4 Поверхности. Вторая фундаментальная форма

Упражнение 4.1. Вычислите вторую фундаментальную форму, среднюю и гауссову кривизны поверхности, заданной графиком функции $z = f(x, y)$. Как выглядят найденные величины, а также главные кривизны, в критической точке функции f?

Упражнение 4.2. Докажите, что если у поверхности тождественно равны нулю средняя и гауссова кривизны, то эта поверхность плоская.

Упражнение 4.3. Вычислите вторую фундаментальную форму поверхности, заданной неявной функцией в виде $F(x, y, z) = 0$.

Упражнение 4.4. Вычислите вторую фундаментальную форму, главные направления и главные кривизны, среднюю и гауссову кривизны следующих поверхностей вращения:

(1) $r = (R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)$ (сфера);

(2) $r = \big((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u\big)$ (тор).

Упражнение 4.5. Найдите главные направления, главные кривизны, среднюю и гауссову кривизны поверхности, полученной вращением графика функции $x = f(z) > 0$ вокруг оси z, не вычисляя первую и вторую фундаментальные формы, а используя теорему об экстремальности главных кривизн.

Упражнение 4.6. Покажите, что если на поверхности имеется три различных семейства прямолинейных образующих, то эта поверхность плоская.

Упражнение 4.7. Пусть S — поверхность, заданная уравнением $r = r(u, v)$, и $n(u, v)$ — поле единичных нормалей, т.е. непрерывно зависящее от u и v семейство единичных векторов таких, что $n(u, v)$ перпендикулярен касательной плоскости к S в точке $r(u, v)$. *Волновым фронтом с параметром* $a \in \mathbb{R}$ (по отношению к полю нормалей n) называется поверхность S_a, заданная уравнением $\rho = r(u, v) + a\, n(u, v)$.

Выразите коэффициенты первой и второй фундаментальных форм поверхности S_a через коэффициенты первой и второй фундаментальных форм поверхности S. Сделайте то же самое для средней и гауссовой кривизн. Докажите, что особенности всех волновых фронтов (точки поверхностей S_a, в которых нарушается регулярность) образуют каустику — множество всех центров кривизны $r(u, v) + n(u, v)/\lambda_i(u, v)$, где $\lambda_i(u, v)$ — главные кривизны.

Упражнение 4.8. Поверхность называется *минимальной*, если ее средняя кривизна тождественно равна нулю. Опишите все минимальные поверхности, заданные графиками функций вида $z = f(x) + g(y)$.