9 Элементы топологии

Упражнение 9.1. Пусть Y — произвольное подмножество топологического пространства X. Докажите, что семейство, состоящее из пересечений с Y всех открытых в X множеств, удовлетворяет аксиомам топологии (такая топология на Y называется *индуцированной* из X).

Упражнение 9.2. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $p \in X$, и r — положительное число. Открытый шар $U(p, r)$ радиуса r с центром в точке p определяется так:

$$U(p, r) = \{x \in X \mid \rho(p, x) < r\}.$$

Докажите, что семейство, состоящее из всех подмножеств метрического пространства, каждое из которых вместе с каждой своей точкой содержит некоторый открытый шар с центром в этой точке, является хаусдорфовой топологией.

Упражнение 9.3. *Топологией Зарисского* на множестве X называется система множеств, состоящая из пустого множества, а также из всех подмножеств множества X, дополнения до которых конечны.

(1) Проверьте, что эта система удовлетворяет аксиомам топологии.

(2) Докажите, что если X бесконечно, то X с топологией Зарисского не хаусдорфово.

(3) Опишите все непрерывные отображения из пространства с топологией Зарисского в прямую со стандартной топологией, заданной функцией расстояния между точками.

Упражнение 9.4. Говорят, что последовательность точек x_n топологического пространства X *сходится* к точке $x \in X$, называемой *пределом последовательности* x_n, если для любой окрестности U точки x существует такое N, что при каждом $n > N$ выполняется $x_n \in U$. Докажите, что

(1) в хаусдорфовом пространстве предел сходящейся последовательности определен однозначно;

(2) в антидискретном пространстве X (пространстве с топологией, состоящей лишь из пустого множества и всего X) любая последовательность точек сходится к любой точке.

(3) Опишите все сходящиеся последовательности в пространстве с топологией Зарисского.

Упражнение 9.5. Топологическое пространство называется *несвязным*, если его можно представить в виде объединения непустых непересекающихся открытых множеств. Топологическое пространство называется *связным*, если оно не является несвязным. Докажите, что

(1) объединение пересекающихся связных множеств связно;

(2) замыкание связного множества связно;

(3) отрезок прямой связен.

Непрерывной кривой в топологическом пространстве X называется непрерывное отображение $\gamma\colon [a, b] \to X$ отрезка $[a, b]$ в X. Если γ — непрерывная кривая, то говорят, что γ *соединяет точки* $\gamma(a)$ *и* $\gamma(b)$. Пространство X называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой.

(4) Докажите, что линейно связное топологическое пространство является связным.

Упражнение 9.6. Докажите, что подмножество плоскости xy, состоящее из графика функции $y = \sin \frac{1}{x}$ при $x = 0$ и отрезка оси y, соединяющего точки с координатами -1 и 1, является связным, но не линейно связным топологическим пространством (с индуцированной из плоскости топологией).

Упражнение 9.7. Докажите, что

(1) при непрерывном отображении образ связного (линейно связного, компактного) пространства связен (линейно связен, компактен);

(2) прообраз хаусдорфова пространства при непрерывном отображении, взаимно однозначном с образом, также является хаусдорфовым пространством.

Приведите пример непрерывного отображения, для которого

(3) прообраз связного (линейно связного, компактного) пространства не является связным (линейно связным, компактным);

(4) образ хаусдорфова пространства не является хаусдорфовым пространством.

Обозначения 9.1. Следующие матричные группы состоят из вещественных матриц размера $n \times n$ и рассматриваются как подмножества $\mathbb{R}^{n^2}$ с индуцированной топологией (их строки или столбцы выписываются друг за другом и образуют векторы): $\mathrm{O}(n)$ состоит из всех ортогональных матриц (*ортогональная группа*); $\mathrm{SO}(n)$ состоит из всех ортогональных матриц с определителем 1 (*специальная ортогональная группа*); $\mathrm{GL}(n)$ состоит из всех невырожденных матриц (*общая линейная группа*); $\mathrm{SL}(n)$ состоит из всех матриц с определителем 1 (*специальная линейная группа*).

Упражнение 9.8. Выясните, какие из следующих матричных групп связны, какие компактны:

$$\mathrm{O}(n), \quad \mathrm{SO}(n), \quad \mathrm{GL}(n), \quad \mathrm{SL}(n).$$

Упражнение 9.9. Докажите, что

(1) интервал и прямая гомеоморфны;

(2) отрезок и “буква T” не гомеоморфны.

(3) Приведите пример непрерывного взаимно-однозначного соответствия, не являющегося гомеоморфизмом со своим образом.

Упражнение 9.10. Докажите, что

(1) замкнутое подмножество компактного пространство компактно;

(2) компактное подмножество хаусдорфова пространства замкнуто;

(3) непрерывное взаимно-однозначное отображение компактного пространства в хаусдорфово является гомеоморфизмом.