

7 Геометрия Лобачевского: движения, расстояния

Упражнение 7.1. Докажите, что если $w = f(z)$ — дробно-линейное преобразование, то для любых четырех точек z, z_1, z_2, z_3 и их образов w, w_1, w_2, w_3 выполняется следующее равенство:

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{w - w_1}{w - w_3} : \frac{w_2 - w_1}{w_2 - w_3}.$$

Иными словами, двойное отношение $\frac{z - z_1}{z - z_3} : \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3}$ сохраняется при дробно-линейных преобразованиях. Выведите отсюда, что любые три различные точки можно перевести в любые три различные точки с помощью некоторого дробно-линейного преобразования, причем такое преобразование единственно.

Упражнение 7.2. Докажите, что все дробно-линейные преобразования, переводящие единичный круг в себя, могут быть записаны в следующем виде:

$$z \mapsto e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

где $\varphi \in \mathbb{R}$, а z_0 — комплексное число такое, что $|z_0| < 1$.

Упражнение 7.3. Докажите, что все дробно-линейные преобразования, переводящие верхнюю полуплоскость в себя, могут быть записаны в следующем виде:

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

где числа a, b, c и d — вещественные, и определитель матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ равен единице.

Упражнение 7.4. Докажите, что отрезок прямой Лобачевского между точками A и B есть кратчайшая кривая, соединяющая эти точки (решение проведите для гладких кривых).

Упражнение 7.5. Расстояние между точками на плоскости Лобачевского — это длина отрезка прямой Лобачевского между этими точками. Найдите расстояние между точками на плоскости Лобачевского

- (1) в модели Пуанкаре;
- (2) в модели верхней полуплоскости.