

## Упражнения к семинару 7 “Элементы сферической геометрии”

Все фигуры будем рассматривать на единичной сфере. *Сферической прямой* называется пересечение сферы и плоскости, проходящей через центр этой сферы. *Сферический отрезок* — это каждая из двух частей, на которые пара точек  $A$  и  $B$  разбивает сферическую прямую (пару  $A, B$  мы включаем в каждый из сферических отрезков). *Сферическая ломаная  $L$*  — конечная последовательность точек сферы, называемых *вершинами  $L$* , и соединяющих последовательные точки сферических отрезков, называемых *ребрами  $L$* . В отличие от случая евклидова пространства, сферическая ломаная не задается однозначно своими вершинами. Замкнутая вложенная сферическая ломаная  $L$  разбивает сферу на две компоненты (сферическая теорема Жордана). При этом объединение  $L$  и одной из этих компонент называется *сферическим многоугольником*. Таким образом,  $L$  ограничивает два сферических многоугольника. В следующей задаче под *треугольником* понимается многоугольник с тремя вершинами.

**Упражнение 7.1.** Опишите все тройки точек сферы, являющиеся вершинами некоторых сферических треугольников. Сколько различных сферических треугольников могут иметь одни и те же вершины?

Далее под сферическим треугольником мы понимаем треугольник, у которого все стороны и все углы положительны и меньше  $\pi$ .

**Упражнение 7.2.** Докажите две теоремы косинусов для сферического треугольника:

$$(1) \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma,$$

$$(2) \cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c,$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  — его углы, противоположные сторонам длин  $a, b, c$  соответственно.

**Упражнение 7.3.** Докажите теорему синусов для сферического треугольника (в обозначениях предыдущей задачи):

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

**Упражнение 7.4.** Докажите неравенство треугольника для сферического треугольника.

**Упражнение 7.5.** Докажите, что у сферического треугольника

- (1) против равных сторон лежат равные углы;
- (2) против равных углов лежат равные стороны;
- (3) против большего угла лежит большая сторона;
- (4) против большей стороны лежит больший угол.

**Упражнение 7.6** (Мнемоническое правило Непера). Пусть  $W$  — прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$ , гипотенузой  $c$  и углами  $\alpha$  и  $\beta$ , лежащими напротив катетов  $a$  и  $b$  соответственно. Положим  $\bar{a} = \pi/2 - a$ ,  $\bar{b} = \pi/2 - b$ . Под *элементами  $W$*  будем понимать его углы  $\alpha$  и  $\beta$ , а также его стороны, однако вместо катетов  $a$  и  $b$  будем рассматривать их “дополнения”  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  до  $\pi/2$ . Расположим вдоль окружности элементы  $W$  в том порядке, в котором они встречаются при обходе самого  $W$ , а именно, в порядке  $\alpha, c, \beta, \bar{a}, \bar{b}$ . Докажите, что

- (1) для трех смежных элементов  $W$  косинус среднего элемента равен произведению котангенсов соседних;
- (2) для трех несмежных элементов косинус элемента, расположенного отдельно от других двух, равен произведению их синусов.

**Упражнение 7.7.** Вокруг всякого ли треугольника на сфере можно описать окружность?

**Упражнение 7.8.** Даны стороны сферического треугольника. Найдите радиус описанной окружности.

**Упражнение 7.9.** Докажите, что для сферического треугольника с углами  $\alpha, \beta, \gamma$  и площадью  $S$  имеет место равенство

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + S.$$