

Упражнения к семинару 6 “Многогранники”

Упражнение 6.1. Пусть W — выпуклый многогранник, и пусть v , e и f обозначают количества вершин, ребер и граней этого многогранника. Докажите, что

- (1) $e + 6 \leq 3v$;
- (2) $e + 6 \leq 3f$;
- (3) $f + 4 \leq 2v$;
- (4) $v + 4 \leq 2f$;
- (5) многогранник W имеет хотя бы одну треугольную, четырехугольную или пятиугольную грань;
- (6) многогранник W имеет хотя бы один трехгранный, четырехгранный или пятигранный пространственный угол (т.е. вершину, в которой стыкуются 3, 4 или 5 граней);
- (7) многогранник W имеет или хотя бы одну треугольную грань, или один трехгранный пространственный угол;
- (8) сумма всех плоских углов граней многогранника W равна $2\pi(v - 2)$.

Определение. Пусть P — вершина произвольного многогранника W , а $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — величины углов всех граней W при этой вершине. Тогда *кривизной в вершине P* называется величина $K(P) = 2\pi - \sum_i \alpha_i$.

Упражнение 6.2. Докажите, что у выпуклого многогранника сумма кривизн $K(P)$ по всем его вершинам P равна 4π .

Упражнение 6.3. Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе ∂W выпуклого многогранника W . Докажите, что $\partial W \setminus L$ состоит из двух компонент.

Определение. Пусть $L \subset \mathbb{R}^3$ — замкнутая ломаная без самопересечений, лежащая на границе ∂W выпуклого многогранника W , а Ω_1 и Ω_2 — компоненты множества $\partial W \setminus L$. Тогда множества $M_i = L \cup \Omega_i$ называются *многоугольниками на ∂W* . Для многоугольника M_i точки из Ω_i называются *внутренними*, из Ω_j — *внешними*, а из L — *границными*, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$. Положим $\text{Int } M_i = \Omega_i$, $\text{Out } M_i = \Omega_j$ и $\partial M_i = L$.

Определение. Пусть X — многоугольник на поверхности ∂W выпуклого многогранника W , а P — некоторая вершина многоугольника X . Тогда *угол α_P многоугольника X в вершине P* определяется так. Если P лежит внутри грани, то α_P — это угол на плоскости, содержащей эту грань. Если же P попала или на ребро, или в вершину из ∂W , то угол в этой вершине складывается из всех углов многоугольников, полученных пересечением X и содержащих эту вершину граней (конечно, углы рассматриваются в этой вершине).

Упражнение 6.4. Рассмотрим n -угольник X , лежащий на границе выпуклого многогранника. Докажите, что его сумма углов равна $\pi(n - 2)$ плюс сумма кривизн $K(P)$ по всем вершинам многогранника, попавшим внутрь X .

Упражнение 6.5. Существует ли тетраэдр с гранями F_1, \dots, F_4 такой, что площадь каждой F_i равна 1, грани F_1 и F_2 перпендикулярны друг другу, грани F_3 и F_4 также перпендикулярны друг другу, а угол между ребром $e_{12} = F_1 \cap F_2$ и $e_{34} = F_3 \cap F_4$ равен 37° ? Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

Упражнение 6.6. Докажите, что выпуклый многогранник центрально симметричен, если и только если для каждой его грани существует параллельная ей грань той же площади. Указание: воспользуйтесь теоремой Минковского.

Определение. Пусть X — произвольное подмножество \mathbb{R}^n . Наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее X , называется *выпуклой оболочкой X* и обозначается $\text{conv } X$. Иными словами, $\text{conv } X$ — это такое выпуклое подмножество \mathbb{R}^n , что $X \subset \text{conv } X$, и если $Y \supset X$ — выпуклое подмножество \mathbb{R}^n , то $\text{conv } X \subset Y$. Таким образом, $\text{conv } X$ — это пересечение всех выпуклых подмножеств \mathbb{R}^n , содержащих X .

Упражнение 6.7. Докажите, что выпуклый многогранник совпадает с выпуклой оболочкой множества своих вершин.

Упражнение 6.8. Докажите, что многогранник является выпуклым тогда и только тогда, когда для любой его грани он лежит по одну сторону от плоскости, содержащей эту грань.