Оглавление

Лекция 1

1.1 Полуторалинейные формы на комплексных пространствах

Пусть V — комплексное векторное пространство. Функция $\varphi\colon V \to \mathbb{C}$ называется *полулинейной*, если для любых $a, b \in V$ и $\lambda \in \mathbb{C}$ выполняется $\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ (аддитивность) $\varphi(\lambda a) = \bar{\lambda}\varphi(a)$ (полуоднородность), где $\bar{\lambda}$ — комплексно сопряженное число λ. Функция $f\colon V \times V \to \mathbb{C}$ называется *полуторалинейной функцией или полуторалинейной формой*, если она линейна по первому аргументу и полулинейна по второму. А именно, для любых векторов $a, b, c \in V$ и комплексного числа λ выполняются следующие свойства:

- $f(a + b, c) = f(a, c) + f(b, c)$, $f(\lambda a, b) = \lambda f(a, b)$ (линейность);
- $f(c, a + b) = f(c, a) + f(c, b)$, $f(a, \lambda b) = \bar{\lambda} f(a, b)$ (полулинейность).

Замечание 1.1. В ряде текстов полуторалинейные формы определяются по-другому, а именно, требуется полулинейность по первому аргументу, а линейность по второму.

В дальнейшем пространство V предполагается конечномерным.

Пусть $f\colon V \times V \to \mathbb{C}$ — полуторалинейная форма, а $e_1, \dots, e_n$ — базис (над $\mathbb{C}$) пространства V. Тогда каждые $a, b \in V$ раскладываются по этому базису: $a = \sum_{p=1}^{n} a_p e_p$ и $b = \sum_{q=1}^{n} b_q e_q$. Подставляя a и b в f и пользуясь полуторалинейностью f, получим

$$f(a, b) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} f(e_p, e_q) a_p \bar{b}_q.$$

Числа $f_{pq} = f(e_p, e_q)$ называются *координатами формы* f *в базисе* $e_1, \dots . e_n$, а матрица (f_{pq}) — *матрицей* f в этом базисе.

В предыдущих лекция было выяснено, что билинейные формы при условии симметричности устроены достаточно просто: в некотором базисе их матрицы диагональны. Также мы выяснили как можно упростить вид кососимметричной формы выбором подходящего базиса. Симметричность и косая симметричность означает, что при перестановке аргументов значение формы или сохраняется, или меняет знак. Если мы переставим аргументы полуторалинейной формы, то она станет полулинейной по первому аргументу, т.е. перестанет быть полуторалинейной формой в нашем понимании. Чтобы этого избежать, применим еще и сопряжение. Тогда мы снова получим полуторалинейную форму.

Полуторалинейная форма $f\colon V \times V \to \mathbb{C}$ называется *эрмитовой*, если для любых $a, b \in V$ выполняется $\overline{f(b, a)} = f(a, b)$.

Пример 1.2. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис пространства $V = \mathbb{C}^n$. Для $a = \sum_{p=1}^{n} a_p e_p$ и $b = \sum_{q=1}^{n} b_q e_q$ положим

$$f(a, b) = \sum_{p=1}^{n} a_p \bar{b}_p.$$

Ясно, что f — эрмитова форма. Она называется *стандартной*.

Приведем простой критерий эрмитовости. Для этого разложим полуторалинейную форму f на вещественную и мнимую части:

$$f(a, b) = u(a, b) + i\, v(a, b). \tag{1.1}$$

Лемма 1.3. *Полуторалинейная форма $f(a,b) = u(a,b) + i\,v(a,b)$ эрмитова, если и только если ее вещественная часть $u(a,b)$ симметрична, а мнимая $v(a,b)$ — кососимметрична.*

Доказательство. Условие эрмитовости имеет вид:

$$\overline{f(b,a)} = u(b,a) - i\,v(b,a) = u(a,b) + i\,v(a,b)$$

для всех $a, b \in V$, а это в точности равносильно симметричности u м косой симметричности v. ☐

Пусть $F\colon V \to \mathbb{C}$ — квадратичная форма, соответствующая полуторалинейной форме, т.е. $F(a) = f(a,a)$. Как было выяснено в предыдущих лекциях, симметричная билинейная форма однозначно восстанавливается по своей квадратичной. Что можно сказать про эрмитовы формы? В дальнейшем квадратичную форму, соответствующую эрмитовой полуторалинейной форме, будем также называть *эрмитовой.*

Теорема 1.4. *Квадратичная эрмитова форма $F(a)$ однозначно определяет эрмитову полуторалинейную форму $f(a,b)$, из которой она была получена.*

Доказательство. Разложим эрмитову форму f на ее вещественную и мнимую части как в выражении (1.1). Воспользовавшись эрмитовостью f, запишем

$$F(a+b) = f(a+b,a+b) = f(a,a)+f(b,b)+f(a,b)+f(b,a) = F(a)+F(b)+f(a,b)+\overline{f(a,b)} = F(a)+F(b)+2u(a,b),$$

откуда $u(a,b) = (1/2)\big(F(a+b) - F(a) - F(b)\big)$.

Так как

$$f(a, i\,b) = -i\,f(a,b) = -i\,\big(u(a,b) + i\,v(a,b)\big) = v(a,b) - i\,u(a,b),$$

то, как было показано выше,

$$v(a,b) = (1/2)\big(F(a + i\,b) - F(a) - F(i\,b)\big),$$

что и завершает доказательство теоремы. ☐

Далее, эрмитова квадратичная форма принимает только вещественные значения, так как $\bar{F}(a) = \overline{f(a,a)} = f(a,a) = F(a)$. Оказывается, условие вещественности квадратичной формы эквивалентно эрмитовости соответствующей полуторалинейной формы.

Теорема 1.5. *Полуторалинейная форма $f(a,b)$ является эрмитовой тогда и только тогда, когда соответствующая ей квадратичная форма $F(a)$ принимает только вещественные значения.*

Доказательство. То, что эрмитовость формы f влечет вещественность квадратичной формы F мы уже показали.

Пусть теперь F принимает только вещественные значения. Тогда

$$F(a+b) - F(a) - F(b) = f(a+b, a+b) - f(a,a) - f(b,b) = f(a,b) + f(b,a),$$

поэтому $f(a,b) + f(b,a)$ вещественно. Разложим полуторалинейную форму на вещественную и мнимую части как в выражении (1.1), тогда величина

$$f(a,b) + f(b,a) = u(a,b) + u(b,a) + i\,v(a,b) + i\,v(b,a)$$

вещественна, откуда $v(a,b) + v(b,a) = 0$, т.е. вещественная функция v кососимметрична.

Подставляя в f вместо b величину $i\,b$, заключаем, что $f(a, i\,b) + f(i\,b, a)$ вещественно и, значит,

$$i\,\big(f(b,a) - f(a,b)\big) = i\,\big(u(b,a) + i\,v(b,a) - u(a,b) - i\,v(a,b)\big) = v(a,b) - v(b,a) + i\,\big(u(b,a) - u(a,b)\big)$$

вещественно, поэтому $u(a,b) = u(b,a)$, откуда u — симметричная функция. Осталось применить лемму 1.3. ☐

Аналогично случаю симметричных билинейных форм, имеет место следующий результат, который мы приведем без доказательства.

Теорема 1.6. *Для эрмитовой формы $f\colon V \times V \to \mathbb{C}$, определенной на n-мерном комплексном векторном пространстве V, существует базис $e_1, \ldots, e_n$ в V такой, что в этом базисе матрица формы диагональна, а диагональные элементы — единицы, минус единицы и нули.*

Полуторалинейная форма называется *положительно определенной*, если она эрмитова и соответствующая ей квадратичная форма положительна на всех ненулевых векторах. Из теоремы 1.6 непосредственно выводится

Следствие 1.7. *Для положительно определенной полуторалинейной формы на конечномерном векторном пространстве существует базис, в котором она имеет вид из примера* 1.2.

По аналогии со скалярным произведением в евклидовом случае, положительно определенная эрмитова форма называется *эрмитовым произведением*, а эрмитова форма из примера 1.2 — стандартным эрмитовым произведением на $\mathbb{C}^n$.

1.2 Теорема Якоби и критерий Сильвестра

Пусть теперь V — вещественное векторное пространство конечной размерности n, а $f\colon V\times V\to\mathbb{R}$ — симметричная билинейная форма. На предыдущих лекциях мы описали метод Лагранжа приведение формы матрицы формы f к диагональному виду. Хотелось бы научиться быстро вычислять соответствующие диагональные элементы, не находя соответствующее преобразование. Теорема Якоби дает эффективный рецепт.

Напомним, что для квадратной матрицы G размера $n\times n$ ее *угловой k-минор $|G_k|$ порядка* $1\le k\le n$ — это определитель подматрицы G_k, натянутой на первые k строк и первые k столбцов.

Теорема 1.8 (Якоби)**.** *Пусть $f\colon V\times V\to\mathbb{R}$ — симметричная билинейная форма на вещественном пространстве V размерности n, а $G=(f_{ij})$ — ее матрица в некотором базисе $e_1,\dots,e_n$ пространства V. Пусть $r=\operatorname{rank}G$ — ранг матрицы G, и предположим, что все угловые миноры $|G_k|$ при $k=1,\dots,r$ отличны от нуля. Тогда в некотором базисе соответствующая f квадратичная форма F приводится к виду*

$$F(x_1,\dots,x_n)=|G_1|x_1^2+\frac{|G_2|}{|G_1|}x_2^2+\dots+\frac{|G_r|}{|G_{r-1}|}x_r^2.$$

Доказательство. Будем искать такой новый базис, чтобы матрица C перехода к нему была верхнетреугольной с 1 на диагонали. Напомним, что матрица перехода выражает векторы исходного базиса через векторы нового базиса. Кроме того, матрица билинейной формы в новом базисе имеет вид $C^T\,G\,C$, где C^T — транспонированная матрица C. При такой замене $(C^T\,G\,C)_k=C_k^T\,G_k\,C_k$ (убедитесь в этом), поэтому, учитывая, что $|C_k|=|C_k^T|=1$, имеем $\left|(C^T\,G\,C)_k\right|=|C_k^T|\,|G_k|\,|C_k|=|G_k|$. Иными словами, такая замена не меняет угловые миноры.

Обозначим искомый базис $e_1',\dots,e_n'$. Замену базиса удобно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&e_1'=e_1,\\
&e_2'=e_2+c_2^1e_1',\\
&e_3'=e_3+c_3^1e_1'+c_3^2e_2',\\
&\qquad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&e_n'=e_n+c_n^1e_1'+c_n^2e_2'+\dots+c_n^{n-1}e_{n-1}',
\end{aligned}$$

Начнем с нахождения таких c_j^i, $j\le r$, $i\le r-1$, для которых векторы $e_1',\dots,e_r'$ ортогональны относительно формы f, т.е. $f(e_i',e_j')=0$ для $i\ne j$. Будем последовательно искать эти векторы. Вектор e_1' равен e_1 по условию. Предположим, что мы нашли $e_1',\dots,e_{k-1}'$. По условию, $e_k'=e_k+c_k^1e_1'+c_k^2e_2'+\dots+c_k^{k-1}e_{k-1}'$, поэтому условие ортогональности e_k' всем векторам e_i' с $i<k$ имеет вид линейной системы на неизвестные $c_k^1,\dots,c_k^{k-1}$:

$$\begin{cases}
c_k^1f(e_1',e_1')+c_k^2f(e_2',e_1')+\dots+c_k^{k-1}f(e_{k-1}',e_1')=-f(e_k,e_1'),\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
c_k^1f(e_1',e_{k-1}')+c_k^2f(e_2',e_{k-1}')+\dots+c_k^{k-1}f(e_{k-1}',e_{k-1}')=-f(e_k,e_1').
\end{cases}$$

Определитель этой системы равен угловому минору матрицы формы f в новом базисе, и так как, в силу отмеченного выше, этот минор совпадает с угловым $(k-1)$-минором матрицы G, то этот минор отличен от нуля, поэтому система имеет решение. Выбрав таким образом первые r векторов нового базиса, мы приведем матрицу формы f в блочному виду, в котором левый верхний блок размера $r\times r$ будет диагональной матрицей.

Добьемся теперь того, чтобы векторы $e_1',\dots,e_r'$ были f-ортогональны оставшимся векторам e_j', $j>r$. Для этого достаточно положить

$$e_j'=e_j-\frac{f(e_j,e_1')}{f(e_1',e_1')}e_1'-\dots-\frac{f(e_j,e_r')}{f(e_r',e_r')}e_r'.$$

В результате у полученной блочной матрицы верхний правый угол и нижний левый угол занулятся. Таким образом, мы получили блочную матрицу, у которой один блок (верхний левый) диагонален и имеет ранг r, нижний правый пока неизвестен, а два оставшихся блока — нулевые. Но если нижний правы блок отличен от нуля, то ранг матрицы формы f больше r, чего быть не может. Таким образом, и правый нижний блок также равен нулю, и мы получили диагональную матрицу с r ненулевыми элементами $f(e'_k, e'_k)$, $k = 1, \dots, r$ на диагонали. Осталось вычислить эти элементы через исходную матрицу G.

Для этого вспомним, что угловые миноры полученной матрицы совпадают с соответствующими угловыми минорами матрицы G. Отсюда вытекает, что $f(e'_1, e'_1) = |G_1|$, а для $k > 1$ имеем $|G_k| = f(e'_1, e'_1) \cdots f(e'_k, e'_k) = |G_{k-1}|\, f(e'_k, e'_k)$, так что $f(e'_k, e'_k) = |G_k|/|G_{k-1}|$. Доказательство закончено. ☐

Напомним, что симметричная билинейная форма называется *положительно определенной*, если соответствующая ей квадратичная форма положительна на всех ненулевых элементах.

Теорема 1.9 (Критерий Сильвестра). *Билинейная симметричная функция f положительно определена, если и только если все угловые миноры ее матрицы G в некотором, а значит, и в любом базисе положительны.*

Доказательство. Если все миноры в некотором базисе положительны, то по теореме Якоби квадратичная форма приводится к линейной комбинации квадратов всех координат с положительными коэффициентами, поэтому на всех ненулевых векторах квадратичная форма положительна.

Пусть теперь f положительно определена. Если матрица G вырождена, то у нее ненулевое ядро, но на каждом векторе из ядра соответствующая квадратичная форма зануляется. Таким образом, $\operatorname{rank} G$ максимален. Далее, обозначим $e_1, \dots, e_n$ базис, в котором записана матрица G формы f. Отметим, что G_k — матрица ограничения формы f на подпространство, натянутое на $e_1, \dots, e_k$. Так как это ограничение также положительно определенное, то и $|G_k| \neq 0$. Теперь мы может применить теорему Якоби и привести квадратичную форму к виду

$$|G_1| x_1^2 + \frac{|G_2|}{|G_1|} x_2^2 + \cdots + \frac{|G_n|}{|G_{n-1}|} x_2^n.$$

Это выражение положительно при всех ненулевых x, если и только если все коэффициенты положительны. Но последнее равносильно тому, что и все миноры $|G_k|$ положительны. Доказательство закончено. ☐

1.3 Ортонормированные базисы в евклидовом пространстве, матрицы перехода между ними

Пусть V — евклидово пространство размерности n со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Рассмотрим всевозможные ортонормальные базисы и линейные преобразования, переводящие один из таких базисов в другой. Такие преобразования называются *ортогональными*.

Выясним, как выглядят матрицы перехода от одного ортонормального базиса к другому. Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$ — два таких базиса. Матрица перехода от первого базиса ко второму состоит из столбцов — координат старого базиса в новом. Если $(a_p^1, \dots, a_p^n)$ и $(a_q^1, \dots, a_q^n)$ — два таких столбца, то $e_p = \sum_i a_p^i e'_i$, $e_q = \sum_i a_q^j e'_j$, и

$$\delta_{pq} = (e_p, e_q) = \sum_{i,j} a_p^i a_q^j (e'_i, e'_j) = \sum_i a_p^i a_q^i.$$

Иными словами, векторы-столбцы образуют ортонормальный базис арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ относительно стандартного скалярного произведения. На матричном языке это равносильно $A^T A = E$, где E — единичная матрица. Такие матрицы A называются *ортогональными*.

Теорема 1.10. *Семейство всех ортогональных матрицы является группой по умножению.*

Доказательство. Пусть A и B — ортогональные матрицы, тогда $(AB)^T(AB) = B^T A^T AB = B^T B = E$, поэтому произведение ортогональных матриц — снова ортогональная матрица. Единичная матрица очевидно ортогональна. Наконец, если преобразование, заданное ортогональной матрицей A, переводит ортонормальный базис e в ортонормальный базис e', то преобразование, соответствующее A^{-1}, переводит ортонормальный базис e' в ортонормальный базис e и, поэтому, является ортогональным. В силу отмеченной выше эквивалентности, $(A^{-1})^T A^{-1} = E$. ☐

Мультипликативная группа всех ортогональных матриц размера $n \times n$ обозначается $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ и называется *ортогональной группой.*

Замечание 1.11. В следующей лекции мы покажем, что и сами ортогональные преобразования образуют группу с операцией — композицией преобразований.

Предложение 1.12. *У ортогональной матрицы A не только столбцы, но и строки образуют ортонормальный базис.*

Доказательство. Действительно, так как условие ортогональности эквивалентно $A^{-1} = A^T$, то $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = (A^T)^T$. ☐

Пример 1.13. Рассмотрим случай $n = 2$. Опишем, как выглядят ортогональные матрицы. Если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ортогональна, то $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$ и $ab + cd = 0$. Первые два уравнения можно решить так: $a = \cos\varphi$, $c = \sin\varphi$, $b = \sin\psi$, $d = \cos\psi$. Тогда третье уравнение дает $\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi = \sin(\varphi + \psi) = 0$, откуда $\varphi + \psi = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Имеем принципиально два случая: $\psi = -\varphi$ и $\psi = -\varphi + \pi$ (добавление $2\pi l$ не меняет a, b, c и d). Таким образом, получаем два типа матриц:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Определитель матриц первого типа равен 1, а второго -1. Матрицы первого типа образуют подгруппу в $O(2, \mathbb{R})$, которая называется *специальной ортогональной группой* и обозначается $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$. Матрицы второго типа подгруппу не образуют. Более общо, в $O(n, \mathbb{R})$ матрицы с определителем 1 образуют *специальную ортогональную группу* $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$.

Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема 1.14. *Для каждого ортогонального преобразования существует такой ортонормальный базис, в котором его матрица — блочная, блоки которой относятся к следующим типам:*

- *блоки 2×2, описанные в примере 1.13;*
- *блоки (1) и (-1).*

Замечание 1.15. Если вместо n-мерного вещественного пространства V рассмотреть n-мерное комплексное пространство, а в нем — эрмитово произведение f, то также можно определить ортонормальные базисы относительно этой эрмитовой формы. Линейные отображения, переводящие один такой базис в другой называются *унитарными.* Аналогично доказательству теоремы 1.14 можно показать, что матрицы унитарных преобразований образуют мультипликативную *унитарную группу* $\mathrm{U}(n)$, а унитарные преобразования с единичным определителем составляют подгруппу $\mathrm{SU}(n) \subset \mathrm{U}(n)$, которая называется *специальной унитарной группой.* Условие унитарности матрицы U в этом случае имеет вид $U^*U = E$ или $U^* = U^{-1}$, где E — единичная матрица, а U^* — одновременно транспонированная матрица и сопряженная. То, что строки, а также столбцы унитарной матрицы представляют собой векторы из $\mathbb{C}^n$, ортонормальные относительно стандартного эрмитова произведения, доказывается точно так же.

1.4 Матрица Грама

Пусть $a_1, \ldots, a_m$ — система векторов в евклидовом пространстве V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$. Квадратная матрица, элементы которой имеют вид $a_{ij} = (a_i, a_j)$ называется *матрицей Грама* этой системы векторов. Если в качестве a_k выбрать базис пространства V, то матрица Грама этого базиса будет в точности матрицей симметричной билинейной формы — скалярного произведения.

Теорема 1.16. *Система векторов $a_1, \ldots, a_m$ линейно независима, если и только если ее матрица Грама невырождена.*

Доказательство. Если система векторов линейно зависима, то $\sum_k \lambda_k a_k = 0$ для некоторых вещественных λ_k, среди которых есть ненулевые. Но тогда $\sum_k \lambda_k (a_k, a_p) = \sum_k \lambda_k a_{kp} = 0$ для всех p. Последнее означает, что линейная комбинация столбцов матрицы Грама (a_{ij}) с коэффициентами λ_p равна нулю, т.е. матрица Грама вырождена.

Пусть теперь система векторов линейно независима. Рассмотрим равную нулю линейную комбинацию столбцом матрицы Грамма с коэффициентами λ_k. Это означает, что для всех p выполнено

$$0 = \sum_k \lambda_k (a_k, a_p) = \Bigl(\sum_k \lambda_k a_k, a_p\Bigr),$$

т.е. вектор $\sum_k \lambda_k a_k$ перпендикулярен всем векторам a_k. Так как линейное подпространство пересекает свое ортогональное дополнение только по нулю, имеем $\sum_k \lambda_k a_k = 0$. В силу линейной независимости векторов a_k, все λ_k равны нулю. Таким образом, столбцы матрицы Грама линейно независимы, т.е. матрица Грама невырождена. ☐

1.5 Ориентация конечномерного векторного пространства

Пусть V — конечномерное векторное пространство. Рассмотрим всевозможные базисы этого пространства и введем на них следующее отношение: базис $e_1, \ldots, e_n$ *находятся в отношении* с базисом $e'_1, \ldots, e'_n$, если и только если определитель матрицы перехода от первого базиса ко второму положителен. Отметим, что единичная матрица имеет положительный определитель, поэтому отношение рефлексивно. Далее, если C — матрица перехода от первого базиса ко второму, то C невырождена, C^{-1} — матрица перехода от второго базиса к первому и $\det C^{-1} = 1/\det C$, так что отношение симметрично. Наконец, если C_1 — матрица перехода от первого базиса ко второму, а C_2 — от второго к третьему, то C_1C_2 — матрица перехода от первого базиса к третьему и $\det(C_1C_2) = \det C_1 \det C_2$, поэтому отношение транзитивно. Таким образом, введенное отношение является эквивалентностью и, поэтому, разбивает все базисы на классы. Этих классов ровно два: если базисы e'_i и e''_i не эквивалентны базису e_i, то матрица перехода между e'_i и e''_i имеет положительный определитель (проверьте), т.е. эти базисы лежат в одном классе. Итак, имеется два класса эквивалентности базисов. Каждый из этих классов называется *ориентацией* пространства V. *Ориентировать конечномерное векторное пространство* означает выбрать один из этих двух классов и назвать его *положительным*, а оставшийся — *отрицательным*. Каждый базис из положительного класса называется *положительно ориентированным*, а из отрицательного — *отрицательно ориентированным*. Так как для задания класса эквивалентности достаточно выбрать любого его представителя, задание ориентации однозначно определяется выбором произвольно базиса и отнесением его к положительно ориентированным. *Стандартная ориентация арифметического пространства* $\mathbb{R}^n$ задается стандартным базисом.

1.6 Параллелепипеды и их объемы

Пусть V — вещественное линейное пространство и $k \in \mathbb{N}$. Под *k-параллелепипедом P* будем понимать упорядоченный набор $(v_1, \ldots, v_k)$ из k векторов $v_i \in V$. Параллелепипед $P = (v_1, \ldots, v_k)$ назовем *вырожденным*, если векторы v_i линейно зависимы, иначе параллелепипед P — *невырожденный*.

Пусть теперь на V задано скалярное произведение. Определим *объем* $\mathrm{vol}(P)$ *параллелепипеда* $P = (v_1, \ldots, v_k)$ следующим образом.

- Если P вырожден, то положим $\mathrm{vol}(P) = 0$.
- Если векторы v_i образуют ортонормальную систему, то $\mathrm{vol}(P) = 1$.
- Если P невырожден, то через V_P обозначим линейное подпространство, натянутое на векторы v_i; выберем в V_P произвольный ортонормальный базис $e = (e_1, \ldots, e_k)$; через $A_{e,P}$ обозначим матрицу перехода от базиса e к базису P; наконец, положим $\mathrm{vol}^e(P) = |\det A_{e,P}|$. Отметим, что если $e' = (e_{1'}, \ldots, e_{k'})$ — другой ортонормальный базис пространства V_P, и C — матрица перехода от e' к e, то $A_{e',P} = C\,A_{e,P}$, поэтому

  $$\mathrm{vol}^{e'}(P) = |\det A_{e',P}| = \bigl|\det(C\,A_{e,P})\bigr| = |\det C \det A_{e,P}| = |\det A_{e,P}| = \mathrm{vol}^e(P),$$

  так что величина $\mathrm{vol}^e(P)$ не зависит от выбора ортонормального базиса e в пространстве V_P. В силу этого, величину $\mathrm{vol}^e(P)$ обозначим $\mathrm{vol}(P)$ и возьмем ее в качестве *объема параллелепипеда P*.

Если P — параллелепипед, и пространство V_P ориентированно, то определим также *ориентированный объем* $\mathrm{vol}_0(P)$ так. Для вырожденного параллелепипеда P положим $\mathrm{vol}_0(P) = 0$. Для невырожденного P выберем произвольный *положительно ориентированный* ортонормальный базис e пространства V_P и положим $\mathrm{vol}_0(P) = \det(A_{e,P})$. Ясно, что при замене базиса e на другой положительно ориентированный базис e', имеем $\det(A_{e,P}) = \det(A_{e',P})$, что обосновывает корректность нашего определения. Таким образом, ориентированный объем $\mathrm{vol}_0(P)$ невырожденного параллелепипеда P совпадает с $\mathrm{vol}(P)$ для положительно ориентированного базиса P пространства V_P, и равен $-\mathrm{vol}(P)$ для отрицательно ориентированного. Ориентированный объем мы в основном будем использовать в конечномерном пространстве V размерности n для невырожденных n-параллелепипедов.

Отметим, что объем 1-параллелепипеда (v) равен длине вектора v. Объем 2-параллелепипеда (v_1, v_2) равен площади параллелограмма, натянутого на векторы v_1 и v_2. По известной формуле, эта площадь равна "произведению основания на высоту". Обобщим эту формулу на произвольные невырожденные k-параллелепипеды при $k \geq 2$.

Пусть $P = (v_1, \ldots, v_k)$ — невырожденный параллелепипед. Выделим в P *основание* B, выбрав произвольные $(k-1)$ векторов. Пусть, для определенности, $B = (v_1, \ldots, v_{k-1})$. Разложим вектор v_k на вектор h_k, перпендикулярный пространству V_B, натянутому на $v_1, \ldots, v_{k-1}$, и вектор v_k', лежащий в этом пространстве (это разложение однозначно). Тогда $\mathrm{vol}_0(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{vol}_0(v_1, \ldots, h_k)$ по свойствам определителя. Выберем теперь ортонормальный базис $e_1, \ldots, e_{k-1}$ в V_B и дополним его до ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_k$ всего пространства V_P так, чтобы e_k был сонаправлен с h_k. Тогда $h_k = \|h_k\| e_k$, и, по свойству определителя, $\mathrm{vol}_0(v_1, \ldots, h_k) = \mathrm{vol}_0(v_1, \ldots, v_{k-1})\|h_k\|$, откуда $\mathrm{vol}(P) = \mathrm{vol}(B)\|h_k\|$. Таким образом, $\|h_k\|$ играет роль высоты параллелепипеда, опущенной на основание B. Теми самым, мы приходим к следующему результату.

Теорема 1.17. *Объем k-параллелепипеда равен произведению объема любого его основания на высоту, опущенную на это основание.*

Замечание 1.18. Эта теорема имеет место для вырожденных параллелепипедов. В таких параллелепипедах объем равен нулю, и также зануляется или объем основания, или длина высоты.

Пусть $P = (v_1, \ldots, v_k)$ — невырожденный k-параллелепипед, $e_1, \ldots, e_k$ — ортонормальный базис пространства V_P. Положим $A = A_{e,P}$ и рассмотрим матрицу Грама G системы векторов $v_1, \ldots, v_k$. Ясно, что она имеет вид $A^t A$, и поэтому $\det G = \det(A^T A) = (\det A)^2$, так что

$$\det G = (\det A)^2 = \mathrm{vol}^2(P).$$

Если k-параллелепипед P вырожденный, то $\mathrm{vol}(P) = 0$ и, по теореме 1.16, $\det G = 0$, поэтому формула $\det G = \mathrm{vol}^2(P)$ снова имеет место. Тем самым, мы доказали следующий результат.

Теорема 1.19. *Определитель матрицы Грама произвольного базиса евклидова пространства равен квадрату объема параллелепипеда, порожденного этим базисом.*

Школьное определение площади (объема) обладает свойством аддитивности: если фигура разбита на части, которые пересекаются только по своим границам, то сумма площадей (объемов) частей равна площади (объему) фигуры. В случае с параллелепипедами проиллюстрируем это на следующем примере. Прежде всего, приведем более геометрическое определение параллелепипеда, добавив к параметрам, его задающим, еще и некоторую начальную точку $x \in V$, так что теперь k-параллелепипед — это набор $P^x = (x, v_1, \ldots, v_k) = (x, P)$ из $(k+1)$-ого вектора. Кроме того, геометрически параллелепипед отождествляется в подмножеством

$$\Pi(P^x) = \left\{ x + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i : 0 \leq \lambda_1 \leq 1, \ldots, 0 \leq \lambda_k \leq 1 \right\} \subset V.$$

Именно для таких подмножеств выполняется описанная выше аддитивность объема. Отметим, что объем и ориентированный объем мы определяем как и выше для упорядоченного набора векторов P.

Разрежем параллелепипед Π на два: Π_1 будет соответствовать параллелепипеду P_1^x, а Π_2 — параллелепипеду P_2^y, заданным так:

$$P_1^x = (x, \alpha v_1, v_2, \ldots, v_k), \quad P_2^y = (x + \alpha v_1, \beta v_1, v_2, \ldots, v_k),$$

где α и β — положительные числа, $\alpha + \beta = 1$, $y = x + \alpha v_1$, $P_1 = (\alpha v_1, v_2, \ldots, v_k)$, $P_2 = (\beta v_1, v_2, \ldots, v_k)$. Иными словами, через точку $x + \alpha v_1$ "стороны" $[x, x + v_1]$ параллелепипеда Π мы провели $(k-1)$-мерное пространство, параллельное пространству, натянутому на $v_2, \ldots, v_k$, и это пространство "разрезало" параллелепипед на два. Проверим аддитивность объема. Будем обозначать теми же буквами векторы из координат векторов v_i в некотором ортонормальном базисе пространства V_P. Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_0(P_1)+\mathrm{vol}_0(P_2)&=\det(\alpha v_1,v_2,\ldots,v_k)+\det(\beta v_1,v_2,\ldots,v_k)=\\&=\det(\alpha v_1+\beta v_1,v_2,\ldots,v_k)=\det(v_1,v_2,\ldots,v_k)=\mathrm{vol}_0(P).\end{aligned}$$

Так как P_1 и P_2 ориентированы одинаково, то

$$\big|\mathrm{vol}_0(P_1)+\mathrm{vol}_0(P_2)\big|=\big|\mathrm{vol}_0(P_1)\big|+\big|\mathrm{vol}_0(P_2)\big|=\mathrm{vol}(P_1)+\mathrm{vol}(P_2)=\mathrm{vol}(P).$$

1.7 Формула Кэли–Менгера

Под *n-мерным симплексом* в n-мерном евклидовом пространстве V будем понимать выпуклую оболочку аффинно независимого множества M, состоящего из $(n+1)$-ой точки $a_0,\ldots,a_n$, где ***аффинная независимость*** означает линейную независимость векторов $a_1-a_0,\ldots,a_n-a_0$. ***Стороны симплекса*** — это отрезки $[a_i,a_j]$, $i\neq j$. Отметим, что объем симплекса равен объему параллелепипеда, натянутого на векторы $a_1-a_0,\ldots,a_n-a_0$, деленному на $n!$. Оказывается, объем симплекса можно посчитать только через длины его сторон.

Теорема 1.20 (Кэли–Менгер). *Пусть d_{ij} — длина стороны n-мерного симплекса, тогда объем v этого симплекса может быть вычислен по формуле*

$$v^2=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n(n!)^2}\begin{vmatrix}0&1&1&1&\cdots&1\\1&0&d_{01}^2&d_{02}^2&\cdots&d_{0n}^2\\1&d_{10}^2&0&d_{12}^2&\cdots&d_{1n}^2\\1&d_{20}^2&d_{21}^2&0&\cdots&d_{2n}^2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&d_{n0}^2&d_{n1}^2&d_{n2}^2&\cdots&0\end{vmatrix}.$$

Семинар 1

Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре под редакцией Ю.М.Смирнова, номера

1300, 1307, 1315, 1324, 1330, 1342,

Лекция 2

2.1 Линейные изометрии евклидова пространства

В случае евклидовых пространств, скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ задает норму $\|v\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$, а норма — расстояние $|vw| = \|v - w\|$. Линейная изометрия — это линейный оператор, не меняющий расстояния. Так как норма вектора равна его расстоянию до начала координат, а линейный оператор переводит начало координат в себя, то изометрия сохраняет норму. В силу того, что норма однозначно восстанавливает скалярное произведение, изометрия также сохраняет и скалярное произведение. Обратно, линейный оператор, сохраняющий скалярное произведение, сохраняет и расстояние, т.е. является изометрией. Итак, мы приходим к следующему результату.

Предложение 2.1. *Линейный оператор на евклидовом пространстве является изометрией, если и только если он сохраняет скалярное произведение.*

Аналогично, на комплексном пространстве V с эрмитовым произведением f и соответствующей положительно определенной квадратичной формой F мы можем определить норму $\|v\| = \sqrt{F(v)}$ и расстояние $|vw| = \|v-w\|$. Те же самые рассуждения показывают, что линейная изометрия в этом случае — это линейный оператор, сохраняющий эрмитову форму f.

Предложение 2.2. *Ортогональные преобразования евклидова пространства — это в точности те линейные операторы, которые сохраняют скалярное произведение.*

Доказательство. Пусть T — ортогональное преобразование, переводящее ортонормальный базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ в ортонормальный базис $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ и $A = (a^i_j)$ — его матрица. Выберем произвольные векторы $v, w \in V$ и пусть v^i и w^i — координаты этих векторов в базисе e. Так как e — ортонормальный базис, то $(v, w) = \sum_{i=1}^n v^i w^i$. Имеем

$$\bigl(T(v), T(w)\bigr) = \left(\sum_{i,j} a^i_j v^j e'_i, \sum_{p,q} a^p_q w^q e'_p\right) = \sum_{i,j,p,q} a^i_j a^p_q v^j w^q \delta_{ip} = \sum_{i,j,q} a^i_j a^i_q v^j w^q = \sum_{j,q} \delta_{jq} v^j w^q = \sum_j v^j w^j = (v, w),$$

где предпоследнее равенство выполняется в силу того, что столбцы матрицы A образуют ортонормальный базис в $\mathbb{R}^n$ относительно стандартного скалярного произведения. Таким образом, ортогональное преобразование сохраняет скалярное произведение.

Обратно, пусть T — линейный оператор, сохраняющий скалярное произведение. Этот оператор невырожден, так как ненулевой вектор обязан переходить в ненулевой. Далее, берем произвольный ортонормальный базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$, и пусть T переводит его в базис $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$. Но тогда

$$\delta_{ij} = (e_i, e_j) = \bigl(T(e_i), T(e_j)\bigr) = (e'_i, e'_j),$$

поэтому e' — ортонормальный базис и, значит, T — ортогональное преобразование. ☐

Аналогичный результат имеет место и в комплексном случае. Таким образом, мы приходим к следующему выводу.

Следствие 2.3. *Линейные изометрии — это ортогональные преобразования в вещественном случае, и унитарные преобразования в комплексном.*

Ясно, что тождественное преобразование, обратное к линейной изометрии преобразование и композиция линейных изометрий снова являются линейными изометриями, поэтому линейные изометрии образуют группу. Из следствия 2.3 мгновенно получаем

Следствие 2.4. *Все ортогональные преобразования в вещественном случае, и все унитарные преобразования в комплексном случае образуют группу с операцией — композицией преобразований.*

2.2 Сопряженный оператор в евклидовом и эрмитовом случае

Пусть V — вещественное n-мерное пространство со скалярным произведением, или комплексное пространство с эрмитовым произведением. Это произведение в обоих случаях обозначим $(\cdot,\cdot)$. Линейный оператор $T^*\colon V\to V$ назовем *сопряженным с линейным оператором* $T\colon V\to V$, если для любых $v,w\in V$ выполняется $(Tv,w)=(v,T^*w)$. Покажем, что T^* существует и определен однозначно.

Предположим сначала, что T^* существует. Выберем ортонормальный базис $e_1,\dots,e_n$, и пусть в этом базисе $A=(a_q^p)$ и $B=(b_q^p)$ — матрицы операторов T и T^* соответственно. Тогда условие сопряженности влечет $(Ae_p,e_q)=(e_p,Be_q)=\overline{(Be_q,e_p)}$ для любых p и q. В вещественном случае это равносильно $a_q^p=b_p^q$, а в комплексном $a_q^p=\bar b_p^q$. Иными словами, $B=A^T$ в вещественном случае и $B=A^*$ в комплексном. Если же задать B этими условиями, то непосредственно проверяется, что и для любых $v,w\in V$ верно $(Av,w)=(v,Bw)$. Таким образом, мы доказали существование и единственность сопряженного оператора.

Заметим, что если A — вещественная матрица, то $A^*=A^T$. Последнее позволяет использовать символ $*$ для обозначения операции сопряжения как в комплексном, так и в вещественном пространстве.

Перечислим свойства операции сопряжения, которые мгновенно вытекают из соответствующих свойств матриц. Пусть T и S — линейные операторы, тогда

- *инволютивность*: $T^{**}=T$;
- если оператор T обратим, то $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$;
- *аддитивность*: $(T+S)^*=T^*+S^*$;
- *полулинейность* (*линейность* в вещественном случае): $(\lambda T)^*=\bar\lambda T^*$, $\lambda\in\mathbb{C}$;
- *антидистрибутивность*: $(TS)^*=S^*T^*$;
- если $\|T\|:=\sup\big\{\|Tv\|:\|v\|\le 1\big\}$ — *операторная норма*, то $\|T^*\|=\|T\|$ (проверьте);
- кроме того, $\|T^*T\|=\|T\|^2$.

Как уже было отмечено выше, в ортонормальном базисе матрица B сопряженного оператора связана с матрицей A исходного оператора формулой $B=A^*$. Выясним, как выглядит эта связь в произвольном базисе.

Мы разберем комплексный случай. Вещественный случай разбирается аналогично. Пусть A и B — матрицы исходного и сопряженного операторов в некотором базисе $e=(e_1,\dots,e_n)$. Запишем теперь матрицы этих операторов в ортонормальном базисе $e'=(e'_1,\dots,e'_n)$. Если $D=(d_j^i)$ — матрица перехода от ортонормального базиса к исходному, т.е. $e'_j=\sum_{i=1}^n d_j^i e_i$, то эти матрицы имеют вид $D^{-1}AD$ и $D^{-1}BD$. В ортонормальном базисе, как было показано выше,

$$D^{-1}BD=(D^{-1}AD)^*=D^*A^*(D^{-1})^*=D^*A^*(D^*)^{-1},$$

откуда $B=(DD^*)A^*(DD^*)^{-1}$.

Пусть теперь $C=D^{-1}=(c_j^i)$ — матрица перехода от исходного базиса к ортогональному, т.е. $e_j=\sum_{i=1}^n c_j^i e'_i$, и $G=(g_{pq})$ — матрица эрмитова произведения в базисе e, тогда

$$g_{pq}=(e_p,e_q)=\left(\sum_i c_p^i e'_i,\sum_j c_q^j e'_j\right)=\sum_i c_p^i\bar c_q^i,$$

т.е. $G=C^T\bar C$. Таким образом,

$$G=C^T\bar C=(D^{-1})^T\bar D^{-1}=(D^T)^{-1}\bar D^{-1}=(\bar D D^T)^{-1}=\overline{(D\bar D^T)^{-1}}=\overline{(DD^*)^{-1}},$$

поэтому $DD^*=\bar G^{-1}$ и, значит, $B=\bar G^{-1}A^*\bar G$.

Теорема 2.5. *Пусть V — комплексное векторное пространство размерности n, наделенное эрмитовым произведением $(\cdot,\cdot)$. Пусть $e_1,\dots,e_n$ — произвольный базис в V. Положим $g_{pq}=(e_p,e_q)$ и пусть $G=(g_{pq})$ — соответствующая матрица эрмитова произведения. Тогда матрица A произвольного оператора и матрица B сопряженного оператора, вычисленные в выбранном базисе, связаны соотношением $B=\bar G^{-1}A^*\bar G=\overline{G^{-1}A^TG}$.*

Если же V — вещественное пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, то, во введенных выше обозначениях, $B=G^{-1}A^TG$.

2.3 Самосопряженные и кососамосопряженные операторы

Под *самосопряженным оператором* понимают такие, у которых сопряженный и исходный операторы совпадают. На уровне матриц A, соответствующих ортонормальным базисам, это означает, что $A = A^T$ в вещественном случае, т.е. A — ортогональная матрица. В комплексном случае это условие имеет вид $A^* = A$, поэтому самосопряженным операторам соответствуют унитарные матрицы.

Оператор называется *кососамосопряженным*, если его сопряженный равен исходному со знаком минус. В вещественном случае, снова в ортонормальном базисе, соответствующее условие на матрицы — это $A^T = -A$, так что такие операторы задаются кососимметричными матрицами. В комплексном случае эти операторы удовлетворяют $A^* = -A$ и называются *косоэрмитовыми*.

В силу теоремы 2.5, если $e_1, \ldots, e_n$ произвольный базис вещественного векторного пространства V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, то матрицы самосопряженных операторов описываются следующим условием: если $G = (g_{ij})$, $g_{ij} = (e_i, e_j)$ — матрица скалярного произведения, то линейный оператор самосопряжен, если и только если его матрица A удовлетворяет следующему уравнению: $GA = A^T G$. В комплексном случае уравнение такое: $\bar{G}A = A^* \bar{G}$ или $G\bar{A} = A^T G$, где G — матрица эрмитова произведения.

2.4 Собственные числа самосопряженных и кососамосопряженных операторов

Пусть V — комплексное пространство с эрмитовым произведением $(\cdot, \cdot)$ и $T\colon V \to V$ — самосопряженный оператор с матрицей A в некотором базисе.

Лемма 2.6. *Все собственные числа матрицы A вещественны.*

Доказательство. Пусть v — собственный вектор матрицы A, и $\lambda \in \mathbb{C}$ — соответствующее собственное число, тогда

$$(Av, v) = \lambda(v, v) = (v, Av) = \bar{\lambda}(v, v),$$

и так как $(v, v) \neq 0$, то $\lambda = \bar{\lambda}$, откуда $\lambda \in \mathbb{R}$. ☐

Теорема 2.7. *Существует ортонормальный базис пространства V, состоящий из собственных векторов матрицы A.*

Доказательство. Характеристический многочлен, корни которого — собственные числа матрицы A, имеет хотя бы один комплексный корень λ по основной теореме алгебры. По лемме 2.6, имеем $\lambda \in \mathbb{R}$. Пусть v — соответствующий λ собственный вектор. Обозначим L ортогональное дополнение к линейной оболочке вектора v. Пусть $w \in L$, тогда $(v, Aw) = (Av, w) = (\lambda v, w) = \lambda(v, w) = 0$, поэтому оператор T переводит L в себя и, очевидно, $T|_L$ — самосопряженный оператор. Продолжая этот процесс, мы и найдем ортогональный базис, составленный из собственных векторов. После нормировки всех найденных векторов получим искомый базис. ☐

Следствие 2.8. *Оператор T на комплексном пространстве с эрмитовым произведением самосопряженный, если и только если все его собственные числа вещественны, и существует ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов оператора T.*

Доказательство. Мы доказали, что самосопряженный оператор удовлетворяет условию теоремы. Пусть теперь T — оператор, у которого все собственные числа вещественны и имеется ортонормальный базис из собственных векторов. Тогда в этом базисе матрица A оператора T — вещественная и диагональная. Отметим, что тогда в этом базисе имеем $A = A^*$, так что T — самосопряженный оператор. ☐

Аналогичные рассуждения в вещественном случае приводят к следующему результату.

Следствие 2.9. *Оператор T на вещественном пространстве с евклидовым скалярным произведением самосопряженный, если и только если все его собственные числа вещественны, и существует ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов оператора T.*

Пусть V — комплексное пространство с эрмитовым произведением $(\cdot, \cdot)$ и $T\colon V \to V$ — кососамосопряженный оператор с матрицей A в некотором базисе.

Лемма 2.10. *Все собственные числа матрицы A чисто мнимые, т.е. равны мнимой единице, умноженной на вещественное число.*

Доказательство. Пусть v — собственный вектор матрицы A, и $\lambda \in \mathbb{C}$ — соответствующее собственное число, тогда

$$(Av, v) = \lambda(v, v) = -(v, Av) = -\bar{\lambda}(v, v),$$

и так как $(v, v) \neq 0$, то $\lambda = -\bar{\lambda}$, откуда λ — чисто мнимое число. □

Дословно повторяя приведенные выше рассуждения, заключаем

Следствие 2.11. *Оператор T на комплексном пространстве с эрмитовым произведением кососамосопряженный, если и только если все его собственные числа чисто мнимые, и существует ортонормальный базис, состоящий из собственных векторов оператора T.*

В случае вещественного пространства V, кососимметричные операторы не диагонализуемы (за исключением нулевого), и их вещественные собственные числа только нули. Однако имеет место следующий результат, который мы приведем без доказательства.

Теорема 2.12. *Для каждого кососимметричного оператора в вещественном пространстве существует базис, в котором его матрица имеет вид*

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda_r & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Более того, матрица перехода к такому базису от ортонормального базиса может быть выбрана ортогональной.

2.5 Приведение пары форм к главным осям

Пусть V — вещественное n-мерное векторное пространство, на котором задано скалярное произведение g и симметричная билинейная форма f. Для каждого базиса пространства V рассмотрим матрицы G и B этих форм и образуем матрицу $A = G^{-1}B$.

Лемма 2.13. *Построенные выше матрицы A соответствуют матрицам некоторого линейного оператора T.*

Доказательство. Действительно, достаточно проверить, что если C — матрица перехода от нового базиса к старому, то матрица A перейдет $C^{-1}AC$. Но это действительно так, потому что G переходит в C^TGC, а B переходит в C^TBC, и, значит, $A = G^{-1}B$ перейдет в

$$(C^TGC)^{-1}(C^TBC) = C^{-1}G^{-1}(C^T)^{-1}C^TBC = C^{-1}G^{-1}BC = C^{-1}G^{-1}BC = C^{-1}AC,$$

что и требовалось. □

Лемма 2.14. *Оператор T с матрицами $A = G^{-1}B$ самосопряженный.*

Доказательство. В разделе 2.3 мы показали, что условие самосопряженности оператора T с матрицей A имеет вид $GA = A^TG$. В нашем случае имеем

$$GA = GG^{-1}B = B = B^T = B^TG^{-1}G = B^T(G^{-1})^TG = (G^{-1}B)^TG = A^TG,$$

что и завершает доказательство самосопряженности оператора A. □

Теорема 2.15. *Существует ортонормальный относительно g базис, в котором матрица формы f диагональна.*

Доказательство. Построенный выше оператор T является самосопряженным в соответствии с леммой 2.14. В силу следствия 2.9 существует ортонормальный базис, в котором матрица оператора T диагональна. Это означает, что в этом базисе $G = E$ (базис ортонормальный), а $G^{-1}B = B$ — диагональна. Доказательство закончено. ☐

Элементы ортонормального базиса из теоремы 2.15 традиционно называются *главными осями*, а переход к этому базису — *приведение пары форм f и g к главным осям.* Диагональные элементы матрицы B в базисе главных осей называются *собственными значениями пары форм f и g.* Последнее обусловлено тем, что в силу следствия 2.9, эти диагональные элементы являются собственными числами самосопряженного оператора $G^{-1}B$. Последнее позволяет находить эти собственные числа как корни многочлена $\det(G^{-1}B - \lambda E) = 0$. Так как G — невырожденная матрица, последнее равенство эквивалентно

$$0 = \det G \det(G^{-1}B - \lambda E) = \det\bigl(G(G^{-1}B - \lambda E)\bigr) = \det(B - \lambda G).$$

Уравнение $\det(B - \lambda G) = 0$ называется *характеристическим.*

Как найти собственные векторы (главные оси)? В соответствие с общей теорией, для каждого собственного числа λ_i нужно найти ядро оператора $G^{-1}B - \lambda_i E$, или, что эквивалентно, решить уравнение $(B - \lambda_i G)x = 0$. При этом, так как главные оси образуют ортонормальный базис, а подпространства, соответствующие разным собственным числам ортогональны, требуется из каждого решения выбрать некоторый ортонормальный базис, и тогда объединение этих базисов даст одно из искомых семейств главных осей. Итак, мы доказали следующий результат.

Теорема 2.16. *Пусть V — вещественное n-мерное векторное пространство, на котором задано скалярное произведение g и симметричная билинейная форма f. Пусть G и B — матрицы этих форм в некотором базисе. Тогда существует базис e, в котором*

$$g(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 \quad \text{и} \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

Числа λ_i являются корнями многочлена $p(\lambda) = \det(B - \lambda G)$, а векторы базиса e вычисляются решением уравнений $(B - \lambda_i G)x = 0$ и выбором из пространств решений ортонормированных базисов.

Семинар 2

Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре под редакцией Ю.М.Смирнова, номера

1409, 1437, 1457 (2), 1661 (1,3), 1669 (2,5), 1673 (1)

Лекции 3 – 4. Тензоры

В следующих двух лекциях мы поговорим о тензорах. Мы приведем два определения тензоров: инвариантное через полилинейные отображения и координатное через наборы чисел, приписанные каждому базису векторного пространства. Имеется также конструкция тензорного произведения пространств, приводящая к более широкому классу тензоров, однако ее мы затрагивать не будем из-за явного недостатка времени.

Все векторные пространства предполагаются конечномерными и вещественными.

3.1 Двойственное пространство

Пусть V — векторное пространство размерности n. Напомним, что V^* обычно обозначается двойственное векторное пространство, т.е. пространство всех линейных отображений $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ с поточечными линейными комбинациями: для любых $\varphi, \psi \in V^*$, $a, b \in \mathbb{R}$ и $v \in V$ полагаем

$$(a\varphi + b\psi)(v) = a\varphi(v) + b\psi(v).$$

Элементы V^* называются *линейными функционалами* или *ковекторами*. Как и любое линейное отображение, каждый линейный функционал $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ однозначно задается своими значениями на произвольном базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства V, при этом для любых чисел $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ существует функционал φ, для которого $\varphi(e_i) = \varphi_i$ при всех i. В частности, определены линейные функционалы e^i, заданные так: $e^i(e_j) = \delta^i_j$ для всех i и j. Эти функционалы независимы, так как условие $\sum_i a_i e^i = 0$ влечет $\big(\sum_i a_i e^i\big)(e_j) = a_j = 0$ для всех j. Кроме того, если φ — произвольный функционал и $\varphi(e_i) = \varphi_i$ при всех i, то $\varphi = \sum_i \varphi_i e^i$, так как $\varphi_j = \varphi(e_j) = \big(\sum_i \varphi_i e^i\big)(e_j)$ при всех j. Таким образом, функционалы $e^1, \dots, e^n$ образуют базис двойственного пространства V^*, и этот базис называется *двойственным* базису $e_1, \dots, e_n$.

3.2 Полилинейные отображения и тензоры

Далее, пусть $V_1, \dots, V_k, W$ — линейные пространства. Тогда отображение $T\colon V_1 \times \dots \times V_k \to W$ называется *полилинейным*, если оно линейно по каждому аргументу, а именно, для любого $1 \le i \le k$, любых $v_1 \in V_1, \dots, v_i, v_i' \in V_i, \dots, v_k \in V_k$ и $a, b \in \mathbb{R}$ выполняется

$$T(v_1, \dots, a\,v_i + b\,v_i', \dots, v_k) = a\,T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + b\,T(v_1, \dots, v_i', \dots, v_k).$$

Если же в качестве V_i выбрать p сопряженных пространств V^* и q исходных пространства V, а в качестве W — поле $\mathbb{R}$ (одномерное векторное пространство), т.е.

$$T\colon \underbrace{V^* \times \cdots V^*}_{p \text{ штук}} \times \underbrace{V \times \cdots V}_{q \text{ штук}} \to \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

то такой T называется *тензором типа* (p, q). При этом сумма $p + q$ называется *рангом* тензора T.

Пример 3.1. Константы (вещественные числа) также являются полилинейными отображениями с нулем аргументов, т.е. они — тензоры типа $(0, 0)$. Каждый вектор $v \in V$ можно рассматривать как линейное отображение на двойственном пространстве: $v(\xi) := \xi(v)$, где $\xi \in V^*$, поэтому векторы относят к тензорам типа $(1, 0)$. Ковекторы по определению являются тензорами типа $(0, 1)$. Билинейные формы — это тензоры типа $(0, 2)$. Оказывается, линейные отображения тоже можно отождествить с некоторыми тензорами, а именно, с тензорами типа $(1, 1)$, но это мы проверим немного позже.

3.2.1 Линейное пространство тензоров одного типа

Как и линейные отображения, тензоры одного типа можно складывать и умножать на числа (при этом будут снова получаться тензоры того же типа, убедитесь в этом). Таким образом, тензоры типа (p,q) образуют векторное пространство, которое обозначается V^p_q.

3.2.2 Тензорное произведение

Если T — тензор типа (p,q), а S — тензор типа (r,s), то можно определить тензор $T\otimes S$ типа $(p+r,q+s)$ следующим образом: если $\xi^1,\dots,\xi^{p+r}\in V^*$ и $v_1,\dots,v_{q+s}\in V$, то

$$(T\otimes S)(\xi^1,\dots,\xi^{p+r},v_1,\dots,v_{q+s})=T(\xi^1,\dots,\xi^p,v_1,\dots,v_q)S(\xi^{p+1},\dots,\xi^{p+r},v_{q+1},\dots,v_{q+s})$$

(убедитесь, что так определенное отображение является полилинейным). Этот тензор называется *тензорным произведением тензоров T и S*. Чуть ниже мы опишем базис пространства V^p_q в терминах тензорных произведений. Сейчас же отметим очевидные свойства, вытекающие из ассоциативности и дистрибутивности произведения чисел: тензорное произведение ассоциативно и дистрибутивно, т.е. $(T\otimes S)\otimes R=T\otimes(S\otimes R)$ для любых тензоров, и, в предположении, что у S и R одинаковые типы, выполняется $T\otimes(S+R)=T\otimes S+T\otimes R$ и $(S+R)\otimes T=S\otimes T+R\otimes T$. Отметим также, что тензорное умножение на тензор типа $(0,0)$, т.е. на константу — это описанное выше обычное умножение тензора на число. Здесь, в частности, имеет место равенство $a(T\otimes S)=(aT)\otimes S=T\otimes(aS)$, где $a\in\mathbb{R}$.

Замечание 3.2. В общем случае тензорное произведение некоммутативно (см. ниже), но для тензора T типа $(p,0)$ и тензора S типа $(0,q)$ коммутативность имеет место: $T\otimes S=S\otimes T$. Для вычислений полезно иметь в виду, что если тензорное произведение составляют тензоры T_k типов $(p_k,0)$, $k=1,\dots,a$, и тензоры S^l типов $(0,q_l)$, $l=1,\dots,b$, записанные в произвольном порядке, но так, что каждое T_k следует перед T_{k+1}, и каждое S_k следует перед S_{k+1}, то для конкретный вычислений, пользуясь описанной выше коммутативностью, результирующий тензор полезно записать в виде

$$T_1\otimes\dots\otimes T_a\otimes S^1\otimes\dots\otimes S^b,$$

чтобы, скажем, последовательность ковекторов и векторов, к которым этот тензор применяется, начиналась с ковекторов и заканчивалась векторами, как и в отображении (3.1). Отметим, что тензоры T_k, как и тензоры S^l нельзя переставлять между собой.

3.2.3 Подстановка

Еще одна естественная операция над тензорами — подстановка. По определению, тензоры — это полилинейные отображения, поэтому если вместо некоторых аргументов подставить какие-то фиксированные векторы и ковекторы, то относительно оставшихся аргументов мы снова получим полилинейное отображение, т.е. тензор. Эта операция называется *подстановкой* и, в частности, с помощью нее мы установим соответствие между тензорами типа $(1,1)$ и линейными операторами.

3.3 Тензорные обозначения и соглашения

Так как в тензорном исчислении формулы обычно громоздкие, было принято удобное соглашение, делающее формулы более наглядными. А именно,

- у базисных векторов исходного пространства V индексы всегда нижние, а у базисных векторов двойственного пространства — всегда верхние, как мы и писали выше;
- при замене базиса мы не будем менять букву, соответствующую названию базисного вектора, а вместо этого будем ставить штрих у индекса, например, $e_{i'}$ означает новый базисный вектор, а не вектор того же базиса $e_1,\dots,e_n$, но с новым индексом i'; при этом i' — это тоже новый индекс (формально говоря, мы должны были бы записывать векторы нового базиса $e'_{i'}$, но было решено избавиться от лишних штрихов);
- координаты векторов всегда будут с верхними индексами, например $v=(v^1,\dots,v^n)\in V$, а координаты ковекторов — с нижними, например $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in V^*$;

- знаки суммы мы почти всегда писать не будем, при этом будем следить, чтобы суммирование проходило по индексам на разной высоте, например компоненты матрицы C линейного преобразования от базиса e_i к базису $e_{i'}$ будут записываться в виде $(c_i^{i'})$, поэтому, с учетом правила суммирования, имеем $e_i = c_i^{i'} e_{i'}$ (так преобразуются базисы), а $v^{i'} = c_i^{i'} v^i$ (так преобразуются координаты векторов); матрица C^{-1} имеет компоненты $c^i_{i'}$, так что $e_{i'} = c^i_{i'} e_i$ и $v^i = c^i_{i'} v^{i'}$, а условие того, что матрицы C и C^{-1} взаимно обратны, имеет вид $c_i^{i'} c^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'}$ (в матричном виде: $CC^{-1} = E$) или $c^i_{i'} c^{i'}_j = \delta^i_j$ (в матричном виде: $C^{-1}C = E$).

Пример 3.3. Запишем в сделанных соглашениях, как преобразуются координаты линейного оператора и билинейной формы при переходе к другому базису. Пусть $A = (a^i_j)$ — матрица линейного оператора в базисе $e_1, \dots, e_n$, тогда в новом базисе $e_{1'}, \dots, e_{n'}$ эта матрица будет иметь вид $(a^{i'}_{j'})$. Теперь, с учетом правила высоты, легко чисто автоматически написать формулу преобразования координат: $a^{i'}_{j'} = c^{i'}_i c^j_{j'} a^i_j$. Напомним, что матрица $C = (c^{i'}_i)$ задает переход от базиса e_i к базису $e_{i'}$, т.е. $e_i = c^{i'}_i e_{i'}$, а матрица $D = (c^j_{j'})$ является обратной к C и задает переход от базиса $e_{i'}$ а базису e_i, т.е. $e_{i'} = c^i_{i'} e_i$. Остается вспомнить, что компоненты a^i_j оператора записывают так, что нижний индекс пробегает по строке, т.е. он отвечает за номер столбца. Это позволяет по приведенной выше записи преобразования восстановить матричную запись: в новом базисе матрица оператора A имеет вид CAC^{-1} или $D^{-1}AD$.

Для билинейной формы B с матрицей (b_{ij}) в исходном базисе e_i ее координаты в новом базисе $e_{i'}$ запишутся (автоматически) так: $b_{i'j'} = c^i_{i'} c^j_{j'} b_{ij}$ (мы также следим, чтобы одноименные индексы в формулах оставались на том же уровне). В матричном виде имеем $D^T BD$.

3.4 Координаты или компоненты тензоров, тензорный закон

По аналогии с ковекторами и билинейными формами, у которых координаты — значения на базисных векторах, определим *координаты* или *компоненты тензора T типа (p, q)* как значения этого тензора на векторах базиса и двойственного базиса:

$$T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = T\big(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q}\big).$$

Из полилинейности тензора вытекает, что значение тензора на векторах и ковекторах записывается только с помощью координат этих векторов, ковекторов и самого тензора. А именно,

$$(3.2) \qquad T(\xi^1, \dots, \xi^p, v_1, \dots, v_q) = T\big(\xi^1_{i_1} e^{i_1}, \dots, \xi^p_{i_p} e^{i_p}, v_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, v_q^{j_q} e_{j_q}\big) = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \xi^1_{i_1} \cdots \xi^p_{i_p} v_1^{j_1} \cdots v_q^{j_q}.$$

Как запишутся компоненты этого тензора в другом базисе $e_{i'}$? Имеем $e^{i'} = c^{i'}_i e^i$, $e_{i'} = c^i_{i'} e_i$, откуда

$$(3.3) \qquad T^{i'_1\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_q} = T(e^{i'_1}, \dots, e^{i'_p}, e_{j'_1}, \dots, e_{j'_q}) = T\big(c^{i'_1}_{i_1} e^{i_1}, \dots, c^{i'_p}_{i_p} e^{i_p}, c^{j_1}_{j'_1} e_{j_1}, \dots, c^{j_q}_{j'_q} e_{j_q}\big) = c^{i'_1}_{i_1} \cdots c^{i'_p}_{i_p} c^{j_1}_{j'_1} \cdots c^{j_q}_{j'_q} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}.$$

Это формула называется *тензорным законом.*

Задача 3.1. Покажите, что если числа $T^{i'_1\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_q}$ получаются из чисел $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ тензорным законом, то и обратно, числа $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ получаются из чисел $T^{i'_1\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_q}$ тензорным законом. Далее, покажите, что если числа $T^{i'_1\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_q}$ и $T^{i''_1\cdots i''_p}_{j''_1\cdots j''_q}$ получаются из чисел $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ тензорным законом, то и числа $T^{i''_1\cdots i''_p}_{j''_1\cdots j''_q}$ получаются из чисел $T^{i'_1\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_q}$ тензорным законом.

3.5 Координатное определение тензоров

С помощью тензорного закона можно дать эквивалентное определение тензоров, которое называется *координатным*, в отличие от приведенного выше *инвариантного* определения тензоров через полилинейные функционалы. А именно, назовем *тензором типа (p, q)* приписанный каждому базису набор из n^{p+q} чисел $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ так, что числа, приписанные базису e_i и базису $e_{i'}$ связаны друг с другом по тензорному закону.

То, что тензоры порождают такие наборы чисел, мы уже проверили. Остается показать, что каждому такому семейству наборов чисел соответствует конкретный тензор, т.е. конкретное полилинейное отображение. Это отображение в каждом базисе можно задать в виде (3.2), и в каждом конкретном базисе такое отображение будет полилинейно в силу полилинейности умножения чисел, однако остается одна неопределенность: возможно, в разных базисах мы зададим разные полилинейные отображения. Таким образом, нужно проверить, что тензорный закон связи компонент гарантирует нам однозначную определенность соответствующего полилинейного отображения. Проверим это:

$$T(\xi^{1'}, \ldots, \xi^{p'}, v_{1'}, \ldots, v_{q'}) = T^{i'_1 \cdots i'_p}_{j'_1 \cdots j'_q} \xi^{1'}_{i'_1} \cdots \xi^{p'}_{i'_p} v^{j'_1}_{1'} \cdots v^{j'_q}_{q'} =$$
$$= T^{i'_1 \cdots i'_p}_{j'_1 \cdots j'_q} c^{i_1}_{i'_1} \xi^1_{i_1} \cdots c^{i_p}_{i'_p} \xi^p_{i_p} c^{j'_1}_{j_1} v^{j_1}_1 \cdots c^{j'_q}_{j_q} v^{j_q}_1 = T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \xi^1_{i_1} \cdots \xi^p_{i_p} v^{j_1}_1 \cdots v^{j_q}_q = T(\xi^1, \ldots, \xi^p, v_1, \ldots, v_q),$$

что и требовалось.

Задача 3.2. Воспользуйтесь задачей 3.1 и покажите, что любой набор из n^{p+q} чисел, приписанный некоторому базису $e_1, \ldots, e_n$, продолжается единственным образом до тензора типа (p, q).

Пример 3.4. Воспользуемся задачей 3.2 и для базиса e_i и двойственного ему базиса e^i обозначим теми же буквами соответствующие тензоры типа $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Отметим, что j-ая координата тензора e_i равна $e_i(e^j) = \delta^j_i$, поэтому в новом базисе $e_{i'}$ его координаты имеют вид $c^{j'}_j \delta^j_i = c^{j'}_i$ (тензорный закон), т.е. это — i-ый столбец матрицы перехода $C = (c^{j'}_i)$. Аналогично, у e^i его j-ая координата равна $e^i(e_j) = \delta^i_j$, поэтому в базисе $e_{i'}$ его координаты — это $c^j_{j'} \delta^i_j = c^i_{j'}$, т.е. это — i-ая строка матрицы $C^{-1} = (c^i_{j'})$.

3.6 Тензорные операции

Координатное определение тензоров часто используется для введения новых операций над тензорами. А именно, в каждом базисе пространства V мы проделываем над компонентами тензора или тензоров некоторые операции. Если оказывается, что результаты согласованы с тензорным законом, т.е. полученные новые наборы чисел связаны друг с другом по тензорному закону, то полученные наборы образуют некоторый тензор. В таком случае операция, переводящая компоненты тензоров в новые наборы чисел, образующие тензор, называется *тензорной*.

Пример 3.5. Выше мы на инвариантном языке полилинейных отображений показали, что линейные комбинации тензоров одного типа также являются тензорами. Мы могли бы это проделать и по-другому, а именно, в каждом базисе рассмотреть линейную комбинацию компонент двух тензоров одного типа, а затем заметить, что тензорный закон переводит каждый из полученных наборов чисел в набор чисел, полученный в другом базисе. Тем самым, линейная комбинация тензоров одного типа — тензорная операция. Аналогично, тензорными операциями являются произведение тензоров и подстановка векторов и ковекторов.

В дальнейшем мы приведем еще целый ряд примеров тензорных операций. Многие из таких операций будут в действительности композициями уже известных тензорных операций. Легко видеть, что каждая композиция тензорных операций снова является тензорной операцией, чем мы и будем пользоваться для доказательства того, что в результате вводимых операций получаются тензоры.

3.7 Базис линейного пространства тензоров

В обозначениях примера 3.4, рассмотрим тензоры $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$ и выберем произвольные ковекторы $\xi^1, \ldots, \xi^p$ и векторы $v_1, \ldots, v_q$, $\xi^k = \xi^k_{i_k} e^{i_k}$, $v_l = v^{j_l}_l e_{j_l}$. Тогда

$$(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q})(\xi^1, \ldots, \xi^p, v_1, \ldots, v_q) = \xi^1_{i_1} \cdots \xi^p_{i_p} v^{j_1}_1 \cdots v^{j_q}_q,$$

поэтому, в соответствии с выражением (3.2), имеем

$$T = T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}. \tag{3.4}$$

Иными словами, линейные комбинации тензоров $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$ порождают все линейное пространство V^p_q тензоров типа (p, q).

Покажем, что тензоры $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$ линейно независимы. Действительно, правая часть выражения (3.4) представляет собой линейную комбинацию тензоров $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$. В соответствии с задачей 3.2, в качестве коэффициентов этой линейной комбинации можно брать произвольные числа (каждая такая комбинация продолжается до тензора). С другой стороны, в случае линейной зависимости имеется нетривиальная линейная комбинация, равная 0 (значение тензора T на любых ковекторах и векторах равно нулю). Пусть в ней некоторый коэффициент $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ отличен от нуля. Но если в качестве ковекторов и векторов взять $\xi^k = e^{i_k}$ и $v_l = e_{j_l}$, $k = 1, \ldots, p$, $l = 1, \ldots, q$, то получим

$$0 = T(\xi^1, \ldots, \xi^p, v_1, \ldots, v_q) = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} \neq 0,$$

противоречие. Таким образом, мы показали, что тензоры $e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$ образуют базис пространства V^p_q, который будем называть *соответствующим базису* $e_1, \ldots, e_n$. Напомним, что числа $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ в разложении (3.4) тензора T мы назвали координатами или компонентами тензора T в базисе $e_1, \ldots, e_n$. Теперь это определение становится еще естественней. Отметим также, что исходя из вида базиса, размерность пространства V^p_q можно легко вычислить, а именно, она равна n^{p+q}.

Пример 3.6. Выше мы обсудили, что константы, векторы, ковекторы и билинейные формы являются тензорами. Покажем, как можно естественным образом отождествить линейные операторы с тензорами типа $(1,1)$. Базис в пространстве V^1_1 состоит из тензорных произведений $e_i \otimes e^j$, так что каждый тензор типа $(1,1)$ записывается в виде $a^i_j e_i \otimes e^j$. Составим из координат этого тензора матрицу $A = (a^i_j)$. Тензорный закон (3.3) дает $a^{i'}_{j'} = c^{i'}_i c^j_{j'} a^i_j$, так что при замене базиса матрица A меняется по тому же закону, что и матрица линейного оператора. Как мы уже обсуждали на предыдущих лекциях, существует единственный линейный оператор с такими матрицами. Итак, каждый тензор типа $(1,1)$ однозначно определяет некоторый линейный оператор. Обратно, если задан линейный оператор с матрицей $A = (a^i_j)$ в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$, то, в силу задачи 3.2, существует единственный тензор типа $(1,1)$, у которого в этом базисе координаты равны a^i_j. Построенное соответствие, сопоставляющее линейному оператору тензор типа $(1,1)$, однозначно определено, так как компоненты матрицы линейного оператора и координаты тензора меняются одинаковым образом при замене базиса.

Если $v = v^i e_i$ — вектор, то его образ w при действии линейного оператора с матрицей A имеет координаты $w^i = a^i_j v^j$. Как получить соответствующий результат, если вместо оператора рассмотреть соответствующий тензор? Пусть $T = a^i_j e_i \otimes e^j$, тогда вектор w получается, если применить e^j к v:

$$T(\cdot, v) = a^i_j e_i \otimes e^j(v) = (a^i_j v^j) e_i.$$

Иными словами, вектор w получается операцией подстановки, описанной выше: мы подставляет v во второй аргумент тензора T и получаем вектор w. Ниже мы определим еще одну операцию над тензорами, а именно, свертку, и покажем, как предыдущая конструкция записывается через эту операцию.

3.8 Свертка тензоров

Для удобства, если в некоторой последовательности индексов какой-то индекс пропущен, то будем обозначать это "шапочкой", например

$$T_{j_1\cdots j_{l-1} j_{l+1}\cdots j_q} = T_{j_1\cdots \widehat{j_l} \cdots j_q}.$$

Перейдем к определению свертки. Сначала рассмотрим тензор T типа (p,q), где $p \geq 1$ и $q \geq 1$, и пусть $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ — его координаты в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$. Выберем какой-нибудь верхний индекс i_k и какой-нибудь нижний индекс j_l, и рассмотрим числа

$$(C^k_l T)^{i_1\cdots \widehat{i_k} \cdots i_p}_{j_1\cdots \widehat{j_l} \cdots j_q} = \sum_{\alpha=1}^{n} T^{i_1\cdots i_k=\alpha \cdots i_p}_{j_1\cdots j_l=\alpha \cdots j_q}.$$

Иными словами, при фиксированных индексах, отличных от i_k и j_l мы суммируем все такие компоненты, в которых верхний k-ый и нижний l-ый индексы равны. И такое мы проделываем в каждом базисе. Непосредственно проверяется, что описанная только что операция является тензорной, т.е. что полученный набор чисел порождает тензор типа $(p-1, q-1)$, который называется *сверткой тензора T по верхнему k-му и нижнему l-му индексам.*

Если задано два тензора, а именно T типа (p,q) и S типа (r,s), причем $p + r \geq 1$ и $q + s \geq 1$, то определена свертка C^k_l этих тензоров как соответствующая свертка их тензорного произведения, т.е. как $C^k_l(T \otimes S)$ (это — тензорная операция как композиция тензорных операций).

Пример 3.7. Свертка тензора $T = a^i_j e_i \otimes e^j$ — это число a^i_i, которое, если отождествить T с соответствующим линейным оператором, есть в точности след этого оператора. Отметим, что, в силу тензорного закона, это число одно и то же во всех базисах.

Запишем в терминах свертки результат применения соответствующего оператора к вектору v. Имеем $w = C^2_1(T \otimes v)$ (убедитесь в этом).

3.9 Перестановка индексов в тензоре

Чтобы определить два важных типа тензоров, нам понадобится еще одна операция, которая называется *перестановкой индексов*. Она состоит в том, что мы меняем порядок в расположении векторов и ковекторов. В принципе, можно менять порядки любого поднабора векторов, а также любого поднабора ковекторов, что не изменит свойства отображения быть полилинейным. Однако мы будем рассматривать лишь случай изменения порядка всех векторов, или изменения порядка всех ковекторов. Изменения порядка задается операцией перестановки. Напомним, что *перестановкой* называется каждая биекция множества $\{1, \dots, k\}$. Так как композиция биекций — снова биекция, множество всех таких перестановок образует группу, которая обозначается $\mathcal{S}_k$. Для каждой перестановки $\sigma \in \mathcal{S}_k$ и упорядоченного набора индексов $(i_1, \dots, i_k)$ естественно определяется действие этой перестановки на индексах: $\sigma(i_1, \dots, i_k) = (i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(k)})$.

Пусть T — тензор типа (p, q) и $\sigma \in S_p$. Тогда тензор T^σ определяется так:

$$T^\sigma(\xi^1, \dots, \xi^p, v_1, \dots, v_p) = T(\xi^{\sigma(1}, \dots, \xi^{p)}, v_1, \dots, v_p).$$

Если $T^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ — компоненты тензора T в некотором базисе, то компоненты тензора T^σ имеют вид

$$(T^\sigma)^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = T^{\sigma(i_1 \cdots i_p)}_{j_1 \cdots j_q}.$$

Аналогично определяется перестановка нижних индексов. На уровне компонент имеем

$$(T_\sigma)^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} = T^{i_1 \cdots i_p}_{\sigma(j_1 \cdots j_q)}.$$

Так как перестановка векторов (ковекторов) оставляет полилинейное отображение полилинейным, перестановка индексов — тензорная операция.

3.10 Симметричные тензоры

Важным частным случаем тензоров являются симметричные и кососимметричные тензоры. Предположим, что в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$ компоненты тензора T типа $(0, q)$ симметричны в следующем смысле: для любой перестановки $\sigma \in \mathcal{S}_q$ и любой компоненты $T_{i_1,\dots,i_q}$ тензора T выполняется $T_{\sigma(i_1,\dots,i_q)} = T_{i_1,\dots,i_q}$. Но тогда

$$T_{\sigma(i'_1,\dots,i'_q)} = c^{i_1}_{\sigma(i'_1} \cdots c^{i_q}_{i'_q)} T_{i_1,\dots,i_q} = c^{\sigma(i_1}_{\sigma(i'_1} \cdots c^{i_q)}_{i'_q)} T_{\sigma(i_1,\dots,i_q)} = c^{\sigma(i_1}_{\sigma(i'_1} \cdots c^{i_q)}_{i'_q)} T_{i_1,\dots,i_q} = c^{i_1}_{i'_1} \cdots c^{i_q}_{i'_q} T_{i_1,\dots,i_q} = T_{i'_1,\dots,i'_q},$$

где третье равенство вытекает из симметричности компонент тензора в базисе $e_1, \dots, e_n$, а четвертое — из коммутативности умножения чисел. Тем самым, мы показали, что *симметричность компонент тензора типа* $(0, q)$ *в одном базисе равносильна симметричности его компонент во всех базисах.* Такие тензоры называются *симметричными* или *симметрическими.* Аналогично определяются симметричные тензоры типа $(p, 0)$.

Легко проверяется, что линейная комбинация симметричных тензоров одного типа — также симметричный тензор, т.е. симметричные тензоры типа $(0, q)$ образуют векторное пространство, которое мы обозначим $\mathrm{Sym}^q(V)$.

Пример 3.8. Симметричные билинейные формы соответствуют в точности симметричным тензорам типа $(0, 2)$.

Покажем, как из произвольного тензора типа $(0, q)$ можно получить симметричный. Запишем в каждом базисе компоненты произвольного тензора T типа $(0, q)$ и построим по ним новые наборы чисел следующим образом: если $T_{i_1 \cdots i_q}$ — компоненты T в некотором базисе, то положим

$$\mathrm{Sym}(T)_{i_1 \cdots i_q} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} T_{\sigma(i_1 \cdots i_q)}.$$

Так как перестановки индексов и линейные комбинации являются тензорными операциями, то полученные наборы чисел образуют тензор. Это тензор — симметричный. Действительно, для любой перестановки $\nu \in \mathcal{S}_q$ имеем

$$\mathrm{Sym}(T)_{\nu(i_1\cdots i_q)} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T_{(\sigma\circ\nu)(i_1\cdots i_q)} = \frac{1}{q!}\sum_{\mu\in\mathcal{S}_q} T_{\mu(i_1\cdots i_q)} = \mathrm{Sym}(T)_{i_1\cdots i_q}.$$

Мы воспользовались тем, что если в группе (в нашем случае, в группе $\mathcal{S}_q$) умножить все элементы на некоторый фиксированный (в нашем случае, на ν), то снова получим все элементы группы.

Операция Sym называется *симметризацией*. Таким образом, мы построили отображение $\mathrm{Sym}\colon V_q^0 \to \mathrm{Sym}^q(V)$. Легко видеть, что это отображение линейно.

Пример 3.9. Симметризация определена на константах и на ковекторах, и там она — тождественное отображение. Если T — тензор типа $(0,2)$ с координатами T_{ij} в некотором базисе, то в этом базисе

$$\mathrm{Sym}(T)_{ii} = T_{ii}, \quad \mathrm{Sym}(T)_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}), \quad i \neq j.$$

Пример 3.10. Пусть $T_{i_1\cdots i_q}$ — компоненты симметричного тензора T в некотором базисе. Тогда

$$\mathrm{Sym}(T)_{i_1\cdots i_q} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T_{\sigma(i_1\cdots i_q)} = T_{i_1\cdots i_q},$$

так как все компоненты, отличающиеся от $T_{i_1\cdots i_q}$ на перестановку, равны между собой. Таким образом, симметризация не меняет компоненты симметричного тензора.

Замечание 3.11. Тензорное произведение симметричных тензоров, вообще говоря, не является симметричным тензором. Например, если e^1 и e^2 — базисные ковекторы, рассматриваемые как симметричные тензоры, то $e^1 \otimes e^2 \neq e^2 \otimes e^1$, так как, например,

$$(e^1 \otimes e^2)(e_1, e_2) = e^1(e_1)e^2(e_2) = 1, \quad \text{но} \quad (e^2 \otimes e^1)(e_1, e_2) = e^2(e_1)e^1(e_2) = 0.$$

Тем не менее, если после тензорного произведения применить симметризацию, то в результате снова получим симметричный тензор.

Для произвольных симметричных тензоров T и S произвольных типов положим

$$T \odot S = \mathrm{Sym}(T \otimes S).$$

Если тензор T типа $(0,l)$, а тензор S типа $(0,m)$, то в координатах эта операция выглядит так:

$$(T \odot S)_{i_1\cdots i_l i_{l+1}\cdots i_m} = \frac{1}{(l+m)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{l+m}} (-1)^\sigma T_{\sigma(i_1\cdots i_l} S_{i_{l+1}\cdots i_m)}.$$

Операция $\odot$ называется *симметричным произведением* симметричных тензоров.

Проверим, что полученная операция ассоциативна. Пусть в некотором базисе компоненты симметричных тензоров R, S и T имеют вид $R_{i_1\cdots i_k}$, $S_{i_1\cdots i_l}$ и $T_{i_1\cdots i_m}$ соответственно. Тогда

$$\big((R \odot S) \odot T\big)_{i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_{k+l} i_{k+l+1}\cdots i_{k+l+m}} = \frac{1}{(k+l+m)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+l+m}} (R \odot S)_{\sigma(i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_{k+l}} T_{i_{k+l+1}\cdots i_{k+l+m})} =$$

$$= \frac{1}{(k+l+m)!}\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+l+m}}\sum_{\nu\in\mathcal{S}_{k+l}} R_{\sigma(\nu(i_1\cdots i_k} S_{i_{k+1}\cdots i_{k+l})} T_{i_{k+l+1}\cdots i_{k+l+m})}.$$

Для каждой перестановки ν обозначим σ_ν перестановку из $\mathcal{S}_{k+l+m}$, которая на первых $k+l$ индексах равна ν^{-1}, а остальные индексы оставляет на месте. Таким образом, если сначала применить перестановку ν, а затем σ_ν, то получим тождественную перестановку. Так как множество перестановок $\sigma\circ\sigma_\nu$ совпадает со всем множеством перестановок, имеем

$$\frac{1}{(k+l+m)!}\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+l+m}}\sum_{\nu\in\mathcal{S}_{k+l}} R_{\sigma(\nu(i_1\cdots i_k}S_{i_{k+1}\cdots i_{k+l})}T_{i_{k+l+1}\cdots i_{k+l+m})} =$$

$$= \frac{1}{(k+l+m)!}\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\nu\in\mathcal{S}_{k+l}}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+l+m}} R_{(\sigma\circ\sigma_\nu)(\nu(i_1\cdots i_k}S_{i_{k+1}\cdots i_{k+l})}T_{i_{k+l+1}\cdots i_{k+l+m})} =$$

$$= \frac{1}{(k+l+m)!}\frac{1}{(k+l)!}\sum_{\nu\in\mathcal{S}_{k+l}}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+l+m}} R_{\sigma(i_1\cdots i_k}S_{i_{k+1}\cdots i_{k+l}}T_{i_{k+l+1}\cdots i_{k+l+m})} =$$

$$= \frac{1}{(k+l+m)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+l+m}} R_{\sigma(i_1\cdots i_k}S_{i_{k+1}\cdots i_{k+l}}T_{i_{k+l+1}\cdots i_{k+l+m})},$$

где последнее равенство выполняется потому, что тензор из последней формулы симметричный.

Почти таким же образом показывается, что

$$\big(R\odot(S\odot T)\big)_{i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_{k+l} i_{k+l+1}\cdots i_{k+l+m}} = \frac{1}{(k+l+m)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+l+m}} R_{\sigma(i_1\cdots i_k}S_{i_{k+1}\cdots i_{k+l}}T_{i_{k+l+1}\cdots i_{k+l+m})}.$$

Аналогично можно доказать, что для симметричных тензоров T^k типа $(0,q_k)$, $k=1,\dots m$, $q=q_1+\cdots q_m$ выполняется

$$(T^1\odot\cdots\odot T^m)_{i_1\cdots i_q} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} T^1_{\sigma(i_1\cdots}\cdots T^m_{\cdots i_q)}.$$

В частности, если e^i — базисные ковекторы, рассматриваемые как тензоры, то

$$e^{i_1}\odot\cdots\odot e^{i_q} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q} e^{\sigma(i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_q)}.$$

Пример 3.12. Рассмотрим симметричный тензор T типа $(0,2)$, и пусть $e_1,\dots,e_n$ — некоторый базис. Тогда

$$e^i\odot e^i = \frac{1}{2}(e^i\otimes e^i + e^i\otimes e^i) = e^i\otimes e^i,\quad e^i\odot e^j = \frac{1}{2}(e^i\otimes e^j + e^j\otimes e^i),$$

откуда

$$T = T_{ij}e^i\otimes e^j = T_{11}e^1\odot e^1 + \cdots + T_{nn}e^n\odot e^n + \sum_{i<j}2T_{ij}e^i\odot e^j.$$

Далее, проверим, что полученная операция коммутативна:

$$(R\odot S)_{i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_{k+l}} = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+l}} R_{\sigma(i_1\cdots i_k}S_{i_{k+1}\cdots i_{k+l})} = \frac{1}{(k+1)!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{k+l}} S_{\sigma(i_{k+1}\cdots i_{k+l}}R_{i_1\cdots i_k)} =$$

$$= (S\odot R)_{i_{k+1}\cdots i_{k+l}i_1\cdots i_k} = (S\odot R)_{i_1\cdots i_k i_{k+1}\cdots i_{k+l}},$$

где последнее равенство имеет место, так как тензор $S\odot R$ симметричен.

Задача 3.3. Покажите, то семейство симметричных тензоров $\{e^{i_1}\odot\cdots\odot e^{i_q} : 1\le i_1\le\cdots\le i_q\le n\}$ образует базис линейного пространства $\mathrm{Sym}^q(V)$. Выведите отсюда, что размерность пространства $\mathrm{Sym}^q(V)$ равна $C^q_{n+q-1} = \frac{(n+q-1)!}{q!(n-1)!}$.

Замечание 3.13. Аналогичные построения имеют место и для симметричных тензоров типа $(p,0)$.

3.11 Опускание и поднятие индексов в тензорах

Пусть S — симметричный тензор типа $(0,2)$, и в некотором базисе $e_1,\dots,e_n$ имеем $S=g_{ij}e^i\otimes e^j$, где $g_{ij}=g_{ji}$ для всех i и j. Предположим, что определитель матрицы $G=(g_{ij})$ отличен от нуля. Как было отмечено выше, компоненты этого тензора, записанные в матрицу, меняются по тому же закону, что и билинейные формы, т.е. в новом базисе $e_{i'}$ его матрица G' имеет вид C^TGC, где $C = (c^i_{j'})$. Так как матрица C невырождена, то $\det G' = \det G(\det C)^2 \neq 0$. Как и в случае с симметричными билинейными формами, такие симметричные тензоры типа $(0, 2)$ называются *невырожденными*.

Из предыдущих лекций вытекает, что и условие положительной определенности матрицы симметричного тензора типа $(0, 2)$ является тензорным, т.е. имеет место одновременно во всех базисах. Тем самым, в терминах теории тензоров корректно определено и скалярное произведение векторов.

Пусть теперь дан невырожденный симметричный тензор S типа $(0, 2)$. В каждом базисе $e_1, \ldots, e_n$ запишем тензор S в виде $g_{ij}e^i \otimes e^j$, положим $G = (g_{ij})$ и рассмотрим матрицы $G^{-1} = (g^{ij})$, так что $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$. Покажем, что компоненты этих матриц являются координатами некоторого тензора типа $(2, 0)$. Для этого достаточно проверить тензорный закон. Сделаем это. Так как обратная матрица определена однозначно, достаточно показать, что числа $h^{i'j'} := c^{i'}_i c^{j'}_j g^{ij}$ удовлетворяют соотношению $h^{i'j'}g_{j'k'} = \delta^{i'}_{k'}$, т.е. являются компонентами матрицы, обратной к $(g_{i'j'})$ и, значит, совпадают с $g^{i'j'}$. Имеем

$$c^{i'}_i c^{j'}_j g^{ij} g_{j'k'} = c^{i'}_i c^{j'}_j g^{ij} c^m_{j'} c^k_{k'} g_{mk} = c^{i'}_i \delta^m_j g^{ij} c^k_{k'} g_{mk} = c^{i'}_i g^{ij} c^k_{k'} g_{jk} = c^{i'}_i c^k_{k'} \delta^i_k = c^{i'}_i c^i_{k'} = \delta^{i'}_{k'},$$

что и требовалось. Отметим также, что, в силу известных формул для компонент обратной матрицы, тензор с компонентами g^{ij} также является симметричным. Именно с помощью таких тензоров S с компонентами g_{ij} и S^{-1} с компонентами g^{ij} определяются операции опускания и поднятия индексов.

Чтобы *опустить верхний индекс* i_k в тензоре T с компонентами $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$, $p \geq 1$, рассматривают свертку в тензоре $S \otimes T$ по верхнему индексу i_k и нижнему второму (или первому, что все равно) тензора S. Опущенный индекс ставят на первое место. Полученный тензор имеет тип $(p-1, q+1)$ и его компоненты записываются так:

$$T^{i_1\cdots\widehat{i}_k\cdots i_p}_{i_k j_1\cdots j_q} = g_{i_k\alpha} T^{i_1\cdots i_k=\alpha\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = C^k_2(S \otimes T)^{i_1\cdots\widehat{i}_k\cdots i_p}_{i_k j_1\cdots j_q}.$$

Аналогично поднимается индекс j_l:

$$T^{j_l i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots\widehat{j}_l\cdots j_q} = g^{j_l\alpha} T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_l=\alpha\cdots j_q} = C^2_l(S \otimes T)^{j_l i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots\widehat{j}_l\cdots j_q}.$$

Отметим, что если сначала индекс опустить, а затем его же и поднять, то получится другой тензор, вообще говоря, отличающийся от исходного, но на перестановку верхних индексов. Аналогично с композицией поднятия и опускания.

3.12 Кососимметричные тензоры

Напомним, что перестановка $\sigma \in \mathcal{S}_k$ называется *транспозицией*, если она изменяет положение ровно двух элементов, меняя их местами. В общем курсе алгебры показывается, что каждая перестановка может быть представлена как композиция некоторого числа транспозиций, при этом в каждом таком представлении четность числа транспозиций всегда одна и та же. Если число транспозиций четно, то перестановка называется *четной*. Иначе перестановка называется *нечетной*. *Знаком* $(-1)^\sigma$ *или* $\operatorname{sign}\sigma$ *перестановки* σ называется 1 в случае четной перестановки, и -1 в случае нечетной.

Как и в случае симметричных тензоров, если в некотором базисе для всех компонент $T_{j_1\cdots j_q}$ тензора T и всех $\sigma \in \mathcal{S}_q$ выполняется

$$T_{\sigma(j_1\cdots j_q)} = (-1)^\sigma T_{j_1\cdots j_q}, \tag{3.5}$$

то такое же соотношение выполняется и в любом другом базисе. *Кососимметричным* или *кососимметрическим тензором типа* $(0, q)$ называется тензор, компоненты которыого меняются при перестановке индексов так, как в соотношении (3.5). Часто кососимметричные тензоры типа $(0, q)$ называют также *q-формами* или *формами степени* q. Аналогично определяются кососимметричные тензоры типа $(p, 0)$.

Легко проверяется, что линейная комбинация q-форм — также q-форма, т.е. q-формы образуют векторное пространство, которое мы обозначим $\Lambda^q(V)$.

Пример 3.14. Кососимметричные билинейные формы соответствуют в точности кососимметричным тензорам типа $(0, 2)$.

Замечание 3.15. В силу косой симметрии, если в компоненте $T_{i_1\cdots i_q}$ два индекса равны, то, переставив их, получим ту же самую компоненту, но со знаком минус. Поэтому все такие компоненты равны нулю. Отсюда мгновенно следует, что если $q > n = \dim V$, то все компоненты q-формы равны нулю, т.е. имеется только одна нулевая q-форма. Таким образом, наибольшая степень ненулевой q-формы равна n. Формы степени n называются ***формами максимальной степени.*** У таких форм все компоненты $T_{i_1\cdots i_n}$ с повторяющимися индексами равны нулю, а с неповторяющимися отличаются от $T_{1\cdots n}$ на знак перестановки σ, $\sigma(k) = i_k$. Формы максимальной степени удобно записывать с использованием следующего обозначения: положим $\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$ равным нулю, если среди индексов встречаются два одинаковых, а если все индексы различны, то равным знаку перестановки σ, превращающей набор $(1,\cdots,n)$ в $(i_1,\cdots,i_n)$. Тогда $T_{i_1\cdots i_n} = T_{1\cdots n}\varepsilon_{i_1\cdots i_n}$. Аналогично определяется $\varepsilon^{i_1\cdots i_n}$.

Покажем, как из произвольного тензора типа $(0,q)$ можно получить кососимметричный. Запишем в каждом базисе компоненты произвольного тензора T типа $(0,q)$ и построим по ним новые наборы чисел следующим образом: если $T_{i_1\cdots i_q}$ — компоненты T в некотором базисе, то положим

$$\mathrm{Alt}(T)_{i_1\cdots i_q} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q}(-1)^\sigma T_{\sigma(i_1\cdots i_q)}.$$

Так как перестановки индексов и линейные комбинации являются тензорными операциями, то полученные наборы чисел образуют тензор. Этот тензор — кососимметричный. Действительно,

$$\mathrm{Alt}(T)_{\nu(i_1\cdots i_q)} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q}(-1)^\sigma T_{(\sigma\circ\nu)(i_1\cdots i_q)} = \frac{1}{q!}\sum_{\mu\in\mathcal{S}_q}(-1)^\sigma(-1)^\nu T_{\sigma(i_1\cdots i_q)} = (-1)^\nu \,\mathrm{Alt}(T)_{i_1\cdots i_q}.$$

Операция Alt называется ***альтернацией.*** Таким образом, мы построили отображение $\mathrm{Alt}\colon V_q^0 \to \Lambda^q(V)$. Легко видеть, что это отображение линейно.

Пример 3.16. Альтернация, как и симметризация определена на константах и на ковекторах, и там она — тождественное отображение. Если T — тензор типа $(0,2)$ с координатами T_{ij} в некотором базисе, то в этом базисе

$$\mathrm{Alt}(T)_{ii} = 0, \quad \mathrm{Alt}(T)_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = -\,\mathrm{Alt}(T)_{ji}, \quad i \neq j.$$

Пример 3.17. Пусть $T_{i_1\cdots i_q}$ — компоненты q-формы T в некотором базисе. Тогда

$$\mathrm{Alt}(T)_{i_1\cdots i_q} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q}(-1)^\sigma T_{\sigma(i_1\cdots i_q)} = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_q}(-1)^\sigma(-1)^\sigma T_{i_1\cdots i_q} = T_{i_1\cdots i_q}.$$

Таким образом, альтернация на формах — тождественное отображение.

Замечание 3.18. Тензорное произведение форм, вообще говоря, не является кососимметричным тензором. Например, если e^1 и e^2 — базисные ковекторы, рассматриваемые как кососимметричные тензоры, то $e^1\otimes e^2 \neq -e^2\otimes e^1$, см. замечание 3.11. Тем не менее, если после тензорного произведения применить альтернацию, то в результате снова получим кососимметричный тензор.

Для произвольной l-формы T и m=формы S положим[1]

$$T\wedge S = \frac{(l+m)!}{l!m!}\,\mathrm{Alt}(T\otimes S).$$

В координатах это выглядит так:

$$(T\wedge S)_{i_1\cdots i_l i_{l+1}\cdots i_{l+m}} = \frac{1}{l!m!}\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_{l+m}}(-1)^\sigma T_{\sigma(i_1\cdots i_l}S_{i_{l+1}\cdots i_{l+m})}.$$

Операция $\wedge$ называется ***внешним произведением*** форм.

---

[1] В некоторых учебниках и монографиях используют другую формулу, а именно, $T\wedge S = \frac{1}{(l+m)!}\,\mathrm{Alt}(T\otimes S)$, по аналогии с симметричными тензорами. Это приводит в наличию дополнительных коэффициентов в ряде формул.

Аналогично случаю симметричных тензоров можно показать, что операция $\wedge$ транзитивна, а также кососоммутативна в следующем смысле: $S \wedge T = (-1)^{lm} T \wedge S$. Более того, можно показать, что если заданы q_k-формы T^k, $k = 1, \dots m$, то, полагая $q = q_1 + \cdots q_m$, получим

$$(T^1 \wedge \cdots \wedge T^m)_{i_1 \cdots i_q} = \frac{1}{q_1! \cdots q_m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} (-1)^\sigma T^1_{\sigma(i_1 \cdots} \cdots T^m_{\cdots i_q)}.$$

В частности, если e^i — базисные ковекторы, рассматриваемые как тензоры, то

$$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_q} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} e^{\sigma(i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q)}.$$

Пример 3.19. Рассмотрим q-форму T, и пусть $e_1, \dots, e_n$ — некоторый базис. Тогда

$$T = T_{i_1 \cdots i_q} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q} = \sum_{i_1 < i_2 \cdots < i_q} T_{i_1 \cdots i_q} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_q} (-1)^\sigma e^{\sigma(i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_q)} \right) = \sum_{i_1 < i_2 \cdots < i_q} T_{i_1 \cdots i_q} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_q}.$$

Задача 3.4. Покажите, то семейство q-форм $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_q} : 1 \le i_1 < \cdots < i_q \le n\}$ образует базис линейного пространства $\Lambda^q(V)$. Выведите отсюда, что размерность пространства $\Lambda^q(V)$ равна $C_n^q = \frac{n!}{q!(n-q)!}$.

Пример 3.20. Пусть T — форма максимальной степени n, тогда, в силу примера 3.19 тензор T в базисе $e_1 \dots, e_n$ имеет вид $T = T_{1 \cdots n} e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — некоторые векторы, $v_k = v_k^i e_i$, тогда

$$(T_{1 \cdots n} e^1 \wedge \cdots \wedge e^n)(v_1, \dots, v_n) = T_{i_1 \cdots i_n} v_1^{i_1} \cdots v_n^{i_n} = T_{1 \cdots n} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^\sigma v_1^{\sigma(i_1} \cdots v_n^{i_n)} = T_{1 \cdots n} \det(v_1 \cdots v_n),$$

где $(v_1 \cdots v_n)$ обозначает матрицу, столбцы которой — координаты последовательных векторов v_i. В частности,

$$\det(v_1 \cdots v_n) = (e^1 \wedge \cdots \wedge e^n)(v_1, \dots, v_n).$$

Если $e_{i'} = c^i_{i'} e_i$ — другой базис и $e_i = c^{i'}_i e_{i'}$, то, в соответствии с тензорным законом,

$$T_{1' \cdots n'} = c^{i_1}_{1'} \cdots c^{i_n}_{n'} T_{i_1 \cdots i_n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} (-1)^\sigma c^{\sigma(1}_{1'} \cdots c^{n)}_{n'} T_{1 \cdots n} = \det(c^i_{i'}) T_{1 \cdots n}.$$

3.13 Форма объема

Пусть g_{ij} — компоненты положительно определенного тензора типа $(0, 2)$ в базисе $e_1, \dots, e_n$. Напомним, что эти компоненты образуют матрицу $G = (g_{ij})$ соответствующего скалярного произведения. В новом базисе эта матрица имеет вид $G' = C^T G C$, где $C = (c^i_{i'})$ — матрица перехода. Следовательно, $\det G' = (\det C)^2 \det G$. Положив $g = \det G$ и $g' = \det G'$, получим $g' = |\det C| g$.

Зададим ориентацию на пространстве V, выбрав в качестве положительно ориентированного базиса исходный базис $e = (e_1, \dots, e_n)$. Припишем каждому базису $e' = (e_{1'}, \cdots, e_{n'})$ следующий набор чисел $T_{i'_1 \cdots i'_n}$: если базис e' положительно ориентирован, то припишем $\sqrt{g'}\, \varepsilon_{i'_1 \cdots i'_n}$, а если этот базис отрицательно ориентирован, то припишем $-\sqrt{g'}\, \varepsilon_{i'_1 \cdots i'_n}$. В силу сказанного выше, эти наборы связаны друг с другом по тензорному закону преобразования компонент n-форм. Полученная n-форма называется *формой объема*.

Задача 3.5. Покажите, что если $P = (v_1, \dots, v_n)$ — параллелепипед, то его ориентированный объем, вычисленный по отношению к скалярному произведению с матрицей (g_{ij}), равен значению n-формы объема на векторах $(v_1, \dots, v_n)$.

3.14 Поливекторы

Проделанные выше построения переносятся и на кососимметричные тензоры типа $(p, 0)$, которые называются *поливекторами*. Ровно как и было проделано выше определяется внешнее произведение поливекторов, в частности, внешнее произведение векторов. В этих терминах бывает удобно проверять, является ли семейство векторов линейно независимым.

Предложение 3.21. *Векторы $v_1, \dots, v_p$ линейно зависимы, если и только если поливектор $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ равен нулю.*

Доказательство. Если векторов больше, чем размерность n пространства V, то они линейно зависимы и одновременно поливектор w равен нулю (доказательство такое же, как и в случае форм). Пусть теперь $p \leq n$. Выберем произвольный базис $e_1, \dots, e_n$ в пространстве V. Тогда

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} v_1^{\sigma(i_1} \cdots v_p^{i_p)} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}.$$

Отметим, что $M_{i_1 \cdots i_p} := \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} v_1^{\sigma(i_1} \cdots v_p^{i_p)}$ — минор размера $p \times p$ матрицы $(v_1 \cdots v_p)$, столбцы которой — координаты векторов в базисе $e_1, \dots, e_n$. Поливектор w равен нулю, если и только если все миноры матрицы $(v_1 \cdots v_p)$ нулевые. Но это же условие эквивалентно линейной независимости векторов $v_1, \dots, v_p$. □

Семинар к лекциям 3 – 4

Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре под редакцией Ю.М.Смирнова, номера

1688, 1691, 1693, 1733, 1754, 1758, 1759