

Упражнения к семинару 11 “Задачи от А.А.Ошемкова”

Галочками отмечены задачи, которые мы разбирали. В любом случае, предлагается просмотреть все, и если из отмеченных задач что-то осталось неясным, пометьте их для себя и дайте мне знать на семинаре, чтобы мы эти задачи еще раз разобрали. Остальные задачи — Ваше домашнее задание.

- ✓ **Упражнение 11.1.** Доказать, что сумма степеней вершин любого графа равна удвоенному количеству его ребер. (В частности, число вершин нечетной степени всегда четно.)
- ✓ **Упражнение 11.2.** Доказать, что у дерева, содержащего хотя бы одно ребро, всегда есть вершина степени 1.
- Упражнение 11.3.** Доказать, что связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число его вершин V на 1 больше, чем, число его ребер P .
- Упражнение 11.4.** Перечислить все деревья с 6 вершинами.
- Упражнение 11.5.** Доказать, что максимальное число ребер, которое можно удалить из связного графа G так, чтобы он остался связным, равно $1 - \chi(G)$.
- ✓ **Упражнение 11.6.** Доказать, что любой граф можно вложить в (трехмерное) пространство. Более того, если граф не содержит петель и кратных ребер, то его можно вложить в пространство так, что образ каждого ребра будет прямолинейным отрезком.
- ✓ **Упражнение 11.7.** Цикл, проходящий по всем ребрам графа, называется эйлеровым. Доказать, что в графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны.
- Упражнение 11.8.** Доказать, что вершины графа можно раскрасить в два цвета так, чтобы вершины, соединенные ребром, были раскрашены в разные цвета, тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.
- ✓ **Упражнение 11.9.** Доказать, что кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2(x_1, x_2)$ непрерывна (в смысле определения 1.2) тогда и только тогда, когда непрерывны функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, где $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t))$.
- Упражнение 11.10.** Доказать, что функция непрерывна на графе тогда и только тогда, когда ее ограничение на каждое ребро является непрерывной функцией.
- Упражнение 11.11.** Доказать, что если в качестве множества M в лемме 1.2 взять замкнутый круг, то первая точка на кривой, принадлежащая этому кругу (о существовании которой говорит лемма), лежит на граничной окружности этого круга.
- ✓ **Упражнение 11.12.** Доказать, что отрезок нельзя представить в виде объединения двух его открытых непустых непересекающихся подмножеств.
- ✓ **Упражнение 11.13.** Для любого подмножества плоскости A расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^2$ до A определяется формулой $d(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$ (где ρ — обычное евклидово расстояние между точками). Доказать, что функция $f(x) = d(x, A)$, заданная на плоскости, непрерывна.
- ✓ **Упражнение 11.14.** Доказать, что пара радиусов, проведенных в круге, разбивают его ровно на две компоненты линейной связности.
- ✓ **Упражнение 11.15.** Доказать, используя теорему о промежуточном значении, что граница выпуклого многоугольника разбивает плоскость ровно на две компоненты. [Под многоугольником здесь можно понимать пересечение конечного числа замкнутых полуплоскостей, причем предполагается, что это пересечение содержит хотя бы одну точку вместе с ее окрестностью. Граница многоугольника состоит из тех частей прямых, задающих эти полуплоскости, которые принадлежат многоугольнику.]
- Упражнение 11.16.** Доказать, что любая локально постоянная функция на отрезке равна константе.
- ✓ **Упражнение 11.17.** Доказать, что K_5 не планарен, с помощью следствия 1.1 из теоремы Жордана для ломаных (т.е. не используя формулу Эйлера).
- ✓ **Упражнение 11.18.** Доказать, что для плоского графа без петель и кратных ребер справедливы неравенства $\frac{3}{2}G \leq P \leq 3V - 6$.

- ✓ **Упражнение 11.19.** Доказать, что в планарном графе без петель и кратных ребер есть вершина степени ≤ 5 .
- ✓ **Упражнение 11.20.** Доказать, что граф без петель и кратных ребер, у которого 10 вершин и все они имеют степень 5, не планарный.

Упражнение 11.21. Завершить доказательство теоремы 1.1, рассмотрев случай, когда граф имеет петли.

- ✓ **Упражнение 11.22.** Доказать теорему о пяти красках: вершины любого планарного графа без петель можно раскрасить в пять цветов так, чтобы вершины, соединенные ребром, были раскрашены в разные цвета.
- ✓ **Упражнение 11.23.** Доказать, что следующие графы попарно не гомеоморфны: отрезок; петля (граф с одной вершиной и одним ребром); граф с одной вершиной степени 3 и тремя ребрами, сходящимися в этой вершине.

Упражнение 11.24. Доказать, что при гомеоморфизме графов вершина степени k переходит в вершину степени k , если $k \neq 2$.

Упражнение 11.25. Доказать следующее обобщение формулы Эйлера: для любого плоского графа верно соотношение $V - P + F = 1 + k$, где k — число компонент графа.

Упражнение 11.26. Доказать характеристические свойства выпуклого многогранника: то, что для любой грани он лежит по одну сторону от плоскости, содержащей эту грань, и то, что он совпадает с выпуклой оболочкой вершин.