1977 г. сентябрь — октябрь *т. XXXII, вып. 5 (197)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ В СССР

ПЕТР КОНСТАНТИНОВИЧ РАШЕВСКИЙ
(к семидесятилетию со дня рождения)

27 июля 1977 г. исполнилось 70 лет со дня рождения известного советского математика, выдающегося геометра Петра Константиновича Рашевского.

П. К. Рашевский родился в 1907 г. в Москве; в 1923 г. поступил на математическое отделение физико-математического факультета МГУ, и с тех пор вся его научная и педагогическая деятельность теснейшим образом связана с Московским университетом. П. К. Рашевский — воспитанник научной школы В. Ф. Кагана.

Научный путь П. К. Рашевского интересен и оригинален. Его научное творчество 30—40 годов было довольно подробно описано в статье, посвященной 50-летнему юбилею (см. УМН **13**:1 (79) (1958), стр. 225—231), а период 1957—1967 гг. отражен в статье, посвященной его 60-летнему юбилею (см. УМН **23**:1 (1968), стр. 229—234). Поэтому мы сконцентрируем основное внимание на деятельности П. К. Рашевского за последние 10 лет, 1967—1977 годы.

Работы П. К. Рашевского отличаются большим разнообразием тематики, глубиной анализа, свежестью постановок задач. Все это в полной мере относится и к работам 1967—1977 гг., посвященным в основном следующим вопросам: проблема описания тензоров, допускающих данную группу инвариантности; глобальные свойства однородных пространств и их реализаций (например, в виде проективных моделей); алгебро-топологические свойства однородных пространств и групп Ли; теория представлений групп и алгебр Ли. Много внимания уделяет П. К. Рашевский вопросам математической физики (например, проблемам квантовой электродинамики).

В творчестве П. К. Рашевского большое место занимала классическая тензорная тематика; в частности, этому направлению принадлежат работы [68], [70]. В них решена следующая задача. Пусть в $\mathbf{C}^n$ (или в E^n (K), где K — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль) задана система тензоров $\{Z\}$, допускающих некоторую группу инвариантности $\mathfrak{G}$, и пусть задан некоторый тензор W, допускающий ту же группу инвариантности. Вопрос: как связан тензор W и тензоры системы $\{Z\}$? Оказывается, что в некоторых естественных предположениях ответ существует и формулируется в обозримых терминах, связанных с системой $\{Z\}$. Этот результат позволил описать структуру множества сферических функций на однородных пространствах, выделить, грубо говоря, базис в пространстве всех сферических функций на $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$.

П. К. Рашевский только недавно завершил работу над большим исследованием, подводящим итоги его деятельности за период 1963—1977 гг. в области теории представлений. Дадим краткий обзор этого цикла результатов.

В работе «Ассоциативная сверхоболочка алгебры Ли и ее бесконечномерные представления в пространствах аналитических ростков» (ДАН **151**:4 (1963), стр. 778—780) строится новый объект — ассоциативная сверхоболочка алгебры Ли (см. также Труды

ММО 15 (1966), стр. 3—54). Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли над C, $U(\mathfrak{G})$ — ее обертывающая алгебра, т. е. ассоциативная оболочка. Через G обозначим комплексную группу Ли с алгеброй $\mathfrak{G}$. В $U(\mathfrak{G})$ вводится топология с помощью явно указанного набора норм. В результате пополнения $U(\mathfrak{G})$ в этой топологии и естественного продолжения алгебраических операций в $U(\mathfrak{G})$ получается ассоциативная топологическая алгебра, которую П. К. Рашевский обозначает через $F(\mathfrak{G})$ и называет ассоциативной сверхоболочкой алгебры Ли $\mathfrak{G}$; $U(\mathfrak{G})$ — плотная подалгебра в $F(\mathfrak{G})$. $F(\mathfrak{G})$ — полное рефлексивное счетно-нормированное пространство; сопряженное к $F(\mathfrak{G})$ пространство F' отождествляется с пространством всех голоморфных ростков в единице группы G. Элементы $U(\mathfrak{G})$ можно истолковать как левоинвариантные дифференциальные операторы на G, а элементы из $F(\mathfrak{G})$ — как дифференциальные операторы, вообще говоря, бесконечного порядка, действующие в пространстве ростков F'. Определено регулярное представление $F(\mathfrak{G})$ в пространстве ростков F'. Оказывается, существует взаимно однозначное соответствие между подпредставлениями этого регулярного представления $F(\mathfrak{G})$ и замкнутыми правыми идеалами в $F(\mathfrak{G})$. Замкнутое подпространство в $F(\mathfrak{G})$ является правым идеалом тогда и только тогда, когда оно является ортогональным дополнением к подпространству в F', инвариантному относительно правых инфинитезимальных сдвигов. Введенная П. К. Рашевским алгебра $F(\mathfrak{G})$ изучалась и сравнивалась с другими топологическими алгебрами в работах Г. Л. Литвинова, В. В. Варфоломеева, Гудмана. Задача об описании замкнутых идеалов в $F(\mathfrak{G})$ очень сложна. Она была решена П. К. Рашевским для случая, когда $\dim \mathfrak{G} = 1$. В этом случае $F(\mathfrak{G})$ можно отождествить с алгеброй целых аналитических функций $F = \{f(\zeta)\}$, удовлетворяющих при любом $\varepsilon > 0$ оценке

$$|f(\zeta)| \leqslant Ce^{\varepsilon|\zeta|}, \text{ где } C = C(f, \varepsilon). \tag{1}$$

Удовлетворяющие оценке (1) для любого ε функции образуют топологическую алгебру. Операции — обычное сложение, умножение функций. Топология задается нормами $\| f \|_\varepsilon = C_{\min}$, где $C_{\min}$ = нижняя грань констант $C(f, \varepsilon)$, удовлетворяющих (1) при данных f, ε. Сопряженное пространство F' отождествляется с пространством аналитических ростков $\varphi(z)$ от одного комплексного переменного z.

Теорема. *Пусть $b_1, b_2, \ldots$ — любая последовательность комплексных чисел, где $|b_1| \leqslant |b_2| \leqslant \ldots$ и*

$$\frac{|b_n|}{n} \to \infty, \tag{2}$$

при $n \to \infty$ (если последовательность бесконечна). Тогда множество всех функций $f(\zeta) \in F$, имеющих в числе своих корней числа $b_1, \ldots, b_n, \ldots$ (с кратностью не ниже их кратности в последовательности $\{b_n\}$), образуют нетривиальный замкнутый идеал в F. Любой нетривиальный замкнутый идеал в F можно получить указанным путем.

Следствие 1. *Пусть $I^{b,n}$ — идеал, состоящий из всех функций $f(\zeta) \in F$, обращающихся в нуль в точке b с кратностью не меньшей, чем n. Такой идеал является примарным в F, т. е. содержится лишь в одном минимальном идеале. Оказывается, что всякий нетривиальный замкнутый идеал в F является пересечением не более чем счетного семейства примарных идеалов.*

Следствие 2. *Общий вид нетривиального замкнутого подпространства в F', инвариантного относительно оператора $\frac{d}{dz}$, описывается так: это минимальное замкнутое подпространство в F', натянутое на ростки:*

$$e^{bz}, ze^{bz}, \ldots, z^{n-1}e^{bz}, \tag{3}$$

где b пробегает последовательность $\{b_i\}$, описанную в теореме, n — кратность числа b в этой последовательности.

Утверждения о спектральном синтезе, подобные следствию 1, доказывались в работах Ж. Дельсарта, Л. Шварца, Б. Мальгранжа, Л. Эренпрейса, Л. Хёрмандера и других авторов в связи с теорией дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, уравнений в свертках и теорией среднепериодических функций. Важная особенность результата П. К. Рашевского состоит в том, что он не только доказал утверждение: «любой идеал есть пересечение примарных», но и явно указал условие (2), необходимое и достаточное для описания тех наборов примарных идеалов, которые порождают нетривиальный идеал общего вида. В теории унитарных представлений аналогией может служить разница между доказательством «абстрактной теоремы Планшереля» и вычислением конкретной меры Планшереля для данной группы. Появление описанных результатов П. К. Рашевского стимулировало цикл работ И. Ф. Красичкова-Терновского, где для широкого класса топологических алгебр, образуемых целыми аналитическими функциями одного комплексного переменного, удовлетворяющими условиям на рост, получено полное описание замкнутых идеалов в духе теоремы П. К. Рашевского.

В работе П. К. Рашевского «Описание замкнутых инвариантных подпространств в некоторых инвариантных пространствах» (1977 г.) рассматривается пространство L^2_* всевозможных нечетных измеримых комплекснозначных функций $f(x)$ на вещественной прямой, удовлетворяющих условию:

$$(4)\qquad \forall f(x)\exists k>0,\quad \text{что}\quad \int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-2kx}\,dx \to \infty.$$

Пусть L^2_k — гильбертово пространство функций, удовлетворяющих (4); норма: $\|f\| = \left(\int_0^\infty |f(x)|^2 e^{-2kx}\,dx\right)^{1/2}$. Тогда L^2_* — объединение расширяющейся последовательности гильбертовых пространств L^2_k. Подпространство E^* в L^2_* называется замкнутым, если $E^* \cap L^2_k$ замкнуто в L^2_k; $\forall k$. П. К. Рашевский описал все замкнутые нетривиальные подпространства в L^2_*, инвариантные относительно следующего обобщенного сдвига в смысле Дельсарта — Левитана при всех $a \in \mathbf{R}$:

$$(5)\qquad f(x) \to \frac{1}{2}(f(x+a)+f(x-a)).$$

Теорема. *Всякое замкнутое ненулевое собственное подпространство $E^* \subset L^2_*$, выдерживающее преобразования* (5), *взаимно однозначно соответствует конечному или счетному набору комплексных чисел $\{c_n\}$ (возможно, с конечными кратностями; $c_n = a_n + ib_n$, $a_n \geqslant 0$ и $b_n \geqslant 0$ при $a_n = 0$) при условии, что этот набор удовлетворяет* соотношению: *$\forall l > 0$ для тех $c_n = a_n + ib_n$, у которых $|b_n| < l$, после их перенумерации в порядке роста a_n: $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ соблюдается условие:*

$$(6)\qquad a_n/\ln n \to \infty \quad \text{при } n \to \infty.$$

При этом любому набору $\{c_n\}$ при условии (6) *отвечает собственное подпространство в E^*, натянутое с замыканием в L^2_* на функции:*

$$(7)\qquad \{x^p \sin c_n x\},\qquad \{x^p \cos C_n x\},$$

где $\forall c_n$, p пробегает четные, а q — нечетные из числа значений $0, 1, \ldots, r_n - 1$; r_n — кратность c_n в $\{c_j\}$. При $c_n = 0$ кратность четна, равна $2r_n$ и вместо (7) *берем $x, x^3, \ldots, x^{2r_n-1}$. Обратно, любое замкнутое нетривиальное собственное подпространство E^* в L^2_* получается указанным путем, притом из единственного набора $\{c_n\}$ и $E^* \cap L^2_k$ натягивается (с замыканием в L^2_k) на ту часть функций* (7), *для которых $|b_n| < k$.*

Решение данной задачи было редуцировано П. К. Рашевским к решению эквивалентных задач об описании инвариантных относительно некоторых преобразований подпространств в пространствах аналитических функций. Получившаяся серия эквивалентных задач решается с помощью тонкой аналитической техники. П. К. Рашевским полностью решена задача об описании всех замкнутых двустороннеинвариантных подпространств в L^p_* при $p > 2$.

Для других функциональных пространств на $SL(2; \mathbf{R})$ аналогичная задача решалась в цикле работ Л. Эренпрейса и Ф. Маутнера. П. К. Рашевский не только рассматривает другие функциональные пространства, но решает задачу в других терминах и другими методами, позволившими довести описание инвариантных подпространств в L_*^p до полной законченности. Кроме того, есть основания рассчитывать на то, что методы П. К. Рашевского и в особенности проведенная им редукция задачи об описании инвариантных подпространств в L_*^p к соответствующей задаче для обобщенного сдвига, позволят продвинуться в решении задачи и для других полупростых групп.

П. К. Рашевский на протяжении многих лет читает специальные курсы по теории представлений на механико-математическом факультете МГУ, излагая не только классические аспекты теории, но и последние достижения.

Хотя в последние годы много внимания со стороны самых различных научных школ было уделено изучению топологии групп Ли, в советской математической литературе отсутствовал достаточно полный обзор, где содержались бы четкие доказательства фундаментальных результатов из теории когомологий групп Ли и однородных пространств. Такой обзор был создан П. К. Рашевским ([71]). Эта работа не только содержит полную, известную на сегодняшний день информацию о вещественных когомологиях однородных пространств, но и включает новое, продуманное изложение основной методики, позволяющей (по крайней мере в принципе) вычислять когомологии однородного пространства (над $\mathbf{R}$).

Из круга топологических интересов П. К. Рашевского отметим его результаты, относящиеся к выяснению структуры множества неподвижных точек при автоморфизмах групп Ли. В теории симметрических пространств (например, в их классификации) большую роль играет тот факт, что множество неподвижных точек инволютивного автоморфизма односвязной группы Ли — связно. П. К. Рашевский обнаружил ([73], [76]), что этот факт есть частный случай весьма общего утверждения, связанного с глубокими свойствами групп Ли, согласно которому множество всех точек односвязной группы Ли, неподвижных при каком-либо ее автоморфизме компактного типа, всегда связно (например, если группа компактна, то любой ее автоморфизм — компактного типа). Для компактных групп это утверждение было доказано также А. Борелем.

В [76] содержится неожиданный результат, относящийся к введенному П. К. Рашевским «автономному ковариантному дифференцированию»,— операции, определенной на любом гладком многообразии и перерабатывающей в себя так называемые сверхтензоры. Существование такого дифференцирования позволяет ввести понятие замкнутых сверхтензоров и построить «сверхтензорные когомологии» многообразия, не предполагающие для своего определения ничего, кроме задания гладкой структуры на многообразии. Оказывается, на этом языке естественно возникают классы Понтрягина.

Из приведенного краткого обзора видна чрезвычайная широта интересов П. К. Рашевского, глубина его научного проникновения в существо проблемы; все эти качества оказали большое влияние на многих математиков, являющихся или непосредственными учениками П. К. Рашевского или участниками многочисленных семинаров, которыми на протяжении многих лет руководит П. К. Рашевский. П. К. Рашевский воспитал большое число специалистов-геометров нашей страны; его ученики работают во многих научных центрах Советского Союза. П. К. Рашевский чутко реагирует на новые научные тенденции и в области воспитания молодых математиков: он является инициатором введения принципиально новых курсов в систему преподавания на механико-математическом факультете МГУ. Среди таких курсов следует особо отметить курс «Геометрия», который сейчас читается на младших курсах для студентов математиков и механиков. Этот курс аккумулирует в себе не только основные геометрические факты, знание которых, как показала практика, совершенно необходимо для выпускников факультета, но и главнейшие научные тенденции последних лет.

Никакая статья о Петре Константиновиче Рашевском не могла бы считаться полной, если не отметить в ней некоторые черты личности Петра Константиновича: предельную научную честность, доброжелательное внимание к окружающим (и особенно молодым, ищущим свой путь в науке), словом, все то, что создает обаяние личности Петра Константиновича и навсегда привлекает к нему людей, имевших возможность общаться с ним.

С. П. Новиков, А. Т. Фоменко

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ П. К. РАШЕВСКОГО [1])

[68] О структуре тензоров, допускающих данную группу инвариантности, ДАН **177**:2 (1967), 275—276.

[69] Исследования по дифференциальной геометрии в Московском университете в советский период (к 50-летию Советской власти). Вестн. МГУ, Математика, механика, № 5 (1967), 12—23 (совм. с А. М. Васильевым, Н. В. Ефимовым).

[70] Тензоры с данной группой инвариантности и сферические функции на однородных пространствах, Труды ММО **20** (1969), 83—110.

[71] О вещественных когомологиях однородных пространств, УМН **24**:3 (1969), 23—90.

[72] О глобальных проективных моделях комплексных однородных пространств. Труды ММО **25** (1971), 3—14.

[73] О связности множества точек группы Ли, неподвижных при ее автоморфизме, Функц. анализ **6**:4 (1972), 97—98.

[74] О догмате натурального ряда, УМН **28**:4 (1973), 243—246.

[75] Теорема о связности подгруппы односвязной группы Ли, перестановочной с каким-либо ее автоморфизмом, Труды ММО **30** (1974), 3—22.

[76] Сверхтензорный аналог комплекса де Рама и классы Понтрягина, Труды семинара им. И. Г. Петровского вып. 2 (1976), 189—210.

[77] Инвариантные замкнутые подпространства некоторых функциональных пространств, Функц. анализ **11**:2 (1977), 87—88.

[78] Биинвариантные пространства функций на $SL(2, \mathbb{R})$, Функц. анализ **11**:3 (1977), 90—91.

---

[1]) Начало списка опубликовано в УМН **13**:1 (1958), 225—231; УМН **23**:1 (1968), 229—234.