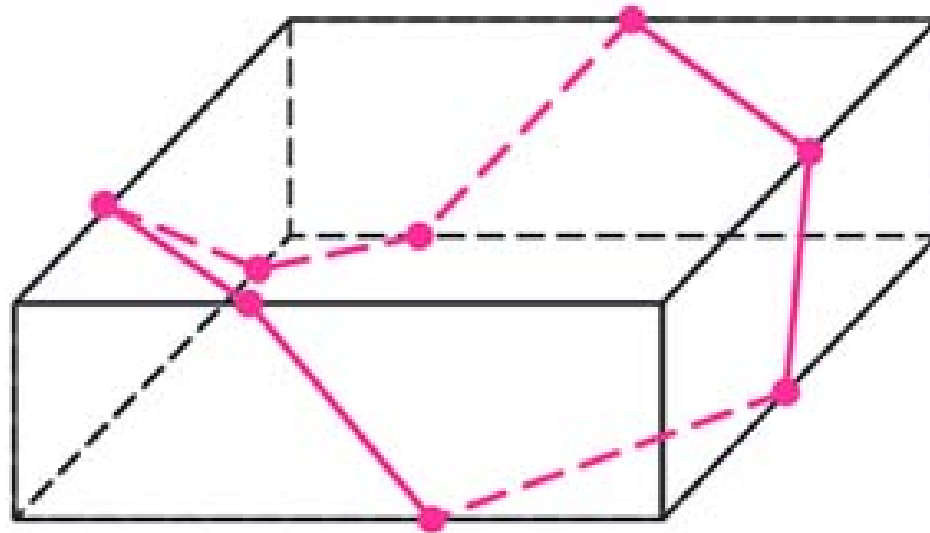
Гипотеза Пуанкаре

Но как же быть с эллипсоидом? Ведь многие именитые ученые были уверены в том, что на эллипсоиде их ровно три. Однако они ошибались.

Более того, существует весьма наглядный пример четвертой геодезической на разноосном эллипсоиде. Он появился в 1982 году в книге В. Клингенберга «Riemannian geometry».

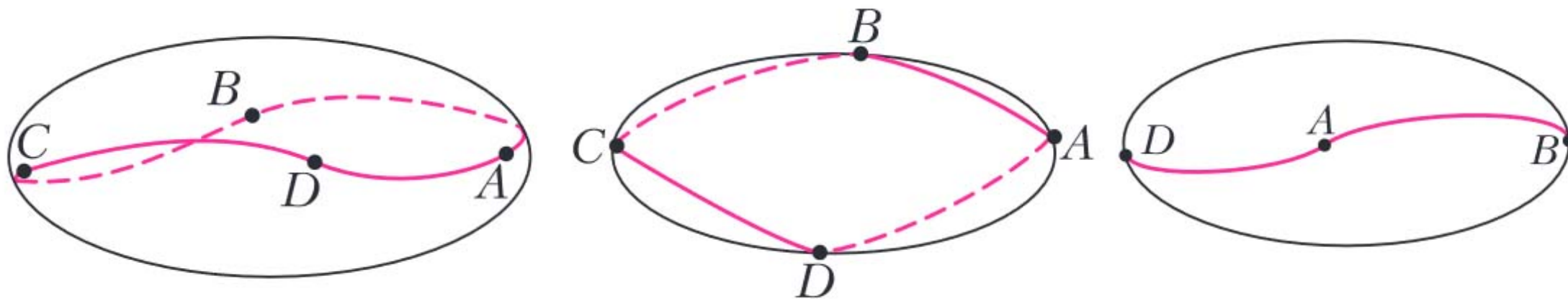
Четвертая геодезическая на эллипсоиде

Все видели, как перевязывают коробки с конфетами: пускают часть ленты внизу, по дну коробки, затем ведут вверх, по крышке, затем опять спускают вниз и затем опять вверх. Получается линия из четырех частей — две противоположные части внизу и две наверху. А теперь надо сделать то же, но не на прямоугольной коробке, а на «круглой».



Четвертая геодезическая на эллипсоиде

Возьмем эллипсоид, у которого одна ось сильно меньше двух других. Почти плоский. Обозначим концы длинных полуосей A , B , C , D . Соединим A и B кратчайшей линией, идущей по поверхности эллипсоида. Так как эллипсоид почти плоский, эта линия будет близка к отрезку AB и уж точно не будет идти по экватору, потому что длина дуги экватора больше отрезка AB . Теперь проведем такую же дугу AD по нижней стороне эллипсоида. Далее пустим такую же дугу DC по верхней стороне и закончим дугой CB с нижней стороны. Мы получили замкнутую линию, состоящую из четырех равных дуг. Она и будет геодезической.



Чудеса случаются!

Тем удивительнее, что многие десятилетия никто не додумался до этого примера. И никто, включая крупнейших математиков XX века — Пуанкаре и Гильберта, не допустил мысли, что на эллипсоиде может быть четвертая геодезическая. Чудеса случаются!

*3. Локально гомологический несвязный
2-комплекс, но с нулевыми 1-мерными
и 2-мерными гомологиями.*

Локальная гомологическая связность

Чтобы рассказать о следующем топологическом «чуде», введем следующее определение.

Определение

Топологическое пространство X называется **локально гомологически связным** в размерности n в точке $x \in X$, если для любой открытой окрестности U этой точки существует такая меньшая открытая окрестность V ($x \in V \subset U$), что индуцированный вложением $i : V \rightarrow U$ гомоморфизм групп гомологий $i_* : H_n(V) \rightarrow H_n(U)$ является нулевым.

Локальная гомологическая связность

Интересно, что существуют примеры пространств, которые локально являются гомологически не связными, в то время как глобально устроены довольно просто. Один из таких примеров изображен на картине Анатолия Тимофеевича Фоменко.

Структура устроена таким образом: мы берем конечный конус и его вершину приклеиваем к основанию. В результате одна из образующих конуса «сворачивается» в окружность. К ней мы приклеиваем основание следующего конуса и затем повторяем операцию. Продолжаем комплекс в обе стороны, постепенно сужая окружности. Получаем цепочку, имеющую два «конца» - предельные точки. Образно говоря, полиэдр склеен из бесконечного числа "раковин". Основание каждой раковины заклеено "завитком" следующей раковины. По мере приближения к двум особым точкам полиэдра, раковины, конечно, уменьшаются в размере.





Описанный полиэдр изображен на еще одной замечательной картине А. Т. Фоменко «Топологический зоопарк». Справа вверху зритель видит юмористическую сценку. "Оживший полиэдр" разваливается на свои составные части - раковины-скорпионы. Изогнутый к голове хвост "скорпиона" наглядно моделирует конструкцию полиэдра. Хорошо видно - как именно нужно склеивать "раковины", чтобы восстановить весь полиэдр.

Заметим, что в левом нижнем углу картины, на освещенной площадке, изображена минимальная поверхность (мыльная пленка), которая является первым из наших чудес.

Напомним, что ее границей является окружность, обладающая тем замечательным свойством, что пленка может быть непрерывно отображена на свою границу, и при этом граница останется неподвижной. Этот пример Дж.Ф.Адамса удивителен тем, что двумерная поверхность моделируется устойчивой мыльной пленкой,

затягивающей проволоочный контур в трехмерном евклидовом пространстве.

Видно, что эта минимальная поверхность получается склейкой обычного листа Мебиуса с так называемым тройным листом Мебиуса.



Вернемся к нашему полиэдру. Заметим, что первые и вторые гомологии этого пространства равны 0.

Действительно, возьмем основание одного из конусов - одномерный цикл. Протащив его по поверхности того же конуса, мы можем стянуть эту окружность в вершину. Аналогично сможем поступить и с произвольным одномерным циклом на нашем комплексе. Тем самым, одномерная группа гомологий тривиальна.

Вторые же гомологии пространства равны 0, поскольку рассматриваемый комплекс в принципе не содержит двумерных циклов.



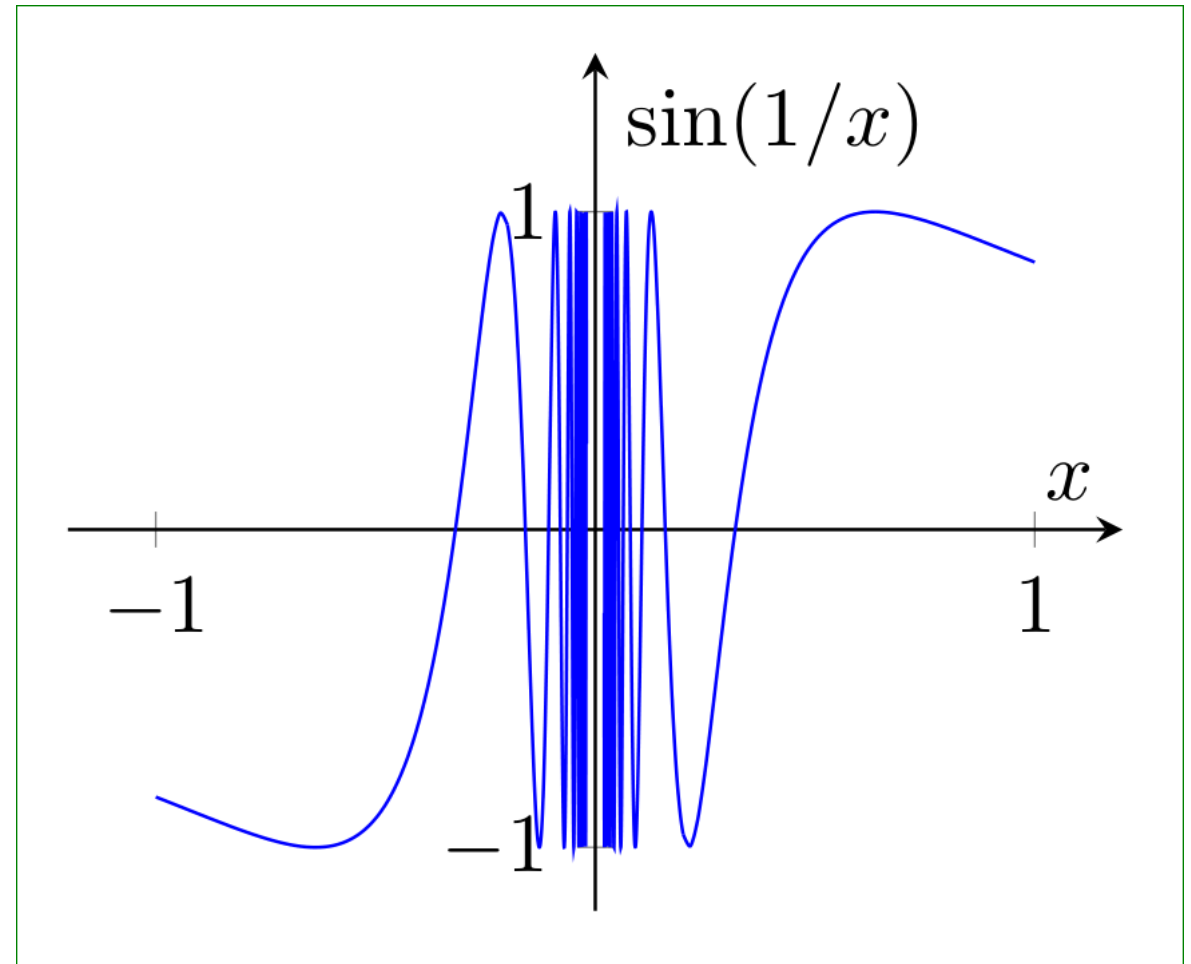
Однако локально такой комплекс отнюдь не тривиален - он локально гомологически не связан в размерности 1! Действительно, существует две точки, в которых нарушается условие локальной гомологической связности. Это точки накопления.



Примеры

Существуют и другие примеры пространств, локально устроенных сложнее, чем глобально.

Глобально график является связным пространством, но локально даже линейно не связан. Здесь проблемными являются множество точек вертикального отрезка.



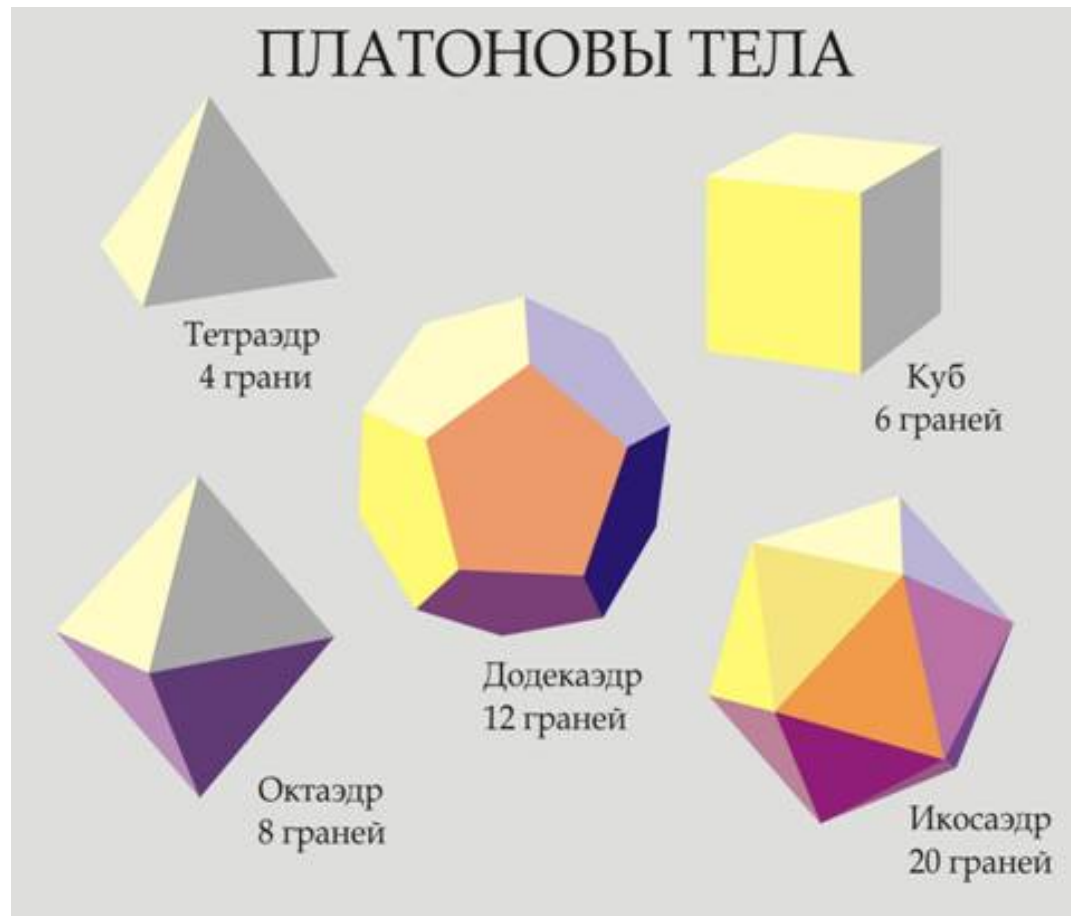
Чудеса случаются!

Оказывается, глобально «простые» топологические объекты локально могут иметь довольно сложную структуру.

*4. Платоновы тела и правильные
многомерные многогранники.*

Платоновы тела

Всем известно, что существует ровно пять правильных многогранников в размерности три.

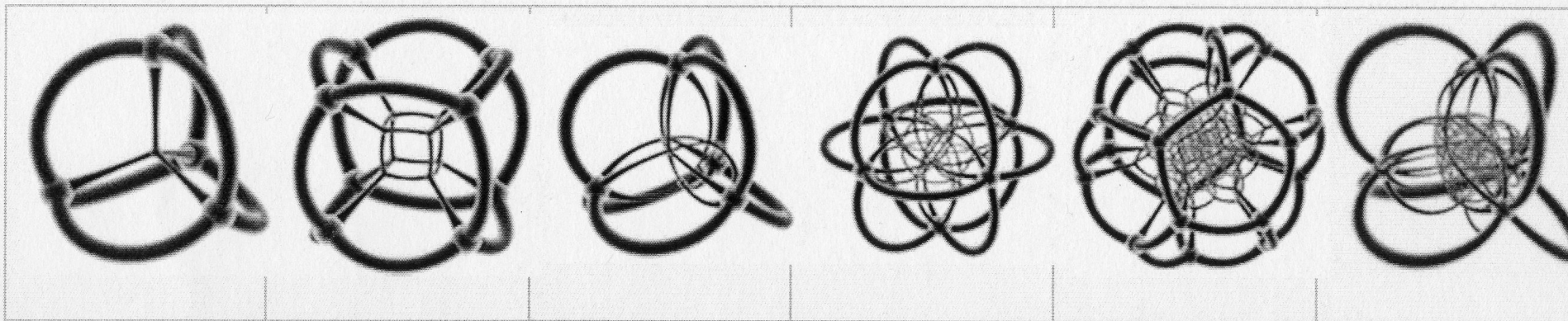


Многомерные многогранники

А что будет, если увеличить размерность?

ровно

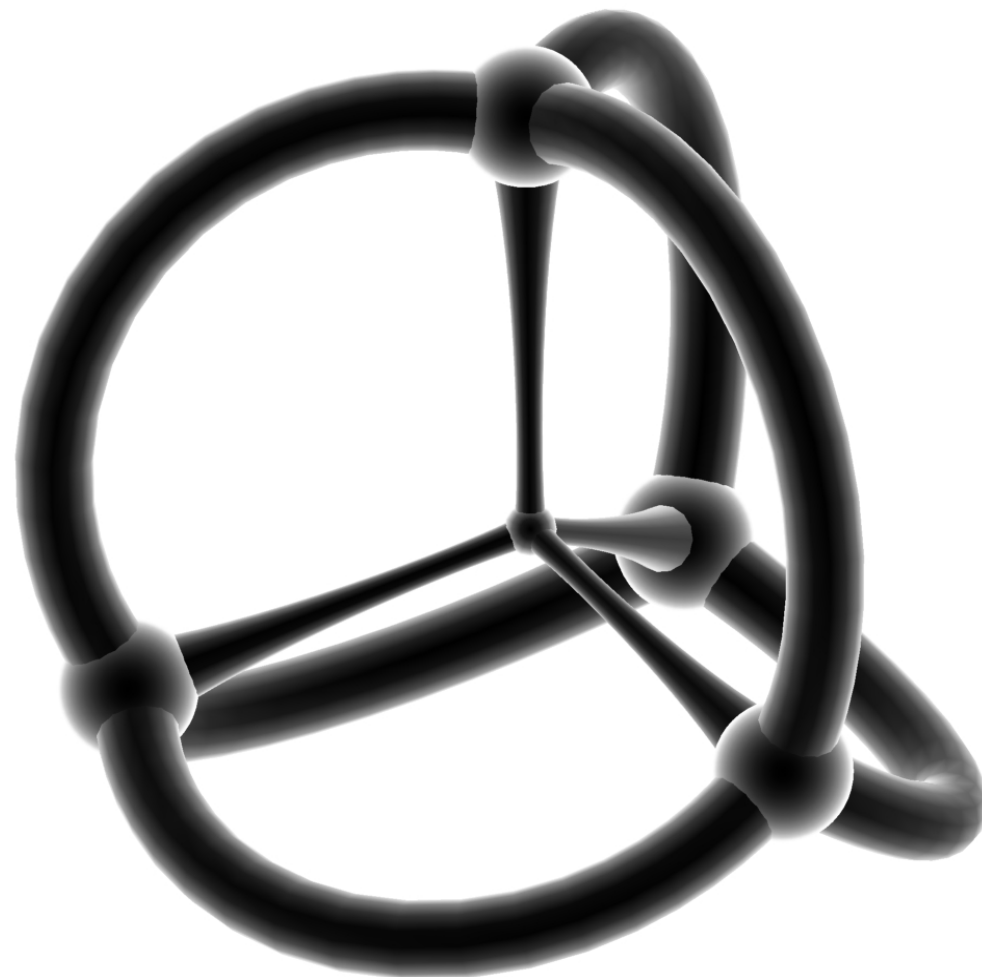
- Всего существует 6 правильных четырёхмерных многогранников:



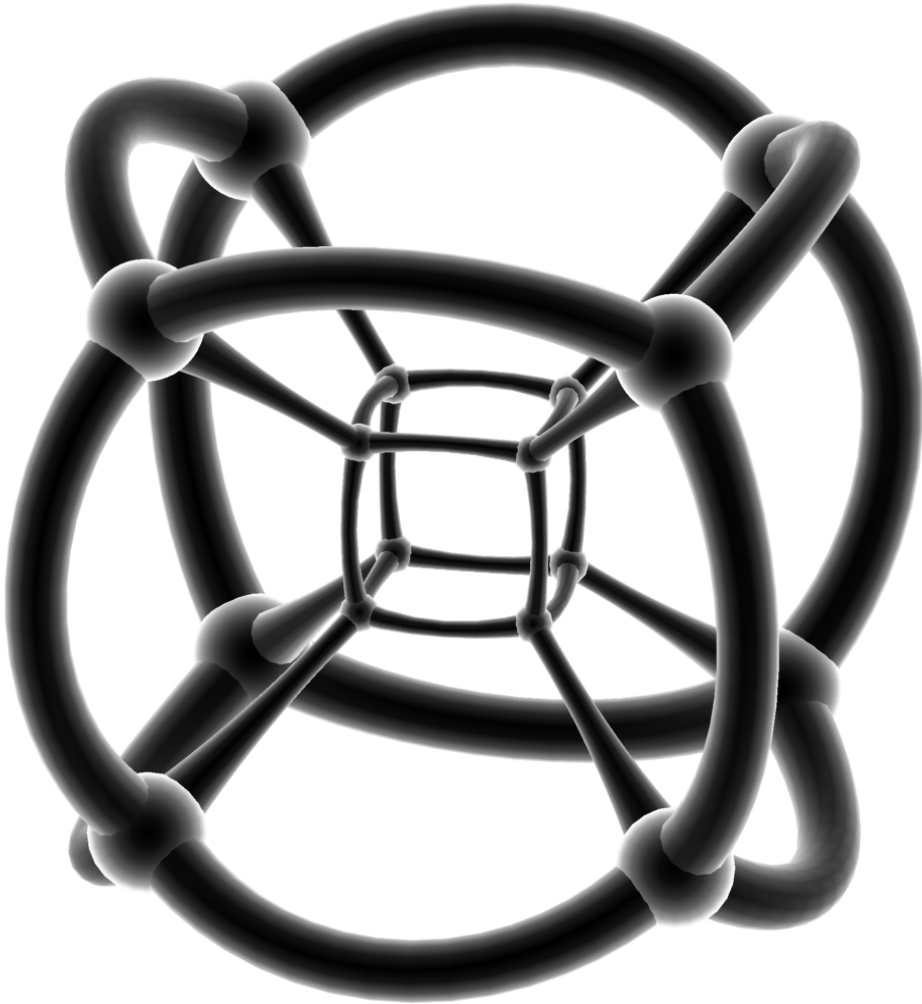
- Во всех пространствах размерности $n > 4$ существует только 3 типа правильных многогранников: n -мерный симплекс, n -мерный октаэдр (гипероктаэдр) и n -мерный куб (гиперкуб).

Многомерные многогранники

Пятиячейник (или 4-симплекс) —
аналог треугольной пирамиды
(тетраэдра). Состоит из 5
тетраэдрических ячеек.



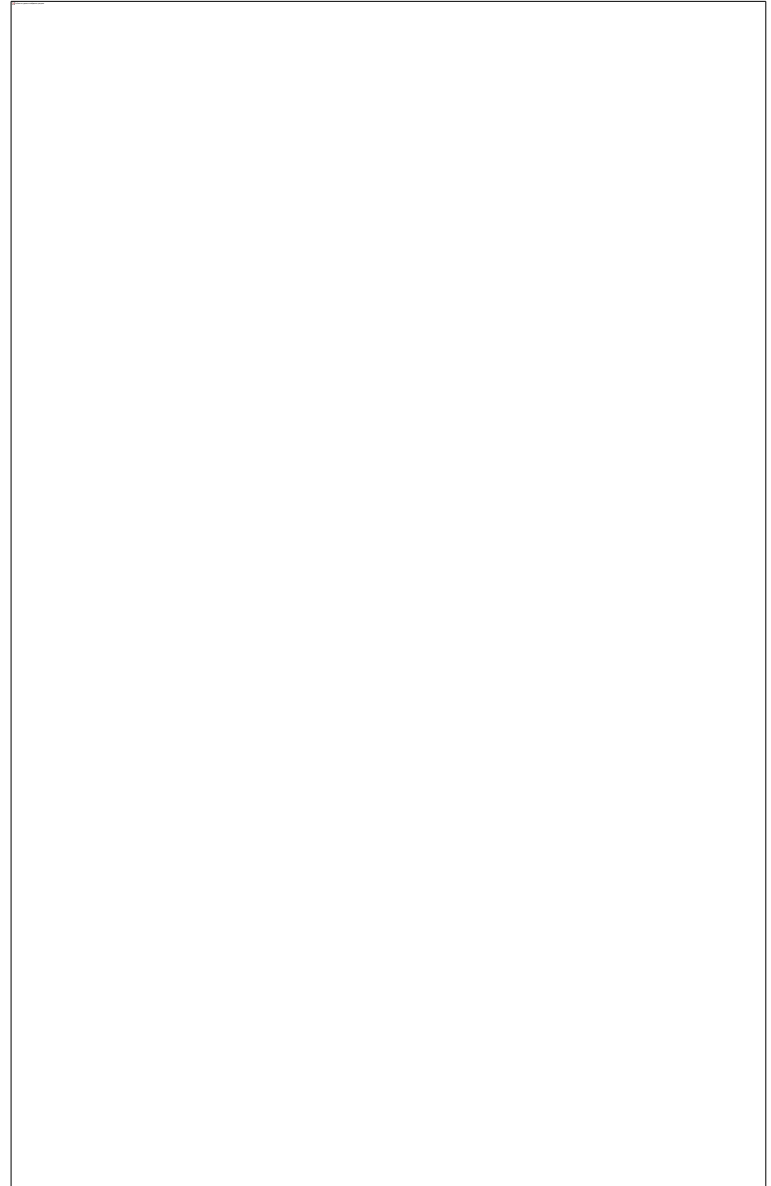
Многомерные многогранники



Тессеракт (или 4-гиперкуб) — аналог обычного трехмерного куба. Состоит из 8 кубических ячеек.

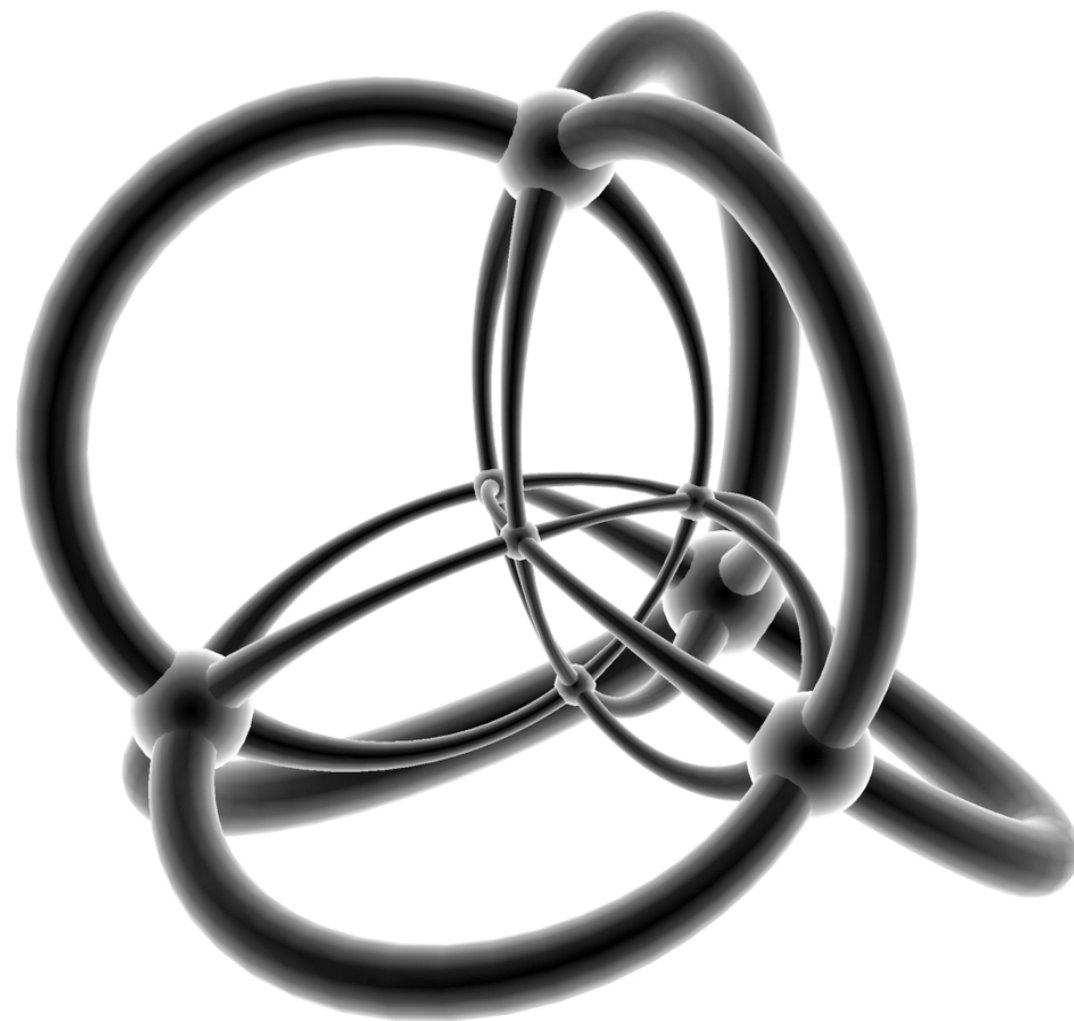
Многомерные многогранники

При вращении куба в
четырёхмерном
пространстве трёхмерная
проекция «вращается» в
 R^3 .

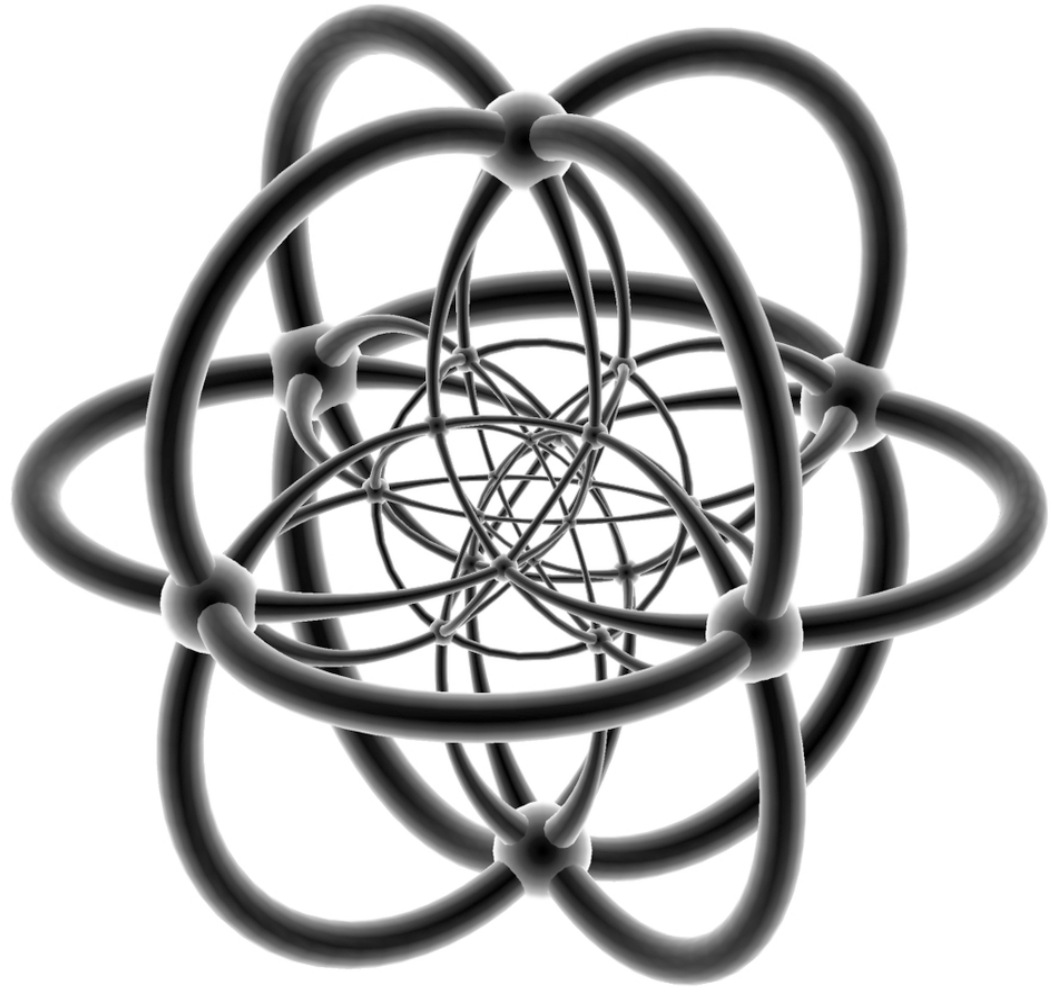


Многомерные многогранники

Шестнадцатиячейник (или 4-ортоплекс) — аналог октаэдра. Состоит из 16 тетраэдрических ячеек.



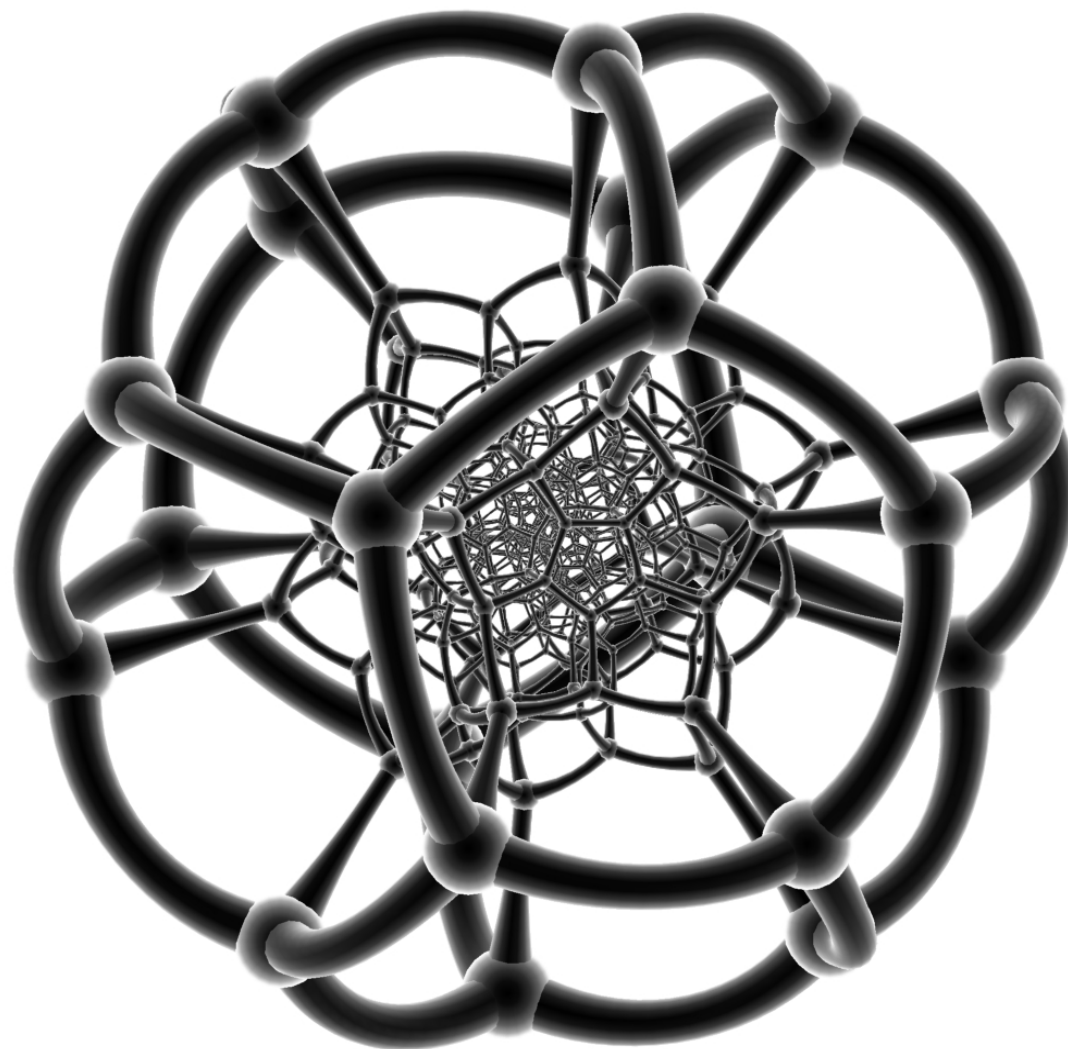
Многомерные многогранники



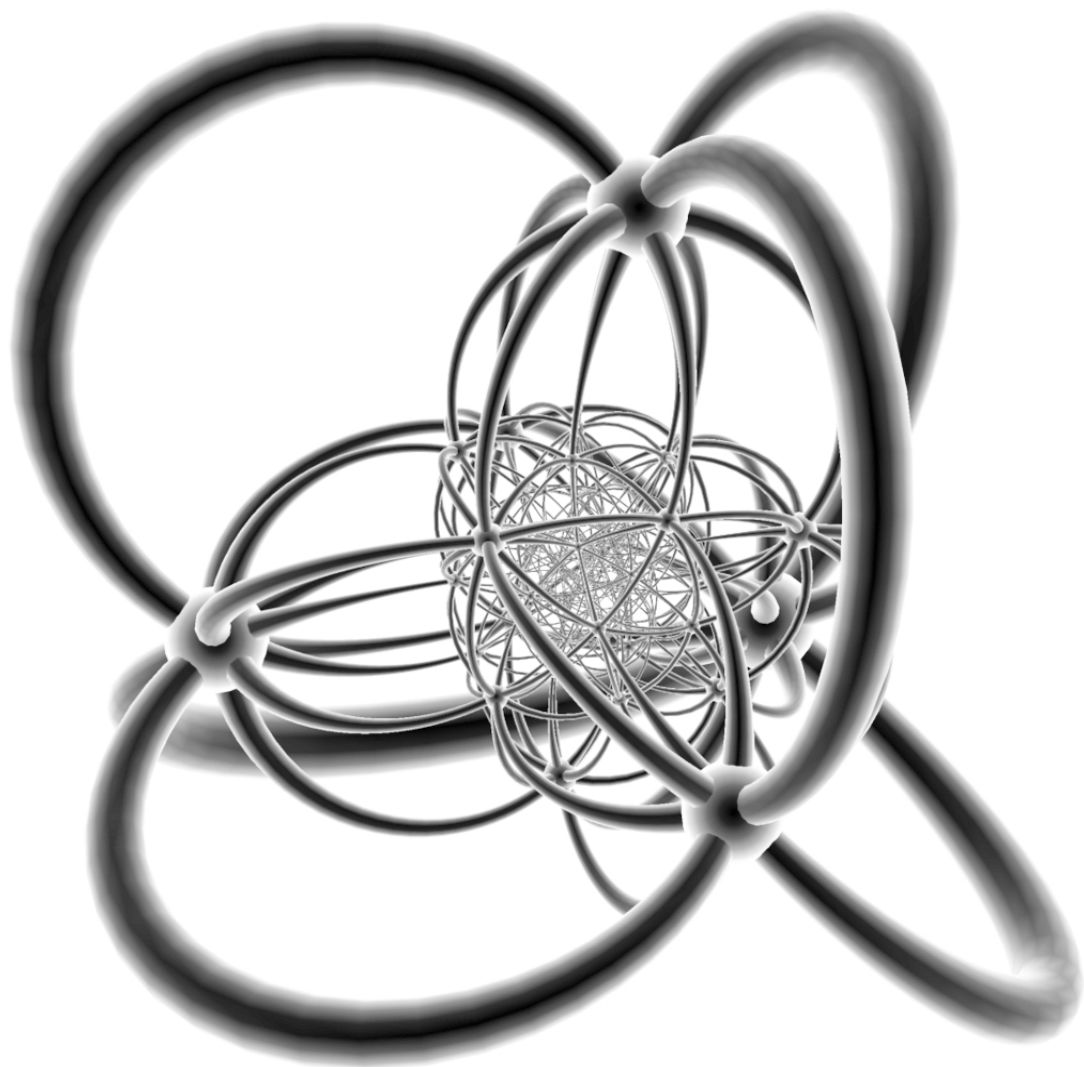
Двадцатичетырехячейник (или икоситетрахор) — уникальный четырехмерный многогранник, у которого нет аналогов в других размерностях. Состоит из 24 октаэдрических ячеек.

Многомерные многогранники

Стодвадцатиячейник (или
гекатоникосахор) — аналог
додекаэдра. Состоит из 120
додекаэдрических ячеек.



Многомерные многогранники

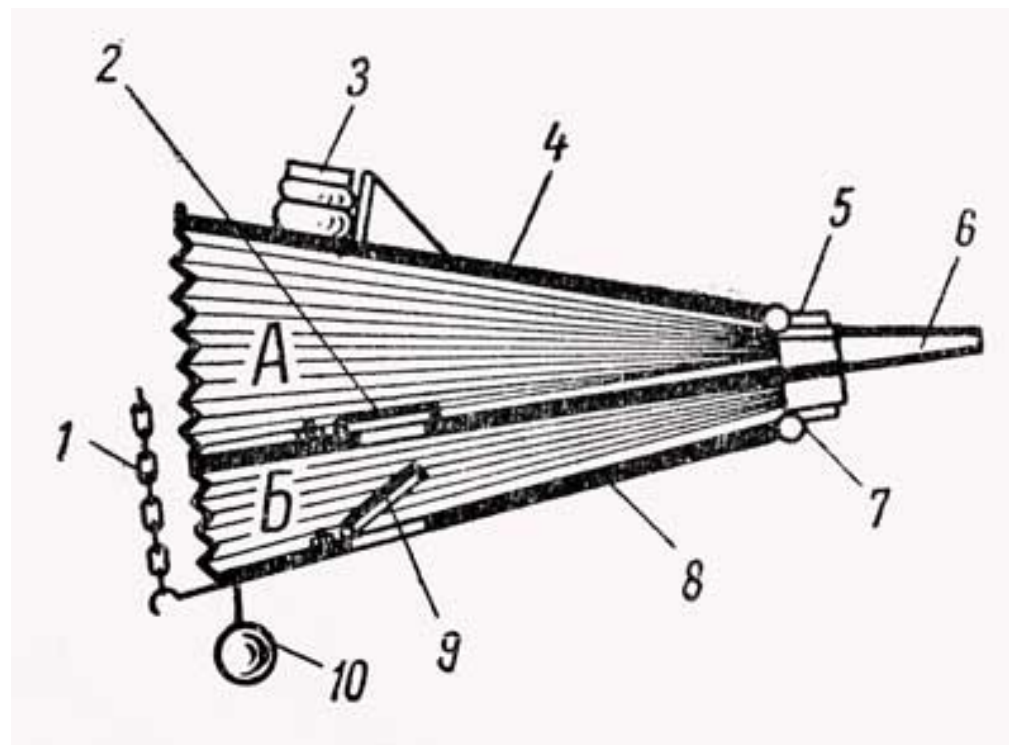


<u>Шестисотиячейник</u>		<u>(или</u>
<u>гексакосихор)</u>	—	аналог
икосаэдра.	Состоит	из 600
тетраэдрических	ячеек.	

*5. Теорема Сабитова об изгибаемых
многогранниках – решение проблемы
мехов.*

Проблема кузнечных мехов

Обычные кузнечные меха (для раздувания огня) или меха аккордеона работают потому, что их стенки сделаны из мягкой кожи или ткани.



Проблема кузнечных мехов

Когда мы их сжимаем, кожа сминается, внутренний объём падает, и воздух с силой выходит наружу.

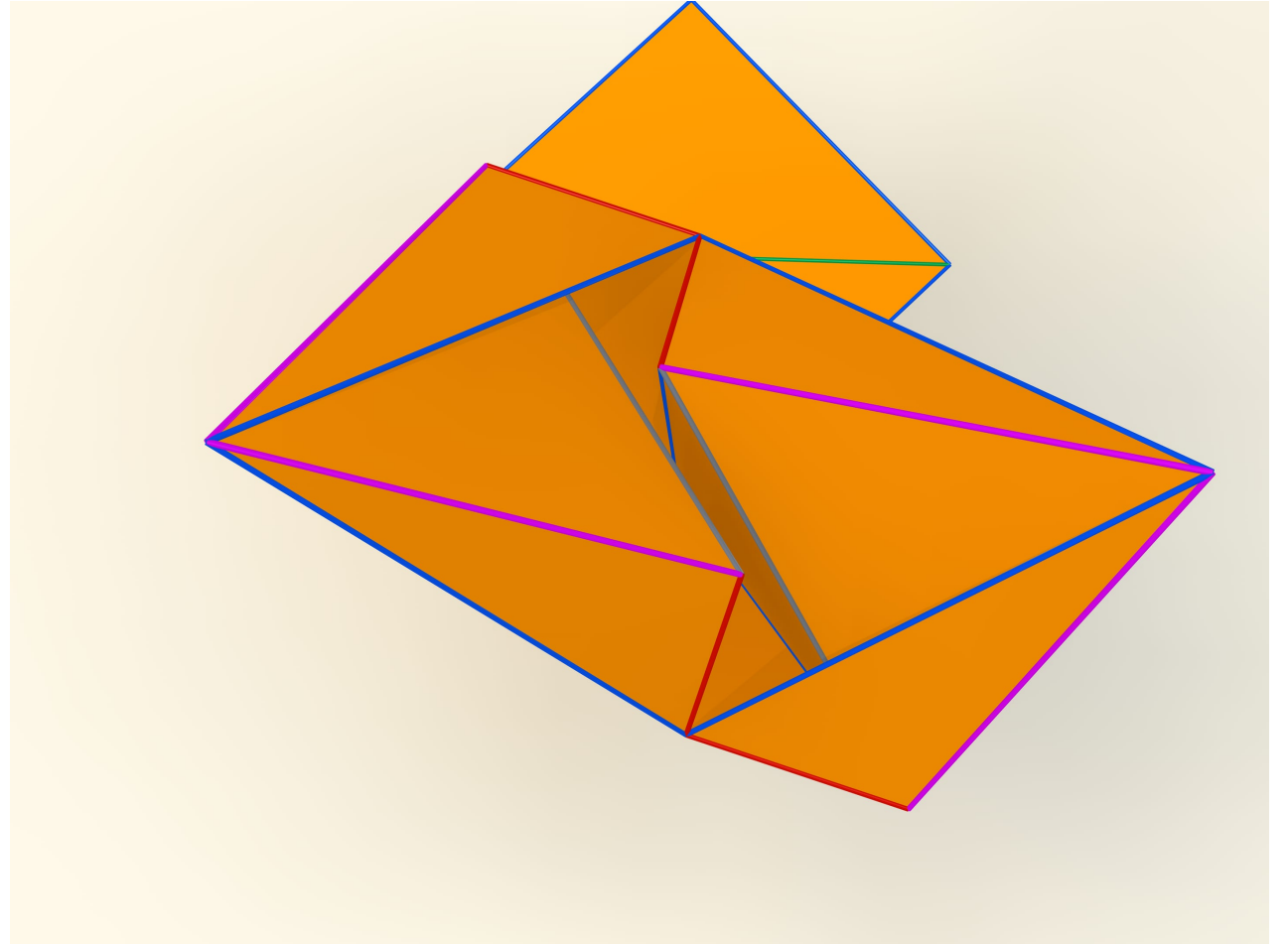
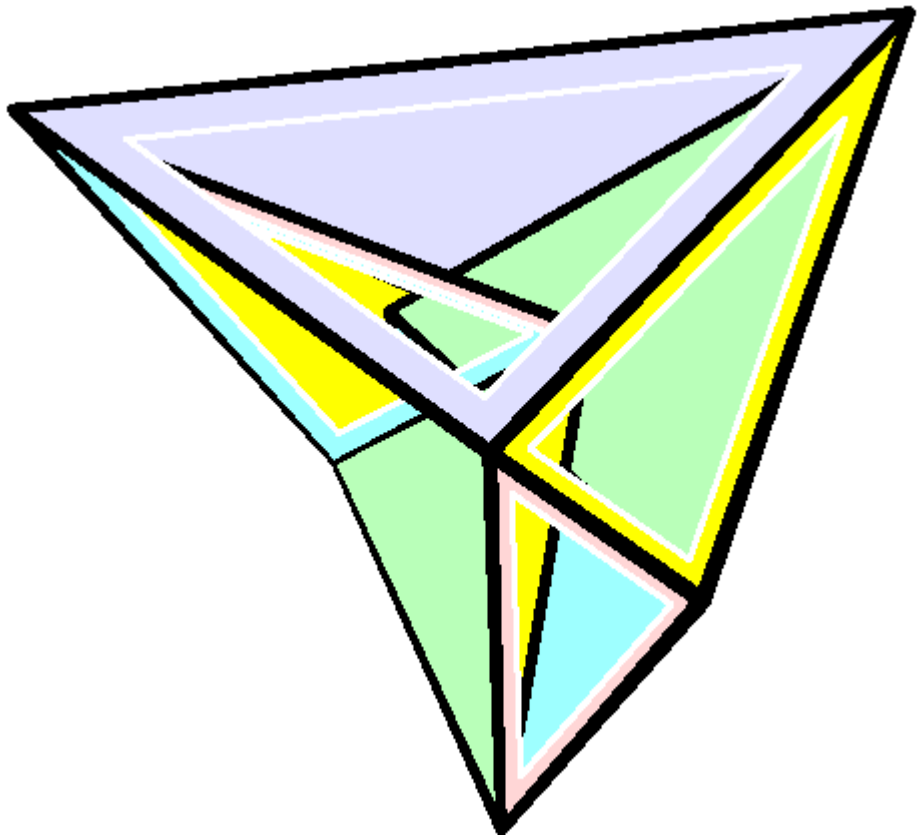


Проблема кузнечных мехов

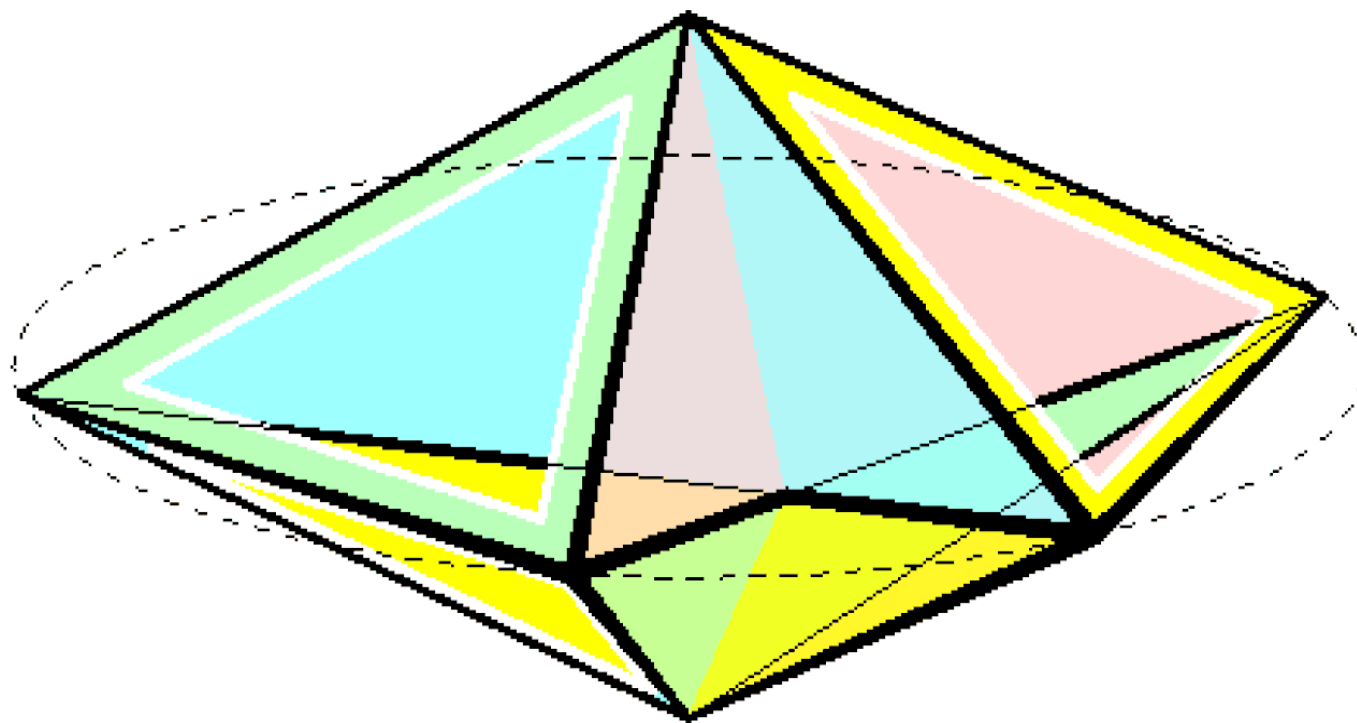
Когда в 1977 году американский математик Роберт Коннелли впервые построил замкнутый изгибаемый многогранник без самопересечений, учёные сразу обратили внимание на странную деталь: как бы этот многогранник ни изгибался, визуально казалось, что объем многогранника не меняется.

То же самое можно сказать и про другие примеры изгибаемых многогранников, построенных Штеффеном и Брикаром.

Многогранник Штеффена



Многогранник Брикара



Проблема кузнечных мехов

Возникла гипотеза, что из жёстких пластин кузнечные меха (или баян) сделать физически невозможно.

То есть при изгибании невыпуклых многогранников их объем (обобщенный объем) остается постоянным.

Иджад Хакович Сабитов

Точку в этом вопросе в 1996 году поставил профессор механико-математического факультета МГУ Иджад Хакович Сабитов. Вот его знаменитая теорема.



Теорема Сабитова

Теорема 1. *Для всех изометричных между собой геометрических многогранников можно указать^{*} некоторый многочлен*

$$Q(V) = V^{2N} + a_1 V^{2N-2} + \dots + a_N, \quad (1)$$

в котором коэффициенты a_i зависят от метрики^{**} многогранника P и его комбинаторного строения, такой что обобщенный объем каждого многогранника является корнем этого многочлена.

^{*}(алгоритмически построить)

^{**}(от квадратов длин ребер, причем полиномиально)

Обобщенный объем многогранника

Пусть у нас есть ориентированный многогранник. Выберем в пространстве точку O и к каждой грани «пристроим» тетраэдр с вершиной в точке O (рис. 18, здесь тетраэдр «пристроен» к грани ABC). Для каждого тетраэдра определён ориентированный объём. *Обобщённым объёмом ориентированного многогранника* назовём сумму этих объёмов тетраэдров. Используя понятие смешанного произведения векторов, можно показать, что значение этого обобщённого объёма

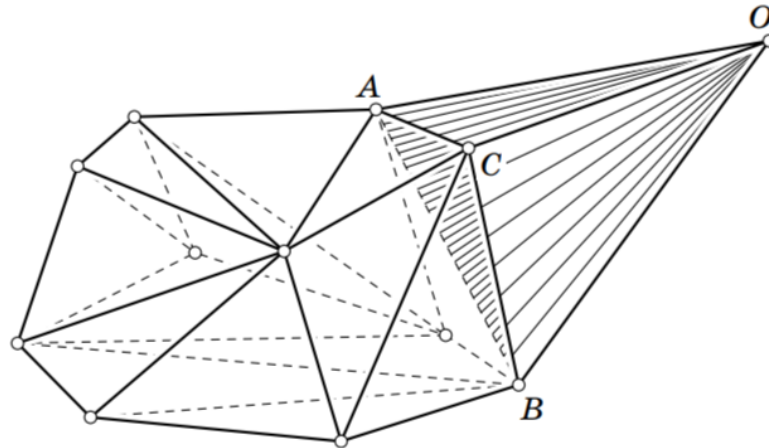


Рис. 18

не зависит от выбора точки O (для этого и нужно требование об ориентированности многогранника). Заметим, что, если мы выберем точку O внутри выпуклого многогранника, то объёмы всех тетраэдров будут одного знака, и обобщённый объём в данном случае будет совпадать по модулю с обычным объёмом. Оказывается, этот факт верен для любого многогранника без самопересечений.

Полином Сабитова

Отметим, что степень данного полинома стремительно растет с усложнением комбинаторного строения многогранника. Например, в случае тетраэдра полином Сабитова вырождается в формулу Герона-Эйлера. По сути, это уравнение относительно квадрата объема, то есть степень полинома равна 2. Для октаэдра предварительная оценка на степень полинома составляла 1024 , то есть $2N \leq 2^{10}$. Позже в совместной работе А. В. Астрелина и И. Х. Сабитова([1]) было строго доказано, что реальная минимальная степень этого полинома для октаэдра равна 16. Однако получить полином в буквенном виде для произвольного октаэдра (всего 12 рёбер-переменных) — это задача, перегружающая компьютерную память из-за гигантского объема промежуточных выражений.

[1] Астрелин А. В., Сабитов И. Х. Минимальный по степени многочлен для определения объема октаэдра по его метрике // Успехи математических наук. — 1995. — Т. 50, вып. 5 (305). — С. 245–246.

Полином Сабитова

Если же попытаться построить канонический полином Сабитова для произвольного икосаэдра, то его теоретическая степень будет исчисляться сотнями тысяч. Это происходит из-за того, что метод, который использовался для построения полинома Сабитова в его работе, приводит к экспоненциальному росту степени и числа слагаемых.

Полином Сабитова

Обратим внимание на то, что полином Сабитова имеет $2N$ корней (их количество равно степени полинома). Один из них есть объем исследуемого многогранника. Какой же геометрический смысл у остальных корней?

Многочлен Сабитова зависит исключительно от двух групп параметров: комбинаторики (схемы соединения граней) и метрики (длин рёбер). Поскольку эти данные не задают фигуру в пространстве однозначно, некоторые из оставшихся корней этого многочлена описывают обобщённые объёмы всех теоретически возможных способов реализации данного многогранника в пространстве. Однако в общем случае не все корни полинома соответствуют объёмам разных конфигураций изометричных многогранников.

Полином Сабитова

- Вещественные неотрицательные корни соответствуют изометричным реализациям (другим физическим сборкам из той же развертки) исходного многогранника или обобщённому объёму самопересекающихся многогранников, которые комбинаторно и метрически эквивалентны исходному ([1],[2]).
- Комплексные корни могут соответствовать многогранникам, которые можно было бы построить из этих рёбер, если бы координаты их вершин выражались комплексными числами. Геометрически реализуемыми могут быть только вещественные корни ([1]).
- Некоторые отрицательные вещественные корни могут соответствовать той же самой геометрической реализации многогранников из первого пункта, но с противоположной ориентацией в пространстве ([3]).

Список литературы приведен на следующем слайде.

Полином Сабитова

Таким образом, геометрический смысл всех корней многочлена в общем случае остается неизвестным. Однако среди них точно есть значения объёмов всех реализаций (в том числе, комплексных) метрики данного многогранника.

[1] Астрелин А. В., Сабитов И. Х. «Канонический многочлен для объёма многогранника» // Успехи математических наук. — 1999. — Т. 54, вып. 2(326). — С. 165–166.

[2] Михалёв С. Н. «Изометрические реализации октаэдров Брикара 1-го и 2-го типа с известными значениями объёма» // Фундаментальная и прикладная математика. — 2002. — Т. 8, № 3. — С. 755–768.

[3] Сабитов Д. И., Сабитов И. Х. «Канонические многочлены объёма для многогранников комбинаторного типа гексаэдра» // Сибирские электронные математические известия. — 2017. — Т. 14. — С. 1078–1087.

Следствия

Следствие 1. Множество значений обобщенных объемов всех изометричных между собой многогранников конечно.

Следствие 2. Обобщенный объем изгибаемого многогранника в ходе изгиба остается постоянным.

Проблема кузнечных мехов

Итак, если многогранник допускает непрерывное изгибание (деформацию, при которой длины всех его рёбер, форма граней и комбинаторная структура остаются неизменными), то в процессе этого изгибания коэффициенты в полиноме Сабитова остаются постоянными. Это значит, что постоянными остаются и корни полинома. Но тогда в силу теоремы Сабитова и объём многогранника остается неизменным.

Гипотеза оказалась верной!!! Сделать кузнечные меха или же баян из жестких пластин невозможно!

Обобщение теоремы Сабитова

В 2012 году Александр Александрович Гайфуллин доказал прямой аналог теоремы Сабитова для многогранников произвольной размерности.

Gaifullin A. A. Generalization of Sabitov's theorem to polyhedra of arbitrary dimensions // Discrete & Computational Geometry. — 2014. — Vol. 52, no. 2. — P. 195–220.

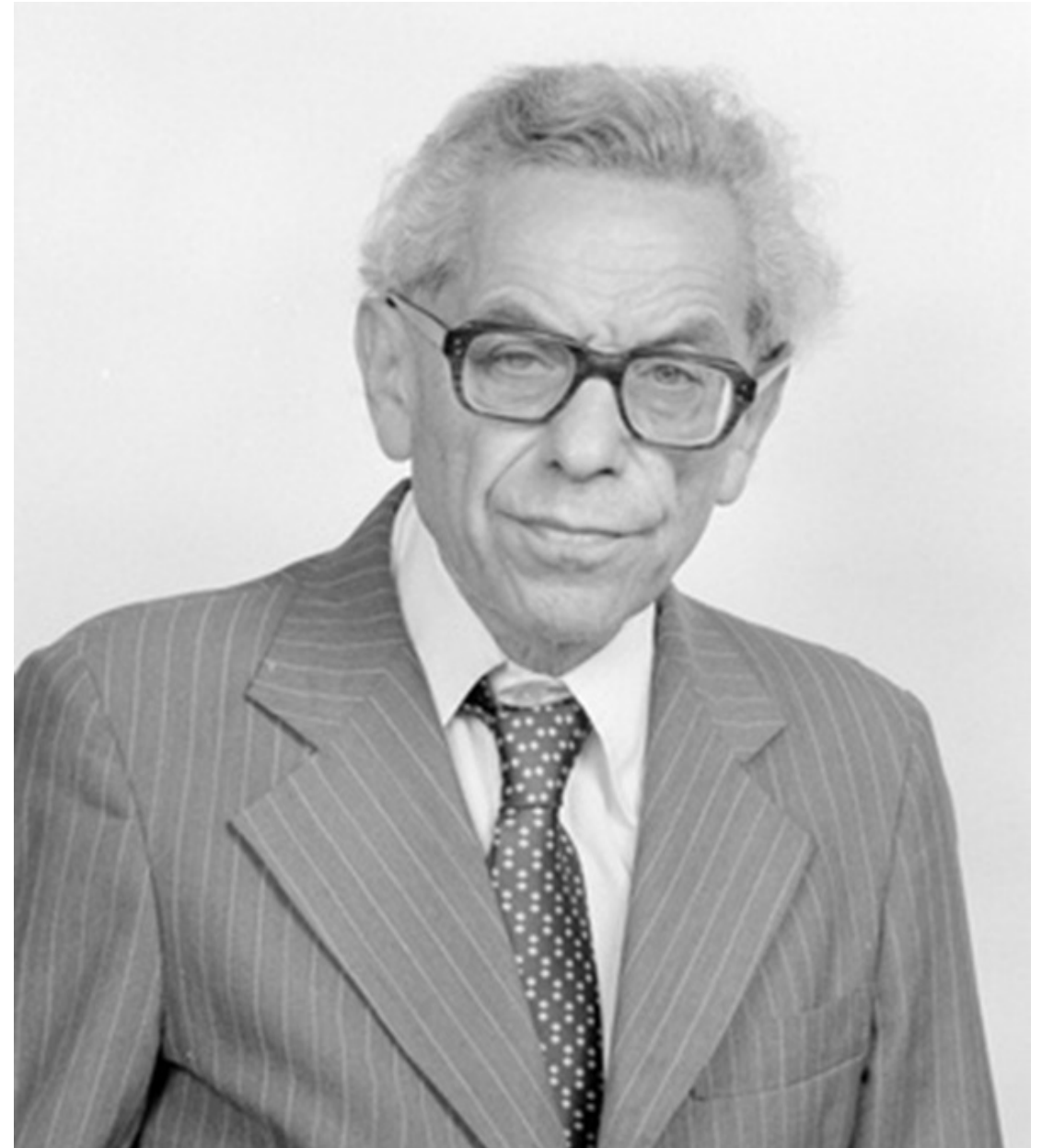


*6. ИИ решил одну из проблем Эрдеша
про решетку точек на плоскости.*

Задачи Эрдеша

Венгерский математик Пал Эрдеш (1913-1996) за свою жизнь сформулировал множество различных задач. Большинство из них относятся к комбинаторике, теории графов, дискретной геометрии и теории чисел.

В настоящее время список проблем Эрдеша официально оцифрован и ведётся математиком Томасом Блумом из Оксфорда на сайте erdosproblems.com. На платформе собрано более 1100 задач.



Задача Эрдеша о единичных расстояниях

Формально: пусть $\nu(P)$ — это число неупорядоченных пар точек из $P \subset \mathbb{R}^2$, между которыми расстояние составляет ровно 1 (здесь, конечно, не важно, единице или любому другому числу оно равно), и пусть

$$\nu(n) = \max_{|P|=n} \nu(P).$$

Как ведёт себя $\nu(n)$ при больших n ?

Нам понадобятся следующие обозначения:

- $\Omega(\bullet)$ - величина, растущая не медленнее, чем выражение в скобках (ограничение снизу);
- $O(\bullet)$ - величина, растущая не быстрее, чем выражение в скобках (ограничение сверху);
- $o(1)$ - бесконечно малая величина.

Оценки

- Пал Эрдеши (1946 год): $v(n) \leq O(n^2)$
- Пал Эрдеши (1946 год): $v(n) \geq \Omega(n)$
- Пал Эрдеши (1946 год): $v(n) \geq n^{(1 + C / \log \log n)}$
- Пал Эрдеши (1946 год): $v(n) \leq O(n^{(3/2)})$
- Эндре Семереди (1973 год): $v(n) = O(n^{(7/5)})$
- Йозеф Бек (1983 год): $v(n) = O(n^{(3/2)} / \sqrt{\log n})$
- Джоэл Спенсер, Эндре Семереди, Уильям Троттер (1984 год): $v(n) = O(n^{(4/3)})$

Гипотеза Эрдеша

$$v(n) \leq n^{(1 + o(1))},$$

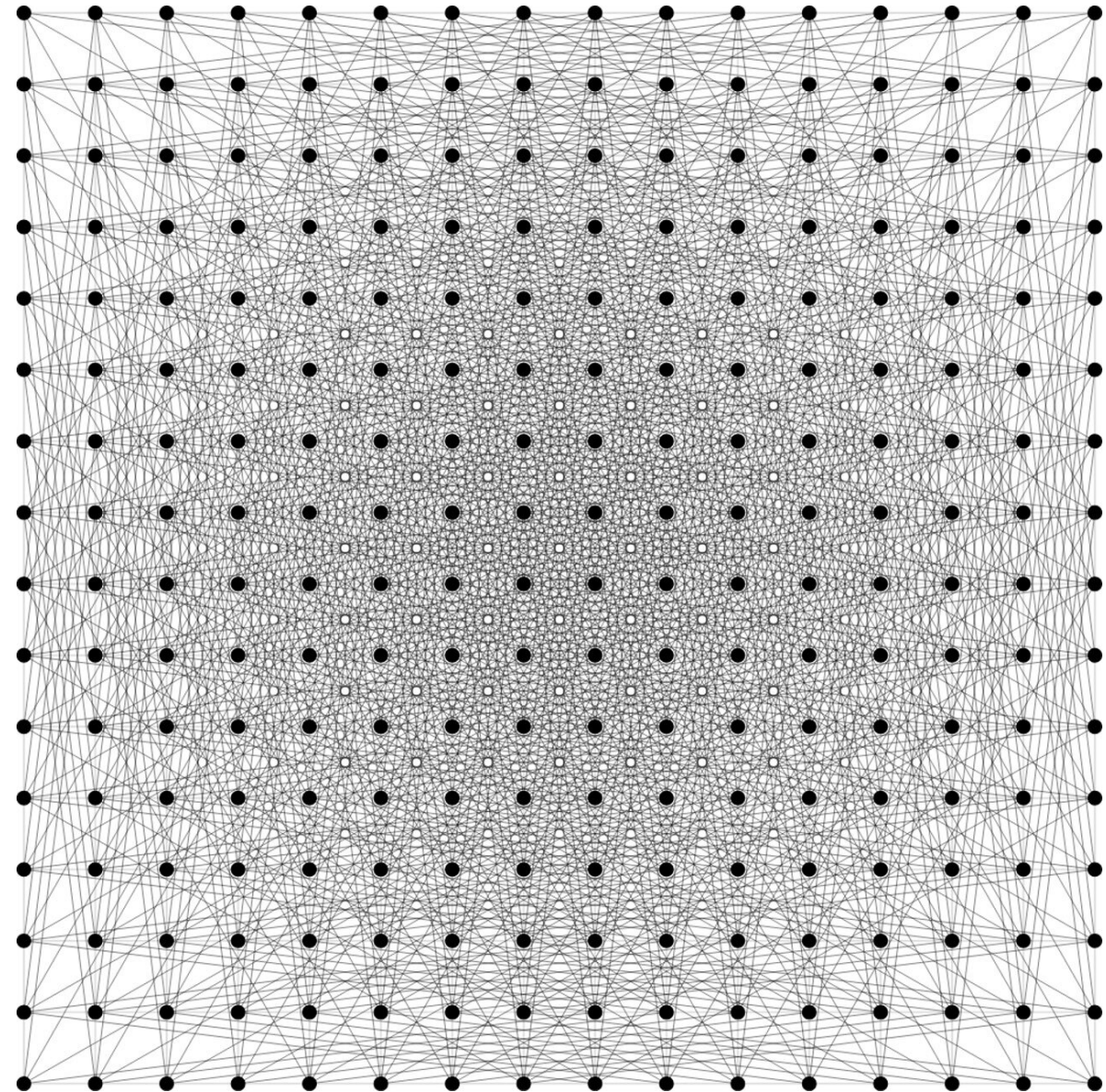
а скорее даже $v(n) \leq n^{(1 + C / \log \log n)}$

для некоторой абсолютной константы C .

Иначе говоря, Эрдеш считал, что его собственная нижняя оценка точна с точностью до медленно растущего множителя.

Квадратные сетки

Долгое время математики считали, что лучшими конфигурациями являются квадратные сетки, как на рисунке справа. Чёрные точки — это упорядоченное множество из n точек на плоскости, расположенных в узлах обычной квадратной решётки. Каждая линия на этом рисунке имеет строго одинаковую геометрическую длину, принятую за единицу. На первый взгляд кажется, что линии имеют разную длину, но это иллюзия, возникающая из-за масштабирования. На самом деле, каждый шаг решетки сильно меньше единицы, а именно равен $1/\sqrt{k}$, где k - специально выбранное число.



Решение ИИ

ИИ смог полностью перевернуть это представление, обнаружив новое семейство фракталоподобных геометрических конструкций с более высокой плотностью связей, предоставив строгое 18-страничное доказательство.

В итоге был получен следующий результат:

Теорема (OpenAI, 2026). Существует константа $\delta > 0$ и бесконечная последовательность натуральных чисел n , для которых $\nu(n) \geq n^{1+\delta}$.

Решение ИИ

Цитата:

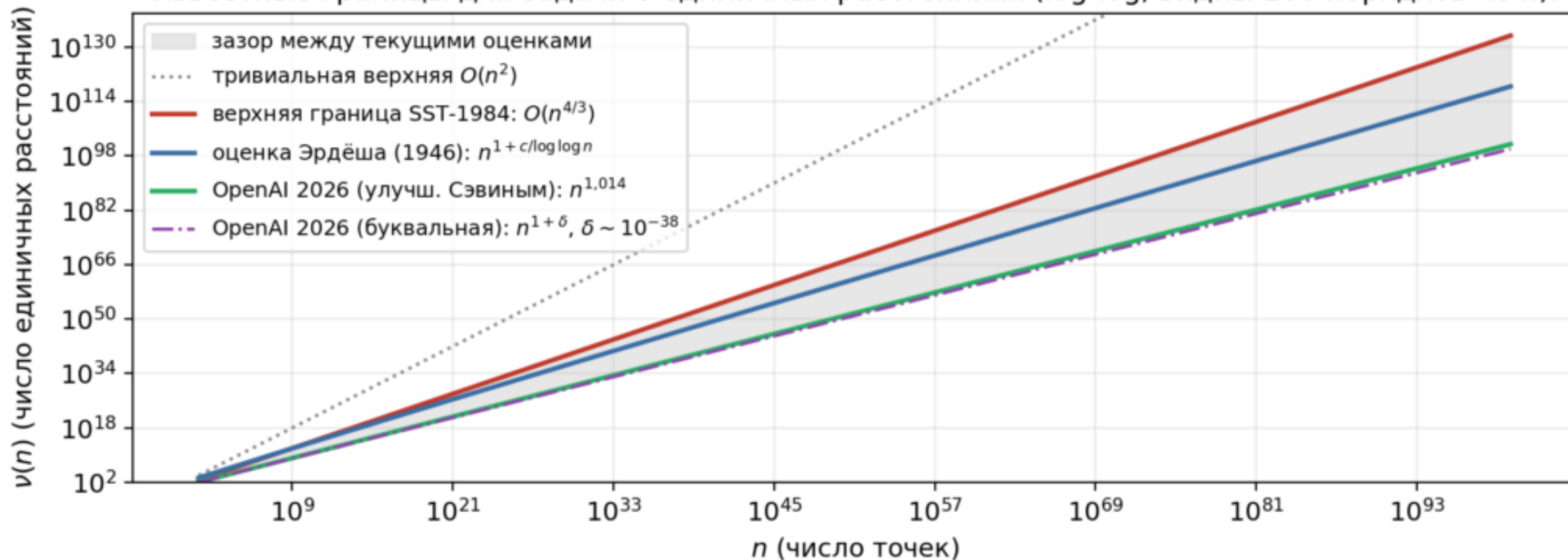
Во-первых, δ очень маленькая. В буквальном изложении доказательства GPT в сборнике комментариев Alon et al. (2026) для одного конкретного выбора параметров получилось $\delta = 6,24 \cdot 10^{-38}$ — это, конечно, число, которое не имеет никакого значения для физического мира.

Но потом Will Sawin поигрался с параметрами и нашёл более приличную константу $\delta = 0,014$, то есть $v(n) \geq n^{1,014}$. Впрочем, практического смысла этот контрпример всё равно не имеет, потому что он работает только для огромных n .

<https://sergeynikolenko.ru/blog/gpt-and-unit-distances-erdos-hypothesis>

Решение ИИ

Известные границы для задачи о единичных расстояниях (log-log, видны 100 порядков по n).



Решение ИИ

Разберемся поподробнее. Эрдеш предположил, что его оценка снизу (синяя линия на графике) асимптотически является и оценкой сверху, или, иными словами, $v(n)$ при $n \rightarrow \infty$ приближенно равно $n^{1 + C / \log \log n}$, т.е. максимальному количеству единичных расстояний в квадратной решетке. Однако даже при сравнительно малых (для асимптотической задачи) n на графике заметно, что величина, полученная ИИ при оценке снизу (пунктирная линия), растет быстрее, чем величина в оценке Эрдеша. При достаточно больших n пунктирная линия пересечет синюю (то есть количество единичных расстояний станет больше, чем в квадратной сетке) и продолжит расти. Тем самым, гипотеза оказалась неверной. При $n \rightarrow \infty$ оценка ИИ снизу существенно лучше, чем оценка, полученная Эрдем.

Какие задачи может решать ИИ?

В последнее время ИИ действительно хорошо справляется с вычислительными, алгебраическими, комбинаторными, «переборными» задачами, а также задачами по олимпиадной математике.

Но можем ли мы целиком доверять искусственному интеллекту?

Ошибки ИИ

Директор по продуктам компании Кевин Вейль в своём посте в социальной сети написал, что GPT-5 нашла решения для 10 ранее нерешённых задач Эрдеша и добилась прогресса ещё в одиннадцати.

Коллеги Вейля поддержали это утверждение, создав впечатление, что искусственный интеллект разработал доказательства для сложных вопросов теории чисел, что могло бы стать признаком его способности к самостоятельным научным открытиям. Однако математик Томас Блум немедленно опроверг эти заявления, назвав их «драматическим неверным толкованием». Он разъяснил, что по факту, GPT-5 лишь обнаружила уже существующие научные работы, а не сгенерировала новые доказательства.