КРИТЕРИЙ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ОСОБЫХ ТОЧЕК РАНГА 0 ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К СИСТЕМЕ «ШАР ЧАПЛЫГИНА».

Дмитрий Тонконог, Виктория Фокичева

24 февраля 2010

Пусть на 4-мерном симплектическом многообразии (M, ω) задана интегрируемая гамильтонова система $v = \mathrm{sgrad}\ h$ с дополнительным интегралом f. Для интегрируемой системы определяется отображение момента $\mathcal{F} : M \to \mathbb{R}^2$, $\mathcal{F}(x) := (h(x), f(x))$. Точка $x \in M$ называется *особой точкой ранга* $i \in \{0, 1\}$, если ранг $\mathrm{d}\mathcal{F}$ в этой точке равен i. В классе особых точек ранга i есть естественное определение *невырожденных* точек (т.е. общего положения в своем классе), [1].

При условии невырожденности особых точек теория, развитая в [1], позволяет сделать многие выводы о слоении Лиувилля на M. Поэтому при исследовании конкретной системы важно уметь доказывать невырожденность особых точек.

В докладе мы расскажем о результате, который позволил легко доказать невырожденность точек ранга 0 в системе «шар Чаплыгина» (описание системы см. в [3]). Невырожденность точек ранга 1 была доказана ранее А. Москвиным. Мы также посвятим немного времени рассказу об этой системе.

Тот факт, что особые точки в этой системе невырождены, приближает нас к основной задаче — описанию слоения Лиувилля на всех изоэнергетических 3-подмногообразиях фазового пространства.

Теорема 1. *Пусть на 4-мерном симплектическом многообразии (M, ω) задана интегрируемая гамильтонова система $v = \mathrm{sgrad}\ h$ с дополнительным интегралом f. Пусть P — изолированная особая точка ранга 0 для отображения момента $\mathcal{F}$. Обозначим через $U(P)$ окрестность точки P в M. Пусть локально в точке $\mathcal{F}(P)$ бифуркационная диаграмма состоит из двух гладких дуг γ_1 и γ_2, которые образуют букву «Г», «Т» или «Х». Пусть*
а) Интеграл f боттовский, то есть все особые точки ранга 1, лежащие в окрестности $U(P)$, невырожденные. Множества $D_1 = U(P) \cap \mathcal{F}^{-1}(\gamma_1)$ и $D_2 = U(P) \cap \mathcal{F}^{-1}(\gamma_2)$ суть диски, гладко вложенные в многообразие M.
б) Касательные к кривым γ_1 и γ_2 в точке $\mathcal{F}(P)$ не совпадают.
в) Для каждого $i \in \{1, 2\}$ хотя бы одна из фукнций $h|_{D_i}$, $f|_{D_i}$ является функцией Морса.
Тогда:
1) Диски D_1 и D_2 являются симплектическими подмногообразиями, то есть ограничения формы $\omega|_{D_1}$ и $\omega|_{D_2}$ невырождены. Диски D_1 и D_2 пересекаются в точке P трансверсально.
2) Точка P является невырожденной.

Замечание 1. Буквы «Г», «Т» и «Х» соответствуют особенностям типа «центр-центр», «центр-седло» и «седло-седло» соответственно.

Замечание 2. Из условия 2) невырожденности особой точки следуют все условия а), б), в). Дело в том, что в окрестности невырожденной особой точки ранга 0 существуют координаты, в которых интегралы h, f приводятся к простому каноническому виду [1, Теорема 1.5], [2].

Теорема 2. *Особые точки ранга 0 в интегрируемой системе «шар Чаплыгина» являются невырожденными.*

[1] *А.В. Болсинов, А.Т. Фоменко.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. // Том 1. Ижевск, 1999.

[2] *H. Russmann.* Uber das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleichwichtslosung. // Math. Ann. 1964, v. 154, pp. 284-300.

[3] *A.A. Kilin.* The Dynamics of Chapligin Ball: the Qualitative and Computeral Analysis. // Reg. Chaot. Dyn., 2001, v. 6, №3, p. 291-306.