

Билет 1

1. Теорема Энгеля и ее следствия о нильпотентных алгебрах.
2. Неабелева нильпотентная алгебра Ли размерности 3 имеет базис $\{x, y, z\}$ такой, что $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$.

Билет 2

1. Теорема Ли и ее следствия о разрешимых алгебрах
2. а) Пусть a — идеал в алгебре Ли g . Алгебра g разрешима тогда и только тогда, когда a и g/a разрешимы.
б) Сумма разрешимых идеалов разрешима
в) Найти радикал r алгебры $gl_n(\mathbb{C})$ и полупростую алгебру $s = gl_n(\mathbb{C})/r$.

Билет 3

1. Критерий Картана разрешимости
2. Приведите пример максимальной (по размерности) коммутативной подалгебры в $sl_2(\mathbb{C})$, не являющейся картановской.

Билет 4

1. Критерий Картана полупростоты. Структурная теорема о полупростых алгебрах.
2. Совпадает ли с обычным скалярным произведением форма Киллинга алгебры Ли векторов в $\mathbb{R}^3$ относительно векторного произведения?

Билет 5

1. Теорема Вейля о полной приводимости
2. Привести пример алгебры Ли g такой, что $g = [g, g]$ и g — не полупроста.

Билет 6

1. Теорема Леви.
2. Пусть g — алгебра Ли, r — ее радикал. Показать, что $[g, r] = Dg \cap r$.

Билет 7

1. Критерий полной приводимости.
2. Доказать, что алгебра $sl_n(\mathbb{C})$ полупроста.

Билет 8

1. Теорема о тензорных инвариантах.
2. Докажите, что если вещественная алгебра g полупроста, то ее комплексификация $g^{\mathbb{C}} = g \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ тоже полупроста.

Билет 9

1. Подалгебра Картана произвольной алгебры Ли. Ранг алгебры. Множество регулярных элементов.
2. Приведите пример неизоморфных простых алгебр Ли с равными размерностями и размерностями максимальной (по размерности) коммутативной подалгебры.

Билет 10

1. Транзитивность подалгебр Картана относительно действия группы внутренних автоморфизмов.
2. Найдите все корни подалгебры диагональных матриц алгебры Ли $sl_n(\mathbb{C})$.

Билет 11

1. Подалгебры Картана полупростых алгебр Ли.
2. Приведите пример максимальной (по включению) нильпотентной подалгебры в $sl_2(\mathbb{C})$, не являющейся картановской.

Билет 12

1. Системы корней. Группа Вейля. Двойственная система корней. Системы корней векторных пространств над $\mathbb{R}$ и над $\mathbb{C}$.
2. Найдите все картановские подалгебры в $sl_n(\mathbb{C})$.

Билет 13

1. Базис системы корней. Неразложимые элементы с.к. относительно линейных функционалов. Положительные корни и их представимость в виде суммы базисных элементов.
2. Докажите, что форма Киллинга тождественно равна 0 на алгебрах $n_+ \oplus h$ и $n_- \oplus h$.

Билет 14

1. Свойства базисов приведенной системы корней. Теорема о действии группы Вейля на базисы.
2. Докажите, что если форма Киллинга некоторой алгебры Ли тождественно равна нулю, то алгебра разрешимая.

Билет 15

1. Матрица Картана. Граф Кокстера. Приводимые и неприводимые системы корней. Схема Дынкина.
2. Изоморфны ли алгебры t_3 (верхнетреугольные матрицы) и $so_3 \oplus so_3$ (над $\mathbb{C}$)?

Билет 16

1. Классификация связных схем Дынкина.
2. Найдите подалгебру Картана и образующие Вейля в алгебре so_3 .

Билет 17

1. Веса полупростых комплексных алгебр Ли. Разложение на весовые подпространства. Свойства весовых подпространств.
2. Докажите, что $so_4 \simeq so_3 \oplus so_3$.

Билет 18

1. Строение неприводимых модулей алгебры sl_2 . Свойства весов.
2. Докажите, что любой конечномерный sl_2 -модуль содержит примитивный элемент.

Билет 19

1. Система корней полупростой комплексной алгебры Ли. Образующие Вейля.
2. Обозначим через sp_n алгебру Ли матриц $2n \times 2n$ вида $\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -X^T \end{pmatrix}$ где Y, Z — симметричны. Изоморфны ли алгебры sl_2, so_3, sp_1 ?

Билет 20

1. Разложение $g \simeq n_+ \oplus h \oplus n_-$. Соотношения Вейля.
2. Описать явно присоединенное представление алгебры sl_2 .

Билет 21

1. Теорема существования полупростой комплексной алгебры Ли с данной системой корней.
2. Доказать, что на простой комплексной алгебре Ли любая билинейная инвариантная форма определена с точностью до константы.