8 Геометрия Лобачевского: треугольники, окружности, круги

Упражнение 8.1. Как выглядят окружности на плоскости Лобачевского. Вычислите длину окружности и площадь круга радиуса ρ на плоскости Лобачевского (радиус понимается в смысле метрики на плоскости Лобачевского).

Упражнение 8.2. Покажите, что сумма углов треугольника на плоскости Лобачевского равна $\pi - S$, где S — площадь этого треугольника.

Упражнение 8.3. Пусть ABC — треугольник на плоскости Лобачевского; α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C; a, b, c — длины сторон BC, AC, AB. Докажите две теоремы косинусов:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos\gamma \tag{1}$$

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \operatorname{ch} c \tag{2}$$

Обратите внимание на частный случай — теорему Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$$

Упражнение 8.4. Пусть ABC — треугольник на плоскости Лобачевского; α, β, γ — величины углов при вершинах A, B, C; a, b, c — длины сторон BC, AC, AB. Докажите теорему синусов на плоскости Лобачевского:

$$\frac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}.$$

Упражнение 8.5. Во всякий ли треугольник на плоскости Лобачевского можно вписать окружность? Всякий ли треугольник на плоскости Лобачевского можно описать окружностью?