2 Кривые в пространстве

Упражнение 2.1. Найдите репер Френе и вычислите кривизну и кручение

(1) винтовой линии $\gamma(t) = (a\,\cos t, a\,\sin t, b\,t),\ a > 0,\ b \neq 0;$

(2) кривой $\gamma(t) = (t^2, 1 - t, t^3)$.

Упражнение 2.2. Докажите, что

(1) регулярная пространственная кривая лежит на прямой, если и только если ее кривизна равна нулю.

(2) бирегулярная пространственная кривая лежит в плоскости, если и только если ее кручение равно нулю.

Найдите уравнения таких прямых и плоскостей в терминах исходных кривых.

Упражнение 2.3. Верно ли, что если в каждой точке регулярной кривой γ в $\mathbb{R}^3$ выполняется $(\dot\gamma, \ddot\gamma, \dddot\gamma) = 0$, то γ — плоская кривая?

Упражнение 2.4. Докажите, что бирегулярные кривые в $\mathbb{R}^3$ с постоянными кривизной и кручением — это в точности окружности и винтовые линии.

Упражнение 2.5. Докажите, что бирегулярная пространственная кривая $\gamma(s)$ имеет постоянную кривизну $k > 0$, если и только если существует натурально параметризованная кривая $\tau(\sigma)$ на единичной сфере и точка $A \in \mathbb{R}^3$, для которых

$$\gamma(s) = A + \frac{1}{k}\int_{ka}^{ks} \tau\, d\sigma.$$

Упражнение 2.6. Докажите, что бирегулярная пространственная кривая $\gamma(s)$ имеет постоянное кручение $\varkappa \neq 0$, если и только если на единичной сфере существует натурально параметризованная кривая $\beta(\sigma)$ ненулевой геодезической кривизны (проекция вектора ускорения $\beta_{\sigma\sigma}$ на касательную плоскость к сфере всюду отлична от нуля), а в пространстве — точка $A \in \mathbb{R}^3$, для которых

$$\gamma(s) = A + \frac{1}{\varkappa}\int_{\varkappa a}^{\varkappa s} [\beta, \beta_\sigma]\, d\sigma.$$

Упражнение 2.7. Докажите, что кривизна бирегулярной кривой в $\mathbb{R}^3$ пропорциональна кручению, если и только если найдется постоянный ненулевой вектор u такой, что $\langle u, \tau\rangle = \mathrm{const} \neq 0$.

Упражнение 2.8. Докажите, что натурально параметризованная бирегулярная кривая в $\mathbb{R}^3$ с кривизной k, для которой $k' \neq 0$, и с ненулевым кручением $\varkappa$ лежит на сфере радиуса R тогда и только тогда, когда справедливо соотношение

$$R^2 = \frac{1}{k^2}\left(1 + \frac{(k')^2}{(\varkappa k)^2}\right).$$

Приведите пример бирегулярной кривой, не лежащей на сфере, для которой выполнены все условия задачи, кроме $k' \neq 0$.