

1. Покажите, что группа $U_n(\mathbb{C})$ — вещественная матричная группа Ли.
2. Приведите пример подгруппы в группе Ли, которая не является подгруппой Ли.
3. Пусть G — компактная группа Ли, $\alpha_x : G \rightarrow X$ — действие. Покажите, что $\alpha_x(G)$ — замкнутое подмногообразие в X .
4. Пусть G — группа Ли с транзитивным действием на многообразии X (т.е. все точки X лежат в одной орбите). Докажите, что $\forall x \in X$ отображение $\beta_x : G/G_x \rightarrow X, gG_x \mapsto \alpha(g)(x)$, — диффеоморфизм.
5. Пусть H, N — нормальные подгруппы Ли в группе Ли G и $N \subset H$. Докажите, что H/N — подгруппа Ли группы G/N .
6. Докажите, что дискретная нормальная подгруппа связной группы Ли лежит в центре.
7. Пусть $f : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп Ли. Докажите, что $f(\exp(\xi)) = \exp((df)_e(\xi))$.
8. Пусть G — связная компактная группа Ли. Покажите, что $\det(\text{Ad}(g)) = 1$ для всех $g \in G$.
9. Покажите, что на связной компактной группе Ли G существует единственная, с точностью до умножения на константу, ненулевая бинвариантная форма старшей степени.
10. Покажите, что на группе автоморфизмов связной односвязной группы Ли есть естественная структура (матричной) группы Ли.
11. Доказать, что для компактной связной группы Ли экспоненциальное отображение сюръективно.
12. Доказать, что на компактной группе Ли существует элемент порядка 2.