Основные направления исследований

Алгебраическая геометрия, интегрируемые системы, теория алгебраических чисел, высшие локальные поля, теория нормирований

В настоящее время моей основной областью исследований является алгебраическая теория интегрируемых систем. С 2002 года мы вместе с коллегами из Математического института Российской академии наук, а также с коллегами из Германии (Берлинский университет имени Гумбольдта, Кельнский университет) разработали теорию многомерного соответствия Кричевера, которая является обобщением хорошо известной алгебраической теории уравнения КП, которая связывает многие современные области математики. Результаты, полученные по этой теме с 2002 по 2016 год, легли в основу моей докторской диссертации «Пучки без кручения на многообразиях и интегрируемые системы» http://www.mi.ras.ru/dis/ref16/zheglov/dis.pdf

В частности, нами разработан подход к решению известной задачи классификации коммутирующих колец дифференциальных или дифференциально-разностных операторов, а также подход к изучению их изоспектральных деформаций, основанный на изучении спектральных пучков на проективных алгебраических многообразиях. В рамках этого подхода используются принципиально новые алгебро-геометрические и теоретико-числовые идеи и конструкции, разработанные школой А.Н. Паршина. В частности, мы исследовали геометрические спектральные данные широкого класса известных примеров алгебраически интегрируемых систем; были классифицированы коммутативные подалгебры операторов двух переменных в терминах геометрических спектральных данных; были предложены многомерные аналоги иерархии КП, найдены явные изоспектральные деформации известных примеров алгебраически интегрируемых систем Калоджеро-Мозера с рациональным потенциалом.

Опишем историю этих идей более подробно. Локальные поля естестственно возникают в алгебраической геометрии и алгебраической теории чисел при установлении различных связей между локальными и глобальными свойствами полей алгебраических чисел, арифметических схем и алгебраических многообразий.

Первоначально примеры одномерных локальных полей возникли в прошлом веке в комплексном анализе и алгебраической теории чисел. Это поле рядов Лорана $\mathbb{C}((z))$, элементы которого возникают при разложении мероморфных функций на римановой поверхности в ряд по локальному параметру z в аналитической окрестности точки, и поле p-адических чисел $\mathbb{Q}_p$, возникающее как естественное пополнение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ по неархимедову p-адическому нормированию.

В середине 70-х годов прошлого века А.Н.Паршиным было предложено понятие многомерного локального поля, обобщающее понятие обычного локального поля (n-мерным локальным полем называется полное поле дискретного нормирования, полем вычетов которого является $(n-1)$-мерное локальное поле).

Один из типичных примеров такого поля — это поле итерированных рядов Лорана $k((z_1))((z_2))\dots((z_n))$. Элементы $z_1,\dots,z_n$ называются локальными параметрами этого поля. Такие поля служат естественным обобщением локальных объектов на 1-мерных схемах на случай многомерных схем. При помощи n-мерных локальных полей, ассоциированных с полными флагами на многообразиях, были обобщены со случая кривых на случай высших размерностей классическая формула о равенстве нулю суммы вычетов рациональной дифференциальной формы, классический закон взаимности Вейля на кривой.

В последние 25 лет развитие и применение методов локальных полей происходило еще в одном направлении. Это применение в алгебраической геометрии и теории интегрируемых систем, связанные с соответствием Кричевера–Сато–Вилсона на кривой, которое помогло установить связь между решениями одного известного уравнения математической физики — уравнения Кадомцева-Петвиашвили (КП) — коммутативными подкольцами в кольце дифференциальных операторов и некоторыми алгебро-геометрическими данными. Найденная связь помогла решить проблему Шоттки выделения якобианов алгебраических кривых среди торов, а также старую проблему классификации коммутативных подколец в кольце дифференциальных операторов.

В работах А.Н.Паршина начала 2000-х были развиты идеи, заложенные в соответствии Кричевера–Сато–Вилсона для кривых, на случай многообразий высшей размерности в духе теории многомерных локальных полей. В них, в частности, было введено понятие многомерного локального тела и предложено классифицировать такие объекты. Там же были сделаны первые шаги в этом направлении.

В качестве основополагающего примера в этих работах было кольцо псевдодифференциальных операторов, играющее важную роль при решении иерархии КП, а в качестве первых примеров многомерных локальных тел были рассмотрены тела псевдодифференциальных операторов от нескольких переменных.

В существующем обобщении соответствия Кричевера, предложенном первоначально А.Н.Паршиным и Д.В.Осиповым, определена конструкция, сопоставляющая обобщенному набору геометрических данных на n-мерном алгебраическом многообразии подпространство в n-мерном локальном поле. Эта конструкция дает гипотетическое обобщение части соответствия Кричевера между геометрическими данными и точками грассманиана. Стоит отметить, что построение искомого грассманиана даже для двумерного поля является сложной и *пока нерешенной задачей*. Она интересна специалистам из разных областей математики.

Многомерные иерархии КП возникают естественным образом при попытке обобщения классической алгебраической теории Сато уравнений КП в высшие размерности. Они были введены А.Н.Паршиным по аналогии с одномерным случаем как динамические системы на некотором бесконечномерном многообразии. В двумерном случае имеет смысл рассматривать различные подсистемы обобщенной иерархии, для которых оказывается возможным доказать разрешимость задачи Коши и постро-

ить явные формальные решения. Доказательство разрешимости и явные решения получаются в результате обобщения разложения Биркгофа, предложенного в статье М.Муласе, где в свое время этим методом была доказана разрешимость задачи Коши и построены явные решения обычной и супер иерархий КП. Этому посвящены мои работы 2005 года.

Связь некоторых решений обобщенных иерархий КП и геометрических данных, обобщающих данные на алгебраических поверхностях, описана в совместных работах А.Б. Жеглова с Д.В. Осиповым и H. Kurke.

Стоит отметить, что дальнейшие исследования в этом направлении представляют особый интерес, так как могут привести к решению *ряда задач из разных областей*, прежде всего - задач, аналогичных задачам, решенным в одномерном случае, упоминавшихся выше, а также к нахождению новых нетривиальных уравнений в частных производных, имеющих явные решения, решению некоторых проблем из теории интегрируемых систем (конечномерных и бесконечномерных), а также некоторых известных проблем алгебры (таких как гипотеза о якобиане или гипотеза Диксмье). При этом используются знания и методы из многих областей математики, таких как алгебраическая геометрия, теория диф. уравнений, дифференциальная алгебра, теория представлений, K-теория, и т.д.

Список задач, связанных с этой теорией, приведен в учебном пособии

`//dfgm.math.msu.su/people/zheglov/English/China2019/Lectures_DO_semester_1.pdf`

и диссертации

`http://www.mi.ras.ru/dis/ref16/zheglov/dis.pdf`

Ряд моих ранних работ (частично вошедших в кандидатскую диссертацию http://edoc.hu-berlin.de/browsing/dissertationen/) был посвящен чисто алгебраическим вопросам, а именно изучению многомерных локальных тел. В частности, я получил классификацию расщепляемых локальных тел с коммутативным телом вычетов с точностью до непрерывных автоморфизмов. Получены новые результаты о структуре группы Брауэра над полями степенных рядов Лорана с произвольным полем вычетов. В частности, я доказал гипотезу М. Артина о равенстве экспоненты и индекса для тел над C_2 -полями, в случае тел над полями степенных рядов Лорана. Примерно в то же время это было доказано М. Артином и А. Де Йонгом в другом важном случае тел над полями рациональных функций рационально связных алгебраических поверхностей над алгебраически замкнутыми полями. В общем случае гипотеза остается открытой.

Еще одна задача, которая входит в сферу моих интересов - описание возможных топологических типов вещественных трехмерных многообразий, возникающих как поверхности уровней интегралов интегрируемых систем. К решению этой задачи

стало возможно применять разные сильные результаты из алгебраической геометрии после серии интересных работ Я.Коллара о гипотезе Нэша. Вместе со студентами кафедры проводилась работа по исследованию возможных топологических типов пересечения трех квадрик в шестимерном пространстве. Даже в этом случае ответ до конца не ясен.