Введение в теорию плетений кривых.

И.Н. Шнурников.

Определение. *Плетением* кривых Ł компактного, выпуклого подмножества K плоскости $\mathbb{R}^2$ с непустой внутренностью $int\ K$, называется бесконечное семейство простых дуг $\{L\}$ при условиях:

(а) Концы каждой дуги $L \in$ Ł различны и принадлежат границе K. Внутренность каждой дуги L принадлежит внутренности $int\ K$.

(б) Каждая точка границы K является концом единственной дуги L, которая непрерывно зависит (в метрике Хаусдорфа) от своих концов.

(в) Любые две дуги плетения пересекаются в одной точке, которая непрерывно зависит от обеих пересекающихся дуг.

Пример. Рассмотрим плоское выпуклое множество K с гладкой границей. Для каждого направления u на плоскости *средней кривой* L_u, соответствующей направлению u, назовем множество середин хорд, лежащих в K и паралелльных u. Семейство средних кривых (для всех направлений) образует плетение.

Теорема (Bertrand, 1842). Если все средние кривые выпуклого плоского множество с гладкой границей являются отрезками, то это множество является эллипсом.

Теорема (Viet, 1956). Если у плоского выпуклого множества K существует только одна точка, через которую проходят хотя бы три средние кривые, то эта точка является центром симметрии множества K.

Теорема (Grünbaum, 1966). Каждая точка множества K принадлежит по крайней мере одной кривой плетения. Каждая кривая L плетения, кроме, может быть, одной, содержит точки, принадлежащие хотя бы трем кривым плетения (считая и саму кривую L).

Таким образом, плетение кривых затягивает внутренность выпуклого множества на плоскости, но некоторые точки множества покрываются несколько раз.

Теорема (Kossinski, 1958). Для семейства простых кривых в n-мерном шаре B^n, непрерывно зависящих от своих расположенных в диаметрально противоположных точках границы шара концов, найдется точка шара, принадлежащая хотя бы трем кривым семейства.