

## Упражнения к семинару 2 “Элементы топологии (часть 1)”

**Упражнение 2.1** (Аксиомы топологии). Проверьте, что семейства множеств, которые мы называли

- (1) топологией Зарисского,
- (2) индуцированной топологией,
- (3) топологией декартова произведения,
- (4) метрической топологией

действительно удовлетворяют всем аксиомам топологии.

**Упражнение 2.2** (Замкнутые множества). Докажите, что в метрическом пространстве  $X$

- (1) замкнутый шар  $B_r(x)$  — замкнутое множество;
- (2) сфера  $S_r(x)$  — замкнутое множество.

**Упражнение 2.3** (База). Покажите, что семейство  $\mathcal{B} \subset 2^X$  является базой некоторой топологии, определенной на множестве  $X$ , если и только если выполняются следующие два условия:

- $\cup_{B \in \mathcal{B}} B = X$ ;
- для любых пересекающихся  $B, B' \in \mathcal{B}$  и любой точки  $x \in B \cap B'$  существует  $C \in \mathcal{B}$ , для которого  $x \in C \subset B \cap B'$ .

**Упражнение 2.4** (Хаусдорфовость). Докажите, что

- (1) метрическая, в частности, стандартная топология на  $\mathbb{R}^n$  хаусдорфова;
- (2) индуцированная топология на подмножестве хаусдорфова пространства, в частности, на подмножестве  $\mathbb{R}^n$  хаусдорфова;
- (3) топология Зарисского на бесконечных множествах не хаусдорфова.

**Упражнение 2.5** (Непрерывные отображения). Докажите следующие утверждения.

- (1) Каждое отображение  $f: X \rightarrow Y$  из произвольного топологического пространства  $X$  в антидискретное топологическое пространство  $Y$  непрерывно.
- (2) Каждое отображение  $f: X \rightarrow Y$  дискретного топологического пространства  $X$  в любое топологическое пространство  $Y$  непрерывно.
- (3) Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — отображение топологических пространств,  $x \in X$  — произвольная точка, а  $\mathcal{B}_x$  и  $\mathcal{B}_{f(x)}$  — любые базы окрестностей точек  $x$  и  $f(x)$  соответственно. Тогда отображение  $f$  непрерывно в точке  $x$ , если и только если для любой окрестности  $V \in \mathcal{B}_{f(x)}$  существует окрестность  $U \in \mathcal{B}_x$ , для которой  $f(U) \subset V$ .
- (4) Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — отображение метрических пространств и  $x \in X$ , тогда отображение  $f$  непрерывно в точке  $x$ , если и только если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для каждого  $x' \in X$ ,  $|xx'| < \delta$ , выполняется  $|f(x)f(x')| < \varepsilon$ .
- (5) Пусть  $X$  — метрическое пространство, и  $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  — его метрика. Покажите, что функция  $\rho$  непрерывна.
- (6) Пусть даны топологические пространства  $X_\alpha$ ,  $\alpha \in I$ , и  $Y$ . Тогда отображение  $f: \sqcup_{\alpha \in I} X_\alpha \rightarrow Y$  непрерывно, если и только если все ограничения  $f|_{X_\alpha}$  непрерывны.
- (7) Пусть  $\{X_i\}_{i=1}^n$  — топологические пространства и  $X = \prod_i X_i$ . Тогда
  - (а) каждая каноническая проекция  $\pi_i$  — непрерывное отображение;
  - (б) отображение  $f: Y \rightarrow X$  из топологического пространства  $Y$  непрерывно, если и только если непрерывны все координатные отображения  $f_i$  этого  $f$ .

## 2.1 Основные определения и предварительные результаты

Для произвольного множества  $X$  обозначим  $2^X$  семейство всех его подмножеств.

### 2.1.1 Топология

Пусть  $\tau \subset 2^X$ , т.е.  $\tau = \{U_\alpha : U_\alpha \subset X\}_{\alpha \in I}$ . Семейство  $\tau$  называется *топологией на  $X$* , если оно удовлетворяет следующим *аксиомам топологии*:

- пустое множество  $\emptyset$  и все  $X$  являются элементами  $\tau$ , т.е.  $\emptyset, X \in \tau$ ;
- для любого  $J \subset I$  выполняется  $\cup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau$  (семейство  $\tau$  замкнуто относительно объединения, т.е. объединение любого набора элементов из  $\tau$  является элементом  $\tau$ );
- для любого **конечного**  $J \subset I$  выполняется  $\cap_{\alpha \in J} U_\alpha \in \tau$  (семейство  $\tau$  замкнуто относительно **конечных** пересечений, т.е. пересечение любого конечного набора элементов из  $\tau$  является элементом  $\tau$ ).

Множество  $X$ , на котором задана топология  $\tau$ , называется *топологическим пространством*, а элементы топологии называются *открытыми множествами*. Если мы вводим в рассмотрение топологическое пространство  $X$ , то его топологию будем часто обозначать  $\tau_X$ , не оговаривая этого каждый раз. Например: “пусть  $X$  — топологическое пространство и  $U \in \tau_X$  — открытое множество”.

Дополнения до открытых множеств называются *замкнутыми множествами*. Так как  $X = X \setminus \emptyset$  и  $\emptyset = X \setminus X$ , то  $X$  и  $\emptyset$  являются одновременно и открытыми, и замкнутыми множествами.

Приведем примеры топологий.

**Пример 2.1.** Пусть  $X$  — произвольное множество. Следующие подмножества в  $2^X$  являются топологиями на  $X$  (проверьте):

- *антидискретная топология*  $\tau_a = \{\emptyset, X\}$ ;
- *дискретная топология*  $\tau_d = 2^X$ ;
- *топология Зарисского*  $\tau_z = \{U \subset X : |X \setminus U| < \infty\} \cup \{\emptyset\}$ , где  $|M|$  обозначает мощность множества  $M$ .

**Пример 2.2** (Индукцированная топология). Пусть  $Y$  — произвольное подмножество топологического пространства  $X$ . Положим

$$\tau_Y = \{Y \cap U_\alpha : U_\alpha \in \tau_X\},$$

тогда  $\tau_Y$  — топология, которая называется *индуцированной из  $X$* . По умолчанию на каждом подмножестве  $Y \subset X$  рассматривается именно такая топология.

Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  — семейство топологических пространств. Рассмотрим дизъюнктное объединение  $X = \sqcup_{\alpha \in I} X_\alpha$  (мы рассматриваем все  $X_\alpha$  как непересекающиеся множества). *Топология  $\tau_X$  дизъюнктного объединения* — это топология, в которой открытыми множествами являются всевозможные объединения  $\sqcup_{\alpha \in I} U_\alpha$  для  $U_\alpha \in \tau_{X_\alpha}$ .

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  — конечное семейство топологических пространств и  $X = \prod_i X_i$ . Подмножество  $U \subset X$  открыто в *топологии произведения*, если и только если  $U$  является объединением множеств вида  $U_1 \times \dots \times U_n$ , где  $U_i \in \tau_{X_i}$  для всех  $i$ .

### 2.1.2 Метрика и метрическая топология

Пусть  $X$  — множество. Функция  $\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  называется *метрикой на  $X$* , если для любых  $x, y, z \in X$  выполняются следующие условия:

- $\rho(x, y) \geq 0$ , причем  $\rho(x, y) = 0$ , если и только если  $x = y$  (*положительная определенность*);
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (*симметричность*);
- $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$  (*неравенство треугольника*).

Множество  $X$ , на котором задана метрика  $\rho$ , называется *метрическим пространством*, а величина  $\rho(x, y)$  — *расстоянием между точками  $x$  и  $y$* . Часто расстояние между точками  $x$  и  $y$  обозначают  $|xy|$ , независимо от того, в каком метрическом пространстве они лежат.

**Пример 2.3.** На любом множестве  $X$  можно ввести метрику, положив расстояния между разными точками равным 1.

**Пример 2.4.** Для произвольных точек  $x = (x_1, \dots, x_n)$  и  $y = (y_1, \dots, y_n)$  арифметического пространства  $\mathbb{R}^n$  положим

$$|xy| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Эта функция удовлетворяет всем аксиомам метрики (убедитесь в этом) и называется *стандартным* или *евклидовым расстоянием на  $\mathbb{R}^n$* . Для  $n = 1$  это расстояние между точками  $x$  и  $y$  равно  $|x - y|$ .

Пусть  $X$  — метрическое пространство,  $x \in X$ , а  $r \geq 0$  и  $s > 0$  — вещественные числа. Тогда

- *открытым шаром с центром в  $x$  и радиусом  $s$*  называется множество

$$U_s(x) = \{y \in X : |xy| < s\};$$

- *замкнутым шаром с центром в  $x$  и радиусом  $r$*  называется множество

$$B_r(x) = \{y \in X : |xy| \leq r\};$$

- *сферой с центром в  $x$  и радиусом  $r$*  называется множество

$$S_r(x) = \{y \in X : |xy| = r\}.$$

На метрическом пространстве  $X$  имеется стандартная *метрическая топология*, которая определяется так: открытыми множествами являются всевозможные объединения открытых шаров (пустое множество входит сюда, так как является объединением пустого семейства открытых шаров). Эквивалентное определение: подмножество  $U \subset X$  считается открытым в этой топологии тогда и только тогда, когда для каждой точки  $x \in U$  существует  $s > 0$  такое, что  $U_s(x) \subset U$  (убедитесь, что приведенные два определения топологии метрического пространства эквивалентны).

**Пример 2.5.** *Стандартная топология на  $\mathbb{R}^n$*  — это соответствующая метрическая топология для евклидовой метрики, определенной в примере 2.4. Именно этой топологией пользуется математический анализ для определения сходимости последовательностей и непрерывности функций. Если не оговорено противное, то по умолчанию мы считаем, что топология на  $\mathbb{R}^n$  именно стандартная.

**Пример 2.6.** *Стандартная топология на отрезке  $[a, b] \subset \mathbb{R}$*  может быть определена эквивалентным образом так (проверьте эквивалентность приведенных ниже определений):

- это — метрическая топология для стандартной функции расстояния между точками;
- это — топология, индуцированная на  $[a, b]$  из стандартной топологии на  $\mathbb{R}$ .

### 2.1.3 База топологии

Пусть  $X$  — топологическое пространство. Семейство  $\mathcal{B} \subset \tau_X$  называется *базой топологии  $\tau_X$* , если все непустые открытые множества пространства  $X$  могут быть получены объединением некоторых элементов из семейства  $\mathcal{B}$  (если считать, что объединение элементов пустого семейства является пустым множеством, то в определении базы можно выкинуть требование непустоты открытого множества).

**Пример 2.7.** В метрическом пространстве  $X$  семейство открытых шаров  $U_s(x) \subset X$  по всем  $x \in X$  и  $s > 0$  образуют базу метрической топологии.

### 2.1.4 Хаусдорфовость

Окрестностью точки топологического пространства называется каждое открытое множество, содержащее эту точку. Часто окрестность точки  $x$  будем обозначать в виде  $U^x$ ,  $V^x$ , и т.д. Топологическое пространство называется *хаусдорфовым* или *отделимым*, если у каждой пары различных точек имеются непересекающиеся окрестности. Пустое и одноточечные множества с единственными возможными топологиями также относятся к хаусдорфовым пространствам.

**Предложение 2.8.** *Следующие топологии хаусдорфовы:*

- (1) дискретная;
- (2) антидискретная на не более чем одноточечных множествах и только на них;
- (3) Зарисского на конечных множествах и только на них;
- (4) метрическая, в частности, стандартная на  $\mathbb{R}^n$ ;
- (5) индуцированная топология на подмножестве хаусдорфова пространства, в частности, на подмножестве  $\mathbb{R}^n$  (про такое свойство говорят, что оно **наследуется** на подмножествах).

### 2.1.5 Непрерывное отображение

Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — отображение топологических пространств. Говорят, что  $f$  *непрерывно в точке*  $x \in X$ , если для любой окрестности  $V^{f(x)}$  существует окрестность  $U^x$ , для которой  $f(U^x) \subset V^{f(x)}$ . Отображение  $f$  называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке. Отображения  $f: X \rightarrow Y$ , не являющиеся непрерывными (в данной точке), называются *разрывными* (в этой точке).

Приведем еще два определения непрерывного отображения, эквивалентных предыдущему.

**(Второе определение непрерывности)** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств называется *непрерывным*, если прообраз каждого открытого множества открыт.

**(Третье определение непрерывности)** Отображение  $f: X \rightarrow Y$  топологических пространств называется *непрерывным*, если прообраз каждого замкнутого множества замкнут.

**Предложение 2.9.** *Следующие отображения непрерывны:*

- (1) тождественное отображение топологического пространства на себя;
- (2) постоянное отображение, переводящее все топологическое пространство в некоторую точку другого топологического пространства;
- (3) для подмножества  $Y$  топологического пространства  $X$  — отображение включения  $i: Y \rightarrow X$ ,  $i: y \mapsto y$  для всех  $y \in Y$ ;
- (4) композиция непрерывных отображений топологических пространств.

Отображение в вещественную прямую  $\mathbb{R}$  называется *функцией*, а в  $\mathbb{R}^n$  — *векторнозначной функцией*.

Для точки  $x \in X$  топологического пространства  $X$  назовем *базой окрестностей*  $\mathcal{B}_x$  точки  $x$  каждый набор окрестностей  $x$  такой, что для любой окрестности  $U^x$  точки  $x$  существует  $U \in \mathcal{B}_x$ , удовлетворяющий  $U \subset U^x$ . Например, если  $X$  — метрическое пространство, то в качестве базы окрестностей  $x$  можно взять только те шары, у которых  $x$  — центр.

Для декартова произведения  $X = \prod_i X_i$  определены *канонические проекции*  $\pi_i: X \rightarrow X_i$ , заданные так:  $\pi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i$ . Если  $f: Y \rightarrow X$  — отображение, то композиции  $f_i := \pi_i \circ f$  называется *координатным отображением*  $f$ .

## Рекомендуемая литература к семинару 2

- Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология*. Учебное пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1979.
- Мищенко А.С., Фоменко А.Т. *Краткий курс дифференциальной геометрии и топологии*. В серии: Классический университетский учебник. (Учебник). - Москва, изд-во “Физико-математическая литература”, МАИК “Наука/Интерпериодика”, 2004. Издание 2-е, исправленное и дополненное. Москва, URSS, ЛЕЛАНД, 2016.