Лекция 1

Элементы теории графов

План. Общее определение графов, вершины, ребра, отображение инцидентности, конечные графы, инцидентные вершины и ребра, вершины, соединенные ребром, смежные вершины, смежные ребра, петля, кратное ребро, кратная петля, кратность ребра, простой граф, лемма о рукопожатиях, степень вершины, задача Эйлера, маршрут, замкнутый маршрут, длина маршрута, путь, цикл, связный граф, эйлеров цикл или обход графа, эйлеров граф, критерий эйлеровости графа, простой цикл, гамильтонов цикл, гамильтонов граф, теорема Дирака — достаточное условие гамильтоновости, висячая вершина, дерево.

1.1 Основные понятия теории графов

Пусть V — произвольное (не обязательно конечное) множество, $\#V$ или $|V|$ — его мощность, $k \in \mathbb{N}$, а $V^{(k)}$ — семейство всех k-элементных подмножеств V. Отметим, что при $k > |V|$ множество $V^{(k)}$ пусто. Нам будут нужны множество $V^{(1)}$ одноэлементных и множество $V^{(2)}$ двухэлементных подмножеств V.

Определение 1.1. ***Графом*** G называется тройка $G = (V, E, \partial)$, состоящая из множеств V, E и отображения $\partial\colon E \to V^{(1)} \cup V^{(2)}$. Элементы из V называются ***вершинами*** графа G, элементы из E — ***ребрами*** графа G, а ∂ — ***отображением инцидентности***. Если задан граф G, но не введено обозначение для множеств вершин, ребер, или для отображения инцидентности, то соответствующие объекты будем обозначать $V(G)$, $E(G)$ и ∂_G.

Замечание 1.2. Всюду, если не оговорено противное, мы будем рассматривать ***конечные графы***, т.е. графы, у которых множества V и E конечны. Также, для краткости, вместо $\partial(e)$ мы будем писать ∂e.

Пример 1.3. Пусть $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\partial(e_i) = \{v_j, v_k\}$ для любых $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$. Тогда граф (V, E, ∂) можно рассматривать как модель треугольника с множеством вершин V и множеством сторон E. При этом отображение инцидентности ∂ показывает, к каким вершинам каждое из ребер e_i "приклеивается", например, $\partial e_1 = \{v_2, v_3\}$, так что e_1 крепится к v_2 и v_3.

Для наглядности графы представляют в виде точек-вершин, соединенных линиями-ребрами. На рис. 1.1 слева изображен граф из примера 1.3, а справа — граф более общего вида.

В теории графов принята следующая терминология (рис. 1.2):

- если $v \in \partial e$, то говорят, что вершина v и ребро e ***инцидентны***;
- если $\partial e = \{v, w\}$, то говорят, что вершины v и w ***смежны***, или же, что они ***соединены ребром*** e;
- ребра e и e' называются ***смежными***, если $\partial e \cap \partial e' \neq \emptyset$;
- ребро e, инцидентное ровно одной вершине, т.е. если $\#\partial e = 1$, называется ***петлей***;
- если для ребра e существует ребро $e' \neq e$ такое, что $\partial e = \partial e'$, то ребро e (а вместе с ним и ребро e') называется ***кратным***;

Кратностью ребра e называется количество всех ребер e', для которых $\partial e' = \partial e$. Ясно, что ребро e не является кратным тогда и только тогда, когда его кратность равна 1.

Определение 1.4. Граф без петель и кратных ребер называется ***простым***.

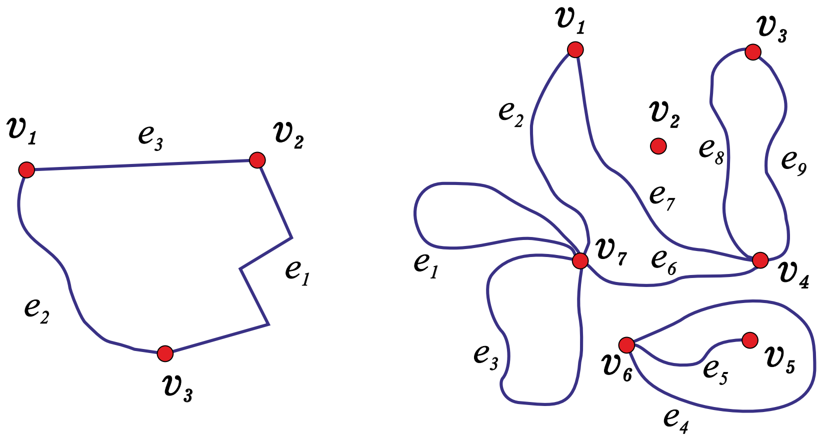

Рис. 1.1: Примеры изображения графов.

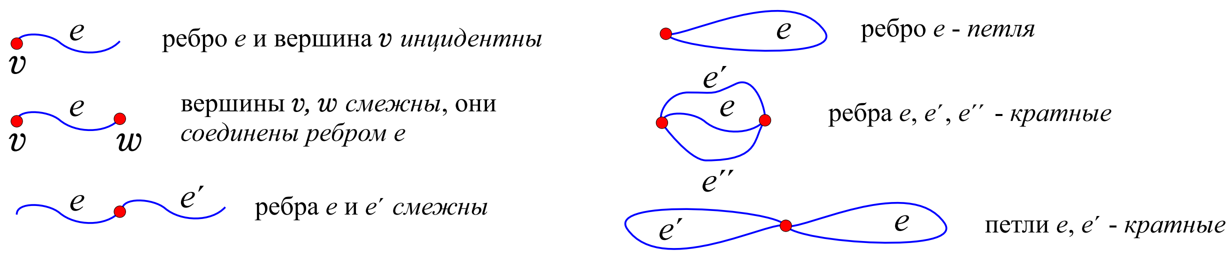

Рис. 1.2: Некоторые термины теории графов.

Замечание 1.5. Чтобы задать простой граф, достаточно задать множество вершин V и некоторое подмножество E в $V^{(2)}$.

В самом деле, пусть $G = (V, E, \partial)$ — простой граф. Тогда ∂ отображает множество E взаимно-однозначно на некоторое подмножество в $V^{(2)}$, что позволяет отождествить E и $\partial E \subset V^{(2)}$. Иными словами, ребро простого графа однозначно задается парой различных вершин, которые оно соединяет.

Таким образом, ***простой граф*** будем всегда представлять парой (V, E), где E — некоторое подмножество в $V^{(2)}$.

Для простого графа $G = (V, E)$ ребро $e = \{v, w\} \in E$ удобно обозначать vw или wv.

Имеется большое количество задач, которые естественно решаются на языке теории графов.

Задача 1.6 (Лемма о рукопожатиях)**.** Некоторые участники конференции, здороваясь, пожимают друг другу руки. Докажите, что число участников, каждый из которых совершил нечетное число рукопожатий, — четно.

Решение этой задачи использует понятие степени вершины и одну очень полезную формулу.

Определение 1.7. Пусть v — произвольная вершина некоторого графа. Тогда ***степенью*** $\deg v$ этой вершины называется количество инцидентных v ребер, не являющихся петлями, плюс удвоенное количество петель, инцидентных v:

$$\deg v = \#\big\{e \in E : \partial e \ni v,\ |\partial e| = 2\big\} + 2\#\big\{e \in E : \partial e = \{v\}\big\}.$$

Вычислим сумму степеней всех вершин графа. Заметим, что каждое ребро вносит в эту сумму вклад, равный 2, поэтому

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg v.$$

Обозначим через $V_k \subset V$ множество всех вершин степени k. Тогда $\sum\limits_{v\in V} \deg v = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k\,|V_k|$, откуда

$$2|E| = \sum_{k=0}^{\infty} k\,|V_k|. \tag{1.1}$$

Решение задачи 1.6. Рассмотрим граф G, который очевидным образом описывает рукопожатия: за вершины принимаем участников конференции, за ребра — все рукопожатия. При этом считаем, что ребро–рукопожатие инцидентно тем вершинам–участникам, которые это рукопожатие совершили. Тогда в задаче требуется доказать, что в нашем графе количество вершин с нечетными степенями четно. Иными словами, требуется доказать, что число $\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} |V_{2k+1}|$ четно.

Воспользуемся формулой (1.1):

$$2|E| = \sum_{k=0}^{\infty} k\,|V_k| = \sum_{k=0}^{\infty} 2k\,|V_{2k}| + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\,|V_{2k+1}| = \sum_{k=0}^{\infty} 2k\,|V_{2k}| + \sum_{k=0}^{\infty} 2k\,|V_{2k+1}| + \sum_{k=0}^{\infty} |V_{2k+1}|, \tag{1.2}$$

откуда мгновенно вытекает, что σ четно.

Замечание 1.8. Хотя естественно считать, что участники конференции пожимают друг другу руку лишь один раз (в графе G нет кратных ребер) и не пожимают руки самим себе (в графе G нет петель), т.е. G — простой граф, тем не менее, приведенные выше рассуждения были проведены для любого графа, не обязательно простого.

Отметим, что в теории графов имеется много интересных задач, решения которых основаны на вычислении различных соотношений между числовыми характеристиками графов. Некоторые из таких задач мы рассмотрим на семинаре.

1.2 Эйлеровы графы

Следующий круг вопросов связан с обходами графов. Вот пример классической задачи, которую решил Л. Эйлер, и с которой, как считается, берет начало теория графов.

Задача 1.9 (Задача Эйлера)**.** В городе Кёнигсберге на реке Прегель имеется 7 мостов (их расположение показано на рис. 1.3 слева). Можно ли, выйдя из дома, вернуться назад, пройдя каждый мост ровно один раз?

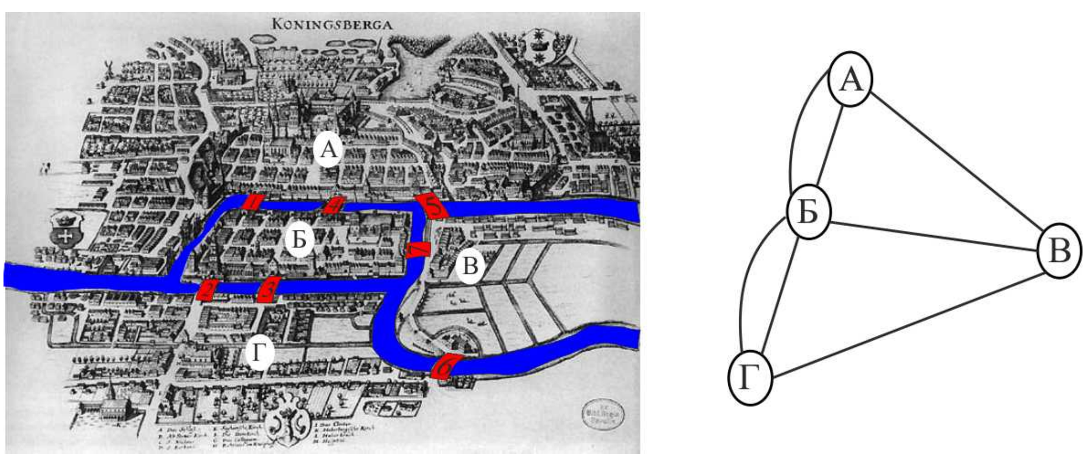

Рис. 1.3: Старинная карта Кёнигсберга. Буквами обозначены части города: А — Альтштадт, Б — Кнайпхоф, В — Ломзе, Г — Форштадт. Цифрами обозначены мосты (в порядке строительства): 1 — Лавочный, 2 — Зелёный, 3 — Рабочий, 4 — Кузнечный, 5 — Деревянный, 6 — Высокий, 7 — Медовый.

Эйлер изобразил части суши точками, а мосты — линиями, соединяющими эти точки и, таким образом, сформулировал эту задачу в терминах теории графов. Чтобы понять формулировку, нам понадобится ряд новых понятий.

Определение 1.10. ***Маршрутом, соединяющим вершины*** v_0 ***и*** v_k, называется последовательность

$$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_k, v_k,$$

где v_i — вершины графа, а e_i — его ребра, причем для каждого i ребро e_i соединяет вершины v_{i-1} и v_i. Отметим, что для $k = 0$ мы также считаем маршрут определенным и равным v_0. Этот маршрут не содержит ребер, соединяет v_0 с v_0 и называется ***вырожденным***. Если $k \geq 1$, то маршрут называется невырожденным. Маршрут ***замкнутый***, если $v_0 = v_k$, иначе маршрут ***незамкнутый***. В обоих рассмотренных случаях число k равно число ребер в маршруте и называется ***длиной маршрута***. Длина вырожденного маршрута равна 0.

Если в маршруте все вершины различны, то такой маршрут называется ***путем***. Если в замкнутом невырожденном маршруте различны все ребра e_i, то такой маршрут называется ***циклом***. Обратите внимание на то, что вырожденный маршрут v_0 циклом не является.

Граф называется ***связным***, если любые две его вершины можно соединить некоторым маршрутом. Отметим, что граф, содержащий ровно одну вершину и ни одного ребра является связным, так как v_0 с v_0 соединяются вырожденным маршрутом v_0.

Замечание 1.11. Если граф G не имеет кратных ребер, то при записи маршрута ребра указывать не обязательно, так как каждое ребро однозначно определяется вершинами, которые оно соединяет. Таким образом, в этом случае маршрут из определения 1.10 будем записывать в виде $v_0 v_1 \cdots v_k$ (без указания ребер и без разделения запятыми).

Пример 1.12. Приведем пример маршрута в графе с рис. 1.1, см. рис. 1.4:

$$\gamma = v_7, e_3, v_7, e_6, v_4, e_9, v_3, e_8, v_4, e_7, v_1, e_7, v_4.$$

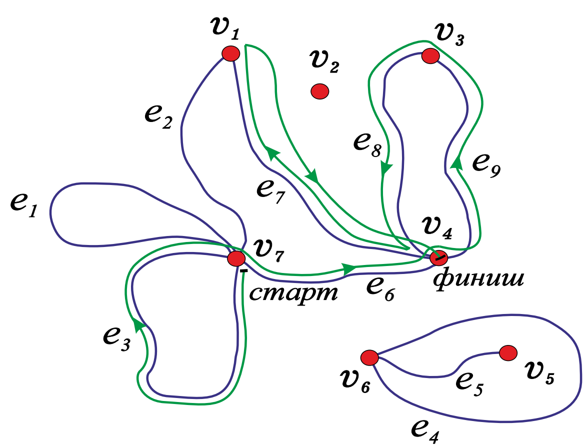

Рис. 1.4: Маршрут.

Этот маршрут выходит из вершины v_7 и проходит сначала по одной из кратных петель, а именно, по e_3; затем идет по ребру e_6 кратности 1 в вершину v_4; оттуда отправляется по одному из кратных ребер в v_3 и возвращается назад по другому из кратных ребер в v_4; затем он идет по ребру e_7 кратности 1 в вершину v_1 и сразу возвращается по этому же ребру назад в вершину v_4. Тем самым, при движении по маршруту допустимы всевозможные самопересечения. Этот маршрут не является замкнутым, так как начинается и заканчивается в разных вершинах. Но если его продолжить, добавив e_6, v_7, то он станет замкнутым. Длина незамкнутого маршрута γ равна 6, а длина замкнутого маршрута γ, e_6, v_7 равна 7.

В γ имеются совпадающие вершины, поэтому γ путем не является. Заметим, что в путь не может входить петля, а также путь не может содержать несколько ребер, соединяющих одни и те же вершины. Вот пример пути: $v_1, e_2, v_7, e_6, v_4, e_9, v_3$, причем этот путь имеет длину 3 и является максимальным в силу того, что его нельзя продолжить до более длинного пути.

Определенный выше замкнутый маршрут γ, e_6, v_7 не является циклом, потому что в нем некоторые ребра встречаются несколько раз (таким является ребро e_7). Примером цикла служит

$$v_7, e_3, v_7, e_6, v_4, e_9, v_3, e_8, v_4, e_7, v_1, e_2, v_7.$$

Рассматриваемый граф не является связным, так как, скажем, вершины v_6 и v_7 маршрутом не соединяются. Однако если выкинуть из этого графа вершины v_5, v_6, вместе с ребрами e_4 и e_5, то оставшийся граф будет связным.

Определение 1.13. Цикл в связном графе называется ***эйлеровым*** или ***обходом графа***, если он содержит все ребра графа. Граф, для которого существует эйлеров цикл, называется ***эйлеровым графом***.

Эйлеров граф можно нарисовать на плоском листе бумаги, не отрывая карандаша от бумаги и не проходя по одному ребру дважды (при этом некоторые вершины могут проходиться по несколько раз).

Итак, в задаче 1.9 спрашивается, существует ли для графа, изображенного на рис. 1.3 справа, эйлеров цикл, т.е. является ли этот граф эйлеровым. Мы решим общую задачу, из которой мгновенно вытекает, что в задаче 1.9 ответ отрицательный.

Теорема 1.14 (Критерий эйлеровости графа)**.** *Связный граф G, содержащий хотя бы одно ребро, — эйлеров, если и только если степени всех его вершин четны.*

Доказательство. Если G содержит только одну вершину, то все его ребра — петли. Так как G содержит хотя бы одной ребро, то имеется по крайней мере одна петля, и эйлеров цикл получается при последовательном обходе этих петель.

Пусть G содержит более одной вершины. Заметим, что выкидывание петли сохраняет связность графа и четности степеней его вершин. Кроме того, наличие не менее двух вершин и связность G не приводит к уничтожению эйлерова цикла, как в случае одновершинного графа. Таким образом, в рассматриваемом случае выкидывание петель сохраняет свойство графа содержать или не содержать эйлеров цикл, поэтому, не ограничивая общности, мы будем в оставшейся части доказательства предполагать, что граф G — **связный, содержит не менее двух вершин (и, значит, содержит по крайней мере одно ребро), и не имеет петель**.

Предположим, что G содержит эйлеров цикл $C = v_0, e_1, \cdots, e_k, v_k$, где $v_0 = v_k$. Пусть v — произвольная вершина графа G. Тогда в цикле C каждое включение вершины v смежно двум ребрам этого цикла: предыдущего и последующего (если $v = v_0 = v_k$, то предыдущим является e_k, а последующим — e_1). В силу отсутствия петель, эти ребра приходят в вершины, отличные от v. Так как в цикле все ребра различны, все ребра, инцидентные v, разбиваются на пары. Наглядно это можно представить так: мы обходим ребра графа по циклу C и группируем в пары последовательные ребра входа в v и выхода из v. Эти пары не пересекаются, поэтому степень вершины v четна.

Для доказательства обратного утверждения покажем справедливость следующей леммы.

Лемма 1.15. *Каждый граф, у которого степени всех вершин четные и имеется хотя бы одно ребро, содержит цикл.*

Доказательство. Действительно, если в графе есть петля, то она образует цикл. Пусть теперь в графе петель нет. Начнем с произвольного ребра e_1, соединяющего вершины v_0 и v_1. В силу четности степени вершины v_1 и отсутствия петель, существует ребро $e_2 \neq e_1$, соединяющее v_1 с некоторой вершиной v_2. Если v_2 совпала с v_0, то получили цикл. Иначе продолжаем процесс. В силу конечности числа вершин, на некотором шаге добавленная вершина совпадет с одной из уже имеющихся, и мы получим искомый цикл. □

Вернемся к доказательству теоремы. Граф G удовлетворяет условию леммы 1.15, поэтому в G содержится некоторый цикл C_1. Выкинув все ребра цикла C_1 из $E(G)$, вновь получим граф, степени вершин которого четны. Если в полученном графе остались ребра, снова применим лемму 1.15 и построим цикл C_2. Отметим, что циклы C_1 и C_2 не имеют общих ребер. Продолжая этот процесс, мы представим множество ребер $E(G)$ графа G в виде объединения попарно непересекающихся множеств $E(C_i)$, где C_i — построенные циклы. Так как граф G связен, то для каждого цикла C_i имеется отличный от него цикл C_j такой, что $V(C_i) \cap V(C_j) \neq \emptyset$ (убедитесь в этом).

Однако, каждые два реберно непересекающихся цикла, имеющих хотя бы одну общую вершину, всегда объединяются в один цикл: достаточно стартовать с общей вершины, пройти сначала один цикл, а затем другой. Таким образом, мы последовательно объединим все циклы C_i в один и получим эйлеров цикл. □

Задача 1.16. Докажите, что если в связном графе существует невырожденный маршрут, проходящий через каждое ребро в точности один раз, то либо этот маршрут является эйлеровым циклом, либо в графе существуют в точности две вершины нечетной степени, остальные вершины имеют четную степень, а маршрут начинается и заканчивается в вершинах с нечетными степенями.

1.3 Гамильтоновы графы

Обсудим еще одну задачу, связанную с обходами. Предварительно дадим необходимые определения.

Определение 1.17. Цикл называется ***простым***, если все его вершины (кроме первой и последней) различны. Простой цикл, проходящий через все вершины графа, называется ***гамильтоновым***. Граф, содержащий некоторый гамильтонов цикл, называется ***гамильтоновым***.

Задача о поиске гамильтонова цикла была предложена У. Гамильтоном в 1859 году в форме игры, которая называлась “Кругосветное путешествие”. Рассмотрим граф, изображенный на рис. 1.5, вершинам которого будем представлять городами, а ребра — соединяющими города дорогами. Требуется, начав с некоторого города и переходя от одного города к другому по имеющимся дорогам, посетить каждый город ровно один раз и вернуться в исходный.

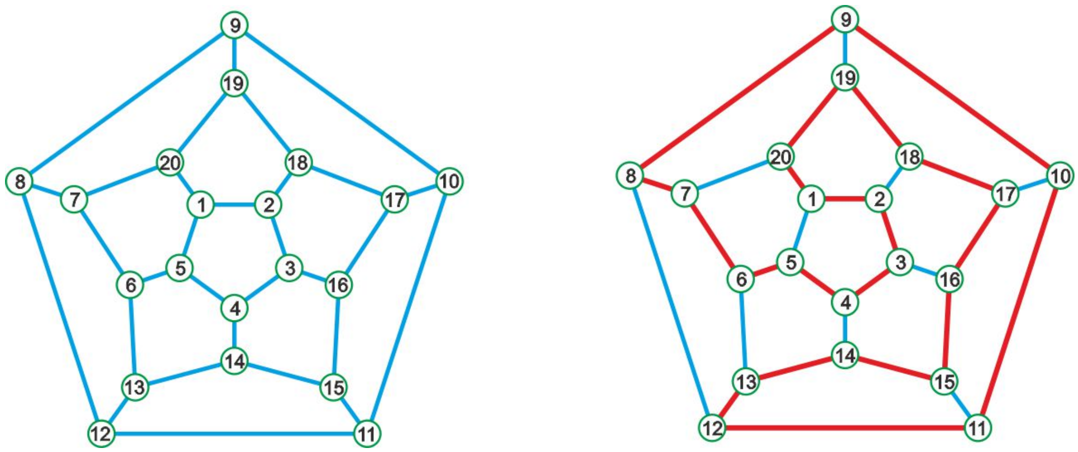

Рис. 1.5: Игра “Кругосветное путешествие”, предложенная У. Гамильтоном.

Приведем ряд простых замечаний.

(1) Каждый гамильтонов граф связный.

(2) Добавление к гамильтонову графу петель или увеличение кратности его ребер оставляет граф гамильтоновым.

(3) Если гамильтонов цикл проходит через петлю, то в этом графе имеется ровно одна вершина; обратно, гамильтоновы графы с одной вершиной — это все одновершинные графы, имеющие одну или более петель.

(4) Таким образом, если гамильтонов граф G содержит более одной вершины, то ни один его гамильтонов цикл не проходит ни через одну петлю. Следовательно, граф G, содержащий более одной вершины, — гамильтонов, если и только если граф, полученный из G выбрасыванием всех его петель, — гамильтонов.

(5) Если гамильтонов цикл содержит два ребра, соединяющих одну и ту же пару вершин, то такой граф имеет ровно две вершины; обратно, каждый граф, имеющий ровно две вершины и такой, что эти вершины соединены не менее чем двумя ребрами, является гамильтоновым.

(6) Таким образом, если гамильтонов граф G содержит более двух вершин, то в его гамильтонов цикл не могут входить два ребра, соединяющих одну и ту же пару вершин. Следовательно, граф G, содержащий более двух вершин, — гамильтонов, если и только если граф, полученный из G выбрасыванием из каждого семейства ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин, всех ребер, кроме одного, — гамильтонов.

Таким образом, произвольный граф G, содержащий не менее трех вершин, гамильтонов тогда и только тогда, когда гамильтоновым является граф G', полученный из G отбрасыванием всех петель, а также выбрасыванием из каждого семейства ребер, соединяющих одну и ту же пару вершин, всех ребер, кроме одного. Отметим, что каждый такой граф G' является простым.

Итак, при изучении гамильтоновых графов можно ограничиться простыми графами.

Пример 1.18. ***Полным графом*** K_n называется простой граф с n вершинами, в котором каждая пара вершин смежна, т.е. любые две различные вершины соединены единственным ребром. Легко видеть, что при $n \geq 3$ каждый полный граф K_n — гамильтонов.

Отметим, что до сих пор не известно ни одного критерия, описывающего гамильтоновы графы. Многочисленные условия, являющиеся по отдельности или необходимыми, или достаточными, можно, например, найти в [2] или [3]. Приведем и докажем одно из этих условий.

Теорема 1.19 (Дирак)**.** *Пусть $G = (V, E)$ — простой граф с $n \geq 3$ вершинами. Предположим, что степени вершин графа G не меньше $n/2$. Тогда граф G гамильтонов, в частности, граф G — связный.*

Доказательство. Пусть $\gamma = v_0 v_1 \cdots v_\ell$ — путь в графе G, имеющий максимально возможную длину среди всех путей в G. Покажем, что G содержит простой цикл C длины $\ell + 1$.

Так как $n \geq 3$, то степени вершин графа G не меньше 2 и, значит, $\ell \geq 2$. Отсюда вытекает, что если в графе есть ребро $v_0 v_\ell$, то $v_0 v_1 \cdots v_\ell v_0$ является циклом, который можно взять в качестве искомого C.

Пусть теперь $v_0 v_\ell \notin E$. Положим

$$X = \{v_i : v_0 v_{i+1} \in E\}, \quad Y = \{v_j : v_\ell v_j \in E\}.$$

Обратите внимание на сдвиг индекса в определении множества X. Из-за него, например, $v_0 \in X$, но $v_\ell, v_{\ell-1} \notin X$. Также легко видеть, что $v_0, v_\ell \notin Y$.

Заметим, что каждая смежная с v_0 вершина w графа G лежит на γ, так как иначе $w v_0 v_1 \cdots v_\ell$ — путь в G длины $\ell + 1$, что противоречит максимальности длины пути γ. Теперь нетрудно понять, что множество вершин, смежных с v_0, и множество X содержат одинаковое количество элементов, т.е. $|X| = \deg v_0 \geq n/2$. Аналогично, множество вершин, смежных с v_ℓ, т.е. множество Y, также содержится во множестве вершин пути γ, поэтому $|Y| = \deg v_\ell \geq n/2$. Следовательно, $|X| + |Y| \geq n$.

Теперь докажем, что множества X и Y пересекаются. Напомним, что вершина v_ℓ не принадлежит ни X, ни Y, поэтому $v_\ell \notin X \cup Y$ и, значит, $X \cup Y \neq V$, откуда $|X \cup Y| < n$. Но тогда если бы X и Y не пересекались, то выполнялось бы равенство $|X \cup Y| = |X| + |Y|$. Учитывая доказанные выше неравенства, мы получили бы $n > |X \cup Y| = |X| + |Y| \geq n$. Следовательно, множества X и Y пересекаются.

Пусть $v_k \in X \cap Y$. Раньше мы показали, что $v_\ell, v_{\ell-1} \notin X$; кроме того, $v_0 \notin Y$. Поэтому $0 < k < \ell - 1$.

Искомый цикл C строится следующим образом, см. рис. 1.6. Сначала из v_0 вдоль пути γ идем в вершину v_k, из нее по ребру $v_k v_\ell$ (оно существует, так как $v_k \in Y$) идем в v_ℓ, затем по γ идем в обратном направлении из v_ℓ в v_{k+1}, наконец, соединяем v_{k+1} с v_0 ребром $v_{k+1} v_0$ (оно существует, так как $v_k \in X$). Легко видеть, что длина построенного цикла C равна $\ell + 1$. Кроме того, цикл C простой, так как все его вершины — это вершины пути γ, каждая из которых (кроме первой и последней) проходится циклом C ровно один раз.

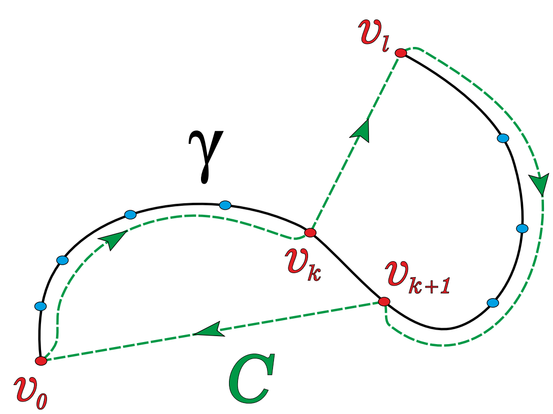

Рис. 1.6: Построение цикла C.

Докажем теперь, что цикл C — гамильтонов. Предположим противное, т. е. что существует вершина $x \in V$, через которую C не проходит. Покажем, что x должна быть смежна с некоторой вершиной v_p из C. Действительно, если это не так, то вне цикла C лежит вершина x и не менее чем $n/2$ смежных с x вершин, т.е. не менее $n/2 + 1$ вершина. С другой стороны, вершина v_0 и не менее чем $n/2$ смежных в v_0 вершин лежат в C, поэтому

C содержит не менее $n/2+1$ вершины. Таким образом, в графе G содержится не менее $n+2>n$ вершин, противоречие.

Итак, x и некоторая v_p смежны, и тогда путь, полученный из $xv_p \cup C$ выкидыванием любого их двух ребер цикла C, инцидентных v_p, будет иметь длину $\ell+1$, что противоречит предположению о максимальности ℓ. Полученное противоречие показывает, что такая вершина x не существует и, значит, C проходит через все вершины графа G, т. е. C — гамильтонов цикл. $\square$

Литература к главе 1

[1] Емеличев В.А. и др. *Лекции по теории графов*, М.: Наука, 1990.

[2] Graham R.L., Groetschel M., Lovasz L. *Handbook of combinatorics*, Elsevier, 1995, vol. 1.