5 Изометрии. Геодезические

Упражнение 5.1. Существует ли такая область на стандартной евклидовой сфере, которую можно изометрично отобразить на некоторую область на торе $\big((a+b\cos\theta)\cos\varphi, (a+b\cos\theta)\sin\varphi, b\sin\theta\big)$, $a>b>0$?

Упражнение 5.2. Пусть регулярная поверхность в $\mathbb{R}^3$ задана параметрически в виде $r(u,v)$, причем индуцированная метрика имеет вид

$$ds^2 = \lambda(u,v)\big(du^2 + dv^2\big),$$

где $\lambda(u,v)$ — гладкая всюду положительная функция. Найдите символы Кристоффеля и напишите уравнения геодезических.

Упражнение 5.3. Пусть $ds^2 = x(dx^2 + dy^2)$. Докажите, что геодезические для этой метрики являются параболами на плоскости (x,y).

Упражнение 5.4. Пусть $ds^2 = g(r)dr^2 + r^2 d\varphi^2$, $g(r) > 0$. Докажите, что линии вида $\varphi = \varphi_0$, выходящие из центра, являются геодезическими.

Упражнение 5.5. Пусть M — двумерная поверхность вращения, заданная в цилиндрических координатах (r,φ,z) в виде $r = f(z)$, где f — гладкая положительная функция. Рассмотрим произвольную геодезическую $\gamma(t) = \big(\varphi(t), z(t)\big)$ на M, и пусть $r(t)$ — расстояние от $\gamma(t)$ до оси z, а $\psi(t)$ — угол между вектором скорости $\dot\gamma(t)$ и параллелью $z = z(t)$. Докажите теорему Клеро: величина $r(t)\cos\big(\psi(t)\big)$ не зависит от t.

Упражнение 5.6. Опишите все поверхности вращения, заданные в цилиндрических координатах (r,φ,z) в виде $r = f(z)$, где f — гладкая положительная функция, на которых существуют замкнутые геодезические.