ВЛОЖИМОСТЬ 3-МНОГООБРАЗИЙ С КРАЕМ В ЗАМКНУТЫЕ 3-МНОГООБРАЗИЯ

Дмитрий Тонконог

Будем рассматривать группы гомологий над полем $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}$. Пусть M — компактное ориентируемое 3-многообразие с (непустым) краем. В докладе будет доказан следующий результат:

Теорема 1. *Если M вложено в замкнутое ориентируемое 3-многообразие Q, то $\dim H_1(Q) \geq r(M) := \dim H_1(M) - \frac{1}{2} \cdot \dim H_1(\partial M)$. Более того, существует замкнутое ориентируемое 3-многообразие Q, содержащее M, для которого $\dim H_1(Q) = r(M)$.*

В [BRS99] оказано, что всякий (конечный) 2-полиэдр имеет конечное число ориентируемых 3-утолщений; существует алгоритм, который по заданному 2-полиэдру строит все его ориентируемые 3-утолщения. Отсюда из Теоремы 1 вытекает

Следствие 2. *Следующая задача алгоритмически разрешима: По данному 2-полиэдру определить, вложим ли он в некоторую (не фиксированную заранее) гомологическую 3-сферу.*

Ориентируемым родом графа G называется минимальное число g, для которого граф G вложим в сферу с g ручками.

Следствие 3. *Пусть G — граф ориентируемого рода g. Если полиэдр $G \times S^1$ вложен в замкнутое ориентируемое 3-многообразие Q, то $\dim H_1(Q) \geq 2g$. Более того, существует замкнутое ориентируемое 3-многообразие Q, содержащее $G \times S^1$, для которого $\dim H_1(Q) = 2g$.*

Например, полиэдр $K_5 \times S^1$ (где K_5 — полный граф на пяти вершинах) вложим в некоторое замкнутое ориентируемое 3-многообразие Q, для которого $\dim H_1(Q) = 2$, и не вложим в замкнутые ориентируемые 3-многообразия с размерностью первой группы гомологий 0 или 1 (в частности, не вложим в $\mathbb{R}^3$). Невложимость $K_5 \times S^1$ в $\mathbb{R}^3$ доказана в [Sk03].

[BRS99] *D. Repovš, N. Brodsky, A. Skopenkov*, A classification of 3-thickenings of 2-polyhedra, Topol. Appl. 1999. 94. P. 307—314.

[MT01] *B. Mohar and C. Thomassen*, Graphs on Surfaces, Johns Hopkins Univ. Press, 2001.

[Sk03] *M. Skopenkov*, Embedding products of graphs into Euclidean spaces. Fund. Math. 2003. 179. P. 191-198.