

Упражнения к семинару 10 “Регулярные кривые”

Упражнение 10.1. Докажите, что любые две непрерывные кривые на плоскости (замкнутые или нет) непрерывно гомотопны.

Упражнение 10.2. Покажите, что отношение гомотопности является эквивалентностью на каждом классе кривых: непрерывных, гладких, регулярных, замкнутых или нет. Покажите также, что возрастающая замена параметра, а также смещение начальной точки в случае замкнутой кривой, приводят к кривым, гомотопным исходной (опять же, в каждом классе рассматриваемых кривых).

Упражнение 10.3. Докажите, что любые две незамкнутые регулярные кривые на плоскости регулярно гомотопны.

Упражнение 10.4. Докажите, что любые две незамкнутые регулярные кривые на плоскости с одинаковыми началом и концом регулярно гомотопны с фиксированными концами.

Упражнение 10.5. Постройте регулярную гомотопию

(1) окружности и эллипса;

(2) эллипса и овала $\frac{x_1^4}{a_1^4} + \frac{x_2^4}{a_2^4} = 1$,

выбрав подходящие регулярные параметризации этих кривых.

Упражнение 10.6. Вычислите число вращения кривой

(1) $\gamma(t) = (\frac{1}{2} \cos t, \sin t)$;

(2) $\gamma(t) = (2 \cos t, -\sin t)$;

(3) $\gamma(t) = (\cos t, \sin 2t)$,

где t меняется на отрезке $[0, 2\pi]$.