11 Элементы теории гладких многообразий

Упражнение 11.1. Докажите, что

(1) ограничения карт на край гладкого многообразия превращает край в гладкое многообразие;

(2) полноторий, ограниченный тором, полученным при вращении вокруг оси z окружности радиуса r в плоскости xz с центром в точке $(R, 0, 0)$, $0 < r < R$, является многообразием с краем.

Упражнение 11.2. Пусть $N = (0, 0, 1)$ — северный полюс стандартной двумерной сферы S^2. Для произвольной точки $P \in S^2$ определим величину $\theta(P)$, положив ее равной углу между радиус-векторами точек N и P. Зададим функции $f\colon S^2 \to \mathbb{R}$ и $g\colon S^2 \to \mathbb{R}$, положив $f(P) = \cos\theta(P)$ и $g(P) = \sin\theta(P)$. Покажите, что

(1) функция f — гладкая;

(2) функция g — негладкая.

Упражнение 11.3. Докажите, что отображение $f : S^2 \to \mathbb{R}\mathrm{P}^2$, сопоставляющее каждой точке $P \in S^2$ прямую, проходящую через начало координат и точку P, является гладким отображением гладких многообразий.

Упражнение 11.4.

(1) Приведите пример гладкого гомеоморфизма гладких многообразий, не являющегося диффеоморфизмом.

(2) Докажите, что многообразия разных размерностей не диффеоморфны, в частности, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ не диффеоморфны при $n \neq m$.

Упражнение 11.5.

(1) Вычислите образ горизонтального (параллельного плоскости xy) единичного вектора, касательного к двумерной сфере, при действии дифференциала стереографической проекции из северного полюса.

(2) Докажите, что $\xi = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^9$ является касательным вектором к подмногообразию $\mathrm{SO}(3) \subset \mathbb{R}^9$ в точке E, где E — единичная матрица, и вычислите образ этого касательного вектора при действии дифференциала отображения $f\colon \mathrm{SO}(3) \to S^2$, ставящего в соответствие каждой матрице ее первый столбец.

Упражнение 11.6. Докажите, что дифференциалы dx^i от координатных функций x^i, вычисленные в точке P гладкого многообразия M, образуют базис векторного пространства $T^*_P M$, двойственного к $T_P M$. Пространство $T^*_P M$ называется *кокасательным*. Проверьте, что базисы $dx^1, \ldots, dx^n$ и $\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n$ двойственны, т.е. $dx^i\big(\partial/\partial x^i\big) = \delta^i_j$.

Упражнение 11.7.

(1) Докажите, что край ориентируемого многообразия ориентируем.

(2) Приведите пример многообразия, край которого неориентируем.

(3) Докажите, что декартово произведение ориентируемых многообразий ориентируемо.

(4) Покажите, что многообразие размерности n, содержащее неориентируемое подмногообразие размерности n, неориентируемо.

(5) Докажите, что регулярная поверхность в $\mathbb{R}^n$, заданная системой неявных функций, — ориентируемое многообразие.

(6) Выведите из полученных выше результатов, что сфера S^n, тор $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$, группы $\mathrm{GL}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SL}(n)$ ориентируемы, а бутылка Клейна K^2 и проективная плоскость $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ — нет.

(7) Докажите, что проективное пространство $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ ориентируемо тогда и только тогда, когда n — нечетно.