Задачи по курсу «Классическая дифференциальная геометрия» (для 206 группы; весна 2011)

Это задачи по второй части курса. Итого получилось три темы в первом листочке и три во втором. Второй контрольной не будет, но, как и в прошлый раз, отмечу некоторые "стандартные" задачи (просто, чтобы подчеркнуть, что они должны решаться с *любыми* числами, функциями и т. п.): $1, 2, 3, 4$ из раздела IV; $1, 2, 6, 7$ из раздела VI. Остальные задачи я также считаю вполне подходящими для выдачи на зачете или экзамене (по крайней мере, те, что без звездочек).

IV. ПОВЕРХНОСТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. Вычислить первую и вторую квадратичные формы, а также гауссову и среднюю кривизны для следующей поверхности: $\mathbf{r}(u,v) = (\cos v - u\sin v,\ \sin v + u\cos v,\ u+v)$.

2. Для поверхности $\mathbf{r}(u,v) = (a\cos u\cos v,\ b\cos u\sin v,\ c\sin u)$ найти среднюю кривизну и гауссову кривизну в точках пересечения ее с осями координат.

3. На поверхности $\{z = x^2\}$ в $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ найти кривизну нормального сечения в точке $(2,2,4)$ в направлении касательной к кривой, задаваемой уравнениями $y = x^2/2$ и $z = x^2$.

4. Для поверхности, заданной в $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ уравнением $\cos(x+y+z) = e^{xy} + z$, вычислить гауссову и среднюю кривизны в точке $(0,0,0)$.

5. Вычислить первую квадратичную форму, вторую квадратичную форму, гауссову и среднюю кривизны поверхности,
  а) заданной как график гладкой функции $z = f(x,y)$;
  *б) заданной как множество решений неособого уравнения $F(x,y,z) = 0$.

6. Найти главные кривизны и главные направления прямого кругового конуса.

7. Доказать, что кривизна кривой, лежащей на сфере, нигде не обращается в нуль.

8. Доказать, что при любой параметризации сферы ее первая квадратичная форма пропорциональна второй.

9. Показать, что прямой геликоид $\mathbf{r}(u,v) = (v\cos u,\ v\sin u,\ u)$ является минимальной поверхностью (т. е. поверхностью с нулевой средней кривизной). Найти главные направления на геликоиде.

***10.** Описать все минимальные поверхности вращения.

11. а) Вычислить гауссову кривизну следующей поверхности вращения: $\mathbf{r}(u,v) = \left(a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u} - \sqrt{a^2-u^2},\ u\cos v,\ u\sin v\right)$.
  *б) Доказать, что эта поверхность локально изометрична плоскости Лобачевского.

12. Доказать утверждения:
  а) если все нормали к поверхности проходят через некоторую точку, то поверхность является частью сферы.
  *б) если все нормали к поверхности пересекают некоторую прямую, то поверхность является поверхностью вращения.

***13.** Точка поверхности называется *омбилической*, если главные кривизны в этой точке равны. Найти омбилические точки поверхности $xyz = a^3$.

***14.** Доказать, что замкнутая (т.е. компактная и без границы) гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$ всегда имеет точку, в которой гауссова кривизна не меньше нуля,

***15.** Доказать, что лист Мёбиуса, представленный как гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, не может иметь всюду положительную гауссову кривизну.

V. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

1. Доказать, что следующие пространства попарно не гомеоморфны: прямая, отрезок, луч, окружность, пара пересекающихся прямых, плоскость, сфера.

2. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно открытому диску $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$.

3. Доказать, что отрезок связен.

4. Доказать, что образ связного пространства при непрерывном отображении связен.

5. Доказать, что для (топологического) многообразия понятия связности и линейной связности эквивалентны.

***6.** Доказать, что любое конечное связное топологическое пространство является линейно связным.

7. Доказать, что замкнутое подмножество компактного пространства компактно.

8. Доказать, что компактное подмножество хаусдорфова топологического пространства замкнуто в нем.

9. Доказать, что образ при непрерывном отображении компактного пространства компактен.

***10.** Пусть X — компактное топологическое пространство, Y — хаусдорфово топологическое пространство, $f\colon X \to Y$ — непрерывное взаимно-однозначное отображение. Доказать, что f — гомеоморфизм.

11. Пусть X — метрическое пространство с метрикой ρ. Для произвольного подмножества $A \subset X$ положим $\rho(x,A) = \inf\limits_{a\in A}\rho(x,a)$. Доказать, что функция $f(x) = \rho(x,A)$ непрерывна на X. Всегда ли существует точка $a \in A$, для которой $\rho(x,A) = \rho(x,a)$? А если множество A замкнуто, компактно?

VI. ГЛАДКИЕ МНОГООБРАЗИЯ И ГЛАДКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

1. Определить, являются ли гладкими следующие функции на двумерной сфере (заданные в сферических координатах): $\cos\varphi$, $\cos\theta$, $\sin\theta$ [*Здесь: θ — угол, отсчитываемый от оси z, φ — долгота*].

2. Пусть $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ — стандартная сфера в $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x, y, z. Рассмотрим касательный вектор ξ к M в точке $P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, декартовы координаты которого равны $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$. Найти координаты вектора ξ (как касательного вектора к M) в сферической системе координат (θ, φ).

3. Пусть $M = \{f(\mathbf{x}) = \mathrm{const}\}$ — неособая поверхность уровня гладкой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ [*т.е.* $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \neq 0$ *для всех точек* $\mathbf{x} \in M$]. Доказать, что а) M — гладкое многообразие, *б) M — ориентируемо.

4. Доказать, что сфера S^n — гладкое ориентируемое многообразие.

5. Доказать, что лист Мёбиуса — не ориентируемое многообразие.

6. Определить, при каких значениях параметра λ подмножество плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$, заданное уравнением $x^2 + xy = \lambda$, является подмногообразием.

7. Определить, при каких значениях констант c_1 и c_2 подмножество $\mathbb{R}^6$ (с декартовыми координатами $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$), выделяемое уравнениями $x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2 = c_1$ и $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = c_2$, является гладким многообразием (и найти его размерность).

***8.** Доказать, что n-мерное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ — гладкое многообразие. При каких n оно ориентируемо?

9. Доказать, что множество $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \{$вещественные$2\times2$-матрицы с определителем 1$\}$ является гладким многообразием. Какова его размерность? Является ли оно связным, компактным?

***10.** Доказать, что множество $\mathrm{SU}(2) = \{$комплексные 2×2-матрицы $A \mid A\overline{A}^\top = E\}$ (рассматриваемое как подмножество линейного пространства всех комплексных 2×2-матриц с обычной топологией) гомеоморфно 3-мерной сфере.

11. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ (при $n \neq m$) не диффеоморфны.

***12.** Найти матрицу A вида $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, являющуюся касательным вектором к многообразию $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ в точке $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Найти образ A при дифференциале отображения $f : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$, определенного формулой $f(X) = X^2 - X$.

***13.** Доказать, что любое отображение F сферы S^2 в плоскость $\mathbb{R}^2$ имеет критические точки [*т.е. такие точки, в которых дифференциал отображения F имеет ненулевое ядро*].

***14.** Доказать, что существует погружение двумерного тора с выброшенной точкой в плоскость. Существует ли погружение двумерного тора в плоскость?