1 Кривые на плоскости

Упражнение 1.1. Круг радиуса a катится по прямой без скольжения. Составьте уравнение траектории точки M, жестко связанной с кругом и находящейся на расстоянии d от его центра (при $d = a$ эта кривая называется *циклоидой*, при $d < a$ — *укороченной циклоидой*, при $d > a$ — *удлиненной циклоидой*). Изобразите циклоиду в каждом из трех случаев.

Упражнение 1.2. Докажите, что объединение двух отрезков, стыкующихся под некоторым углом, можно представить как образ гладкой параметрической кривой.

Упражнение 1.3. Вычислите длину кривой, заданной графиком функции $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$.

Упражнение 1.4. Введите натуральный параметр на следующих кривых:

(1) отрезке прямой $ax + by + c = 0$, $a^2 + b^2 \neq 0$;

(2) дуге окружности $x^2 + y^2 = R^2$, $R > 0$;

(3) графике функции $y = a\ \mathrm{ch}(x/a)$, $a > 0$.

Упражнение 1.5. Для кривых из упражнения 1.4 вычислите кривизну и найдите репер Френе.

Упражнение 1.6. Пусть t — произвольный параметр на плоской регулярной кривой $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$. Докажите, что кривизна k этой кривой может быть вычислена по формуле

$$k = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{S(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma}\|^3},$$

где $S(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$ обозначает площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\dot{\gamma}$ и $\ddot{\gamma}$.

Упражнение 1.7. Вычислите кривизну эллипса с полуосями a и b.

Упражнение 1.8. Опишите все плоские кривые постоянной кривизны.

Упражнение 1.9. Решите натуральное уравнение $k = 1/s$, $s > 0$.

Упражнение 1.10 (*). *Овалом* называется простая замкнутая кривая положительной кривизны (овал ограничивает строго выпуклую область). *Вершиной овала* называется точка, в которой кривизна имеет локальный минимум или максимум. Докажите, что каждый овал имеет по меньшей мере четыре вершины.