

## 7 Геометрия Лобачевского: движения, расстояния

**Упражнение 7.1.** Докажите, что если  $w = f(z)$  — дробно-линейное преобразование, то для любых четырех точек  $z, z_1, z_2, z_3$  и их образов  $w, w_1, w_2, w_3$  выполняется следующее равенство:

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{w - w_1}{w - w_3} : \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3}.$$

Иными словами, двойное отношение  $\frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$  сохраняется при дробно-линейных преобразованиях. Выведите отсюда, что любые три различные точки можно перевести в любые три различные точки с помощью некоторого дробно-линейного преобразования, причем такое преобразование единственно.

**Упражнение 7.2.** Докажите, что все дробно-линейные преобразования, переводящие единичный круг в себя, могут быть записаны в следующем виде:

$$z \mapsto e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

где  $\varphi \in \mathbb{R}$ , а  $z_0$  — комплексное число такое, что  $|z_0| < 1$ .

**Упражнение 7.3.** Докажите, что все дробно-линейные преобразования, переводящие верхнюю полуплоскость в себя, могут быть записаны в следующем виде:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

где числа  $a, b, c$  и  $d$  — вещественные, и определитель матрицы  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  равен единице.

**Упражнение 7.4.** Докажите, что отрезок прямой Лобачевского между точками  $A$  и  $B$  есть кратчайшая кривая, соединяющая эти точки (решение проведите для гладких кривых).

**Упражнение 7.5.** Расстояние между точками на плоскости Лобачевского — это длина отрезка прямой Лобачевского между этими точками. Найдите расстояние между точками на плоскости Лобачевского

- (1) в модели Пуанкаре;
- (2) в модели верхней полуплоскости.