

Группы Ли и алгебры Ли, 2-й семестр

Авторы: Проф. А.Б. Жеглов

Билет 1

1. Определение группы Ли, основные примеры. Алгебры Ли, алгебры Ли группы Ли, 2 определения.
2. Покажите, что группа $U_n(\mathbb{C})$ — вещественная матричная группа Ли.

Билет 2

1. Морфизмы групп Ли и индуцированные морфизмы алгебр Ли. Подгруппы Ли, их замкнутость.
2. Приведите пример подгруппы в группе Ли, которая не является подгруппой Ли.

Билет 3

1. Действия группы Ли на многообразии. Теорема о действии. Следствия теоремы о действии: стабилизаторы и орбиты, конструкции представлений групп Ли, индуцированные представления алгебр Ли, присоединенное представление. Группа Ли автоморфизмов конечномерной алгебры и алгебра Ли её дифференцирований.
2. Пусть G — компактная группа Ли, $\alpha_x : G \rightarrow X$ — действие. Покажите, что $\alpha_x(G)$ — замкнутое подмногообразие в X .

Билет 4

1. Следствия теоремы о действии. Стабилизаторы и орбиты. Конструкции представлений групп Ли, индуцированные представления алгебр Ли.
2. Пусть G — группа Ли с транзитивным действием на многообразии X (т.е. все точки X лежат в одной орбите). Докажите, что $\forall x \in X$ отображение $\beta_x : G/G_x \rightarrow X$, $gG_x \mapsto \alpha(g)(x)$, — диффеоморфизм.

Билет 5

1. Теорема Годемана. Фактор-группы Ли.
2. Пусть H, N — нормальные подгруппы Ли в группе Ли G и $N \subset H$. Докажите, что H/N — подгруппа Ли группы G/N .

Билет 6

1. Следствия теоремы Годемана: транзитивные действия, прообразы подгрупп Ли при гомоморфизмах, пересечения подгрупп Ли. Пример: конструкция компактной симплектической группы Ли.

2. Докажите, что дискретная нормальная подгруппа связной группы Ли лежит в центре.

Билет 7

1. Однопараметрические подгруппы. Экспоненциальное отображение. Связь с экспоненциальным отображением в дифференциальной геометрии.

2. Пусть $f : G \rightarrow H$ — гомоморфизм групп Ли. Докажите, что $f(\exp(\xi)) = \exp((df)_e(\xi))$.

Билет 8

1. Дифференциальные уравнения на группе Ли. Восстановление гомоморфизма связной группы Ли по его дифференциалу. Централизаторы и центры в группах Ли и их алгебрах Ли, нормализаторы подгрупп Ли и подалгебр Ли. Связь свойств линейного представления группы Ли и его дифференциала.

2. Пусть G — связная компактная группа Ли. Покажите, что $\det(\text{Ad}(g)) = 1$ для всех $g \in G$.

Билет 9

1. Первая теорема Ли: интегрирование гомоморфизмов алгебр Ли, эквивалентность категорий односвязных групп Ли и их алгебр Ли.

2. Покажите, что на связной компактной группе Ли G существует единственная, с точностью до умножения на константу, ненулевая биинвариантная форма старшей степени.

Билет 10

1. Односвязная накрывающая и фундаментальная группа группы Ли. Точная гомотопическая последовательность расслоения группы Ли над однородным пространством. Исследование связности и вычисление фундаментальных групп классических линейных групп Ли. Пример нелинейной группы Ли (односвязная накрывающая группы $SL_2(\mathbb{R})$).

2. Покажите, что на группе автоморфизмов связной односвязной группы Ли есть естественная структура (матричной) группы Ли.

Билет 11

1. Третья теорема Ли. Теорема Картана.

2. Доказать, что для компактной связной группы Ли экспоненциальное отображение сюръективно.

Билет 12

1. Классификация компактных групп Ли (без доказательства).
2. Покажите, что группы SO_4 и $S^3 \times SO_3$ не изоморфны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Э.Б. Винберг, А.Л. Онищик *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Наука, М. 1988
- [2] Ж.-П. Серр, *Алгебры Ли и группы Ли*, Мир, Москва, 1969
- [3] Н. Бурбаки *Группы и алгебры Ли* Мир, Москва (1978).