

Упражнения к главе 1

Упражнение 1.1. Покажите, что в любой компании имеется не менее двух человек, у которых количества знакомых одинаковы.

Упражнение 1.2.

- (1) Города страны соединены авиалиниями. Из столицы выходит 21 линия, из города Дальний — одна, а из каждого из остальных городов — по двенадцать линий. Докажите, что из столицы можно долететь до города Дальний (возможно, с пересадками).
- (2) Покажите, что если в графе имеется ровно две вершины нечетной степени, то их можно соединить маршрутом.
- (3) Турист, который приехал в Москву на поезде, весь день гулял по городу. Поужинав на Манежной площади, он решил вернуться на вокзал, следуя по тем улицам, которые уже проходил нечетное число раз. Докажите, что такое возвращение возможно.

Упражнение 1.3. В компании, состоящей из пяти человек, среди любых трех человек найдутся двое знакомых и двое незнакомых друг с другом. Докажите, что компанию можно рассадить за круглым столом так, чтобы по обе стороны от каждого человека сидели его знакомые.

Упражнение 1.4. Известно, что в компании, состоящей не менее чем из четырех человек, каждый человек знаком не менее, чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что каждый из них будет сидеть рядом со своими знакомыми.

Упражнение 1.5.

- (1) В парке “Лотос” невозможно найти такой маршрут для прогулок по его дорожкам, который начинается и оканчивается в одной и той же точке, и каждую дорожку парка содержит не более раза. Докажите, что некоторые дорожки парка приводят в тупик.
- (2) Вершина степени 1 называется *висячей*. Связный граф без циклов называется *деревом*. Докажите, что в каждом дереве, содержащем хотя бы одно ребро, имеется висячая вершина.

Упражнение 1.6.

- (1) Вычислите соотношение между числом вершин и ребер произвольного дерева.
- (2) Администрация парка “Лотос” решила провести реконструкцию освещения парка. По новому проекту каждый перекресток и тупик должен будет освещаться четырьмя светильниками, а аллея, соединяющая два перекрестка или перекресток и тупик — шестью. Сколько светильников будет установлено, если в парке 18 перекрестков и тупиков.

Упражнение 1.7. *Насыщенным углеводородом* называется соединение углерода C , имеющего валентность 4, и водорода H , имеющего валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода.

Упражнение 1.8. Докажите, что если в связном графе существует невырожденный маршрут, проходящий через каждое ребро в точности один раз, то либо этот маршрут является эйлеровым циклом, либо в графе существуют в точности две вершины нечетной степени, остальные вершины имеют четную степень, а маршрут начинается и заканчивается в вершинах с нечетными степенями.

Упражнение 1.9. На пир при дворе короля Артура собрались рыцари, которые либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из рыцарей друзей больше, чем врагов. Доказать, что волшебник Мерлин может так рассадить рыцарей за круглым столом, что справа и слева от каждого из них будет сидеть друг.