Количества областей в разбиениях вещественной проективной плоскости прямыми.

Шнурников И.Н.

Гипотеза Б. Грюнбаума (1972) состоит в несуществовании набора n прямых, делящих плоскость RP^2 на число областей, принадлежащее отрезку $[3n-5, 4n-11]$. Н. Мартинов доказал гипотезу Б. Грюнбаума в 1990 году. Н. Мартинов (1993) предъявил формулу для всех натуральных чисел из отрезка $[n, 1+\frac{n(n-1)}{2}]$, которые могут быть количеством областей в разбиениях плоскости RP^2 n прямыми:

$$\bigsqcup_{k=0}^{d_n-1}\{[(k+1)(n-k);(k+1)(n-k)+\frac{k(k-1)}{2}]\}\bigsqcup\{[(d_n+1)(n-d_n);1+\frac{n(n-1)}{2}]\}$$

где $d_n=[\sqrt{2n-5\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}]$ при $n\geqslant 3$ и $d_1=d_2=0$.

Также Н. Мартинов доказал, что каждое натуральное число из формулы подходит, рассмотрев набор m прямых, проходящих через одну точку, и проходящих через некоторые точки пересечения остальных $n-m$ прямых, которые находятся в общем положении друг с другом.

Мое доказательство невозможности остальных чисел основано на:

Оценке с помощью неравенства Мельхиора числа областей при условии, что максимальная кратность точек пересечения прямых равна k и $\frac{k(k+3)}{2}+3<n$.

Оценке числа областей при условии, что максимальная кратность точек пересечения прямых равна k и $\frac{k(k+1)}{2}+2<n<\frac{k(k+3)}{2}+3$, оценив число некоторых отрезков прямых.

Для набора n кривых на RP^2, попарно пересекающихся в одной точке и не делящих в отдельности плоскости RP^2, верна та же формула для возможных числа областей.