Задачи по курсу «Классическая дифференциальная геометрия» (для 206 группы; весна 2011)

Это некоторые задачи по материалу первой половины курса (более сложные отмечены звездочкой). Для подготовки к контрольной полезно обратить больше внимания на "стандартные" задачи, где надо что-то вычислить (например: 5, 8, 9 из раздела I; 2, 3, 7, 8, 9 из раздела II; 1, 2, 3, 8, 13 из раздела III).

I. ГЕОМЕТРИЯ НА СФЕРЕ И ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

1. Показать, что при стереографической проекции сферы (псевдосферы) из северного полюса на горизонтальную плоскость
а) сечения сферы (псевдосферы) плоскостями, проходящими через ее центр, переходят в прямые и окружности на плоскости;
б) углы между кривыми сохраняются.
[*Углы на плоскости проекции измеряются в обычной евклидовой метрике, а на сфер (псевдосфере) — в индуцированной.*]

2. Назовем *прямыми* на псевдосфере ее пересечения с плоскостями, проходящими через центр. Показать, что длина отрезка прямой на псевдосфере, соединяющего две любые фиксированные точки, меньше длины любой другой кривой, соединяющей эти точки.

3. Найти длину отрезка в метрике Лобачевского, соединяющего точки z и w верхней полуплоскости.

4. Доказать неравенство треугольника на плоскости Лобачевского.

5. На плоскости Лобачевского (в модели $\{|z| < 1\}$) дана окружность с центром в точке $(1/2, 0)$ радиуса 2 (в метрике Лобачевского). Выписать ее уравнение в декартовых координатах.

6. Выразить длину окружности и площадь круга через радиус на сфере и на плоскости Лобачевского.

7. Выразить площадь треугольника через углы на сфере и на плоскости Лобачевского.

8. На плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости $\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ найти
a) радиус окружности, проходящей через точки $3i$, $9i$ и $1 + 2i$;
b) расстояние от точки i до кривой $y = 2x$ (т.е. минимальное расстояние от данной точки до этой кривой).
b) площадь треугольника с вершинами $i, 2i, 1 + i$.

9. На плоскости Лобачевского в модели на верхней полуплоскости нарисован "евклидов" прямоугольник, т. е. фигура, заданная неравенствами $\{x_1 < x < x_2;\ y_1 < y < y_2\}$ (где $y_1 > 0$). Пусть длина боковой стороны равна a, а длина нижней стороны равна b. Найти длину диагонали. (Все длины измеряются в метрике Лобачевского.)

***10.** Обозначим через G множество всех преобразований верхней полуплоскости ($\mathrm{Im}\, z > 0$, $z \in \mathbb{C}$) вида $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d — вещественные числа, и $ad - bc > 0$.
а) Показать, что любое преобразование из G является изометрией для метрики Лобачевского.
б) Доказать, что G — это множество всех собственных (т.е. сохраняющие ориентацию) изометрий плоскости Лобачевского.
в) Описать все изометрии плоскости Лобачевского.

11. Доказать, что сфера, плоскость Лобачевского и обычная (евклидова) плоскость локально не изометричны.

***12.** Доказать, что в плоскости Лобачевского любые два треугольника с равными углами можно перевести изометрией друг в друга.

***13.** Доказать, что любая собственная (т.е. сохраняющая ориентацию) изометрия плоскости Лобачевского есть композиция двух симметрий (относительно прямых).

***14.** Доказать теорему Пифагора для геометрии Лобачевского: если в треугольнике со сторонами a, b, c угол, противолежащий стороне c, прямой, то $\mathrm{ch}\, c = \mathrm{ch}\, a\ \mathrm{ch}\, b$.

15. Для равнобедренного треугольника на плоскости Лобачевского доказать, что высота, биссектриса и медиана, проведенные из вершины, совпадают.

II. РИМАНОВА МЕТРИКА

1. Записать (в координатах θ, φ) индуцированную риманову метрику на сфере $\mathbf{r}(\theta, \varphi) = (R \sin\theta \cos\varphi,\ R \sin\theta \sin\varphi,\ R \cos\theta)$.

2. Записать (в координатах u, v) риманову метрику поверхности $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v,\ a \cos u \sin v,\ c \sin u)$.

3. Для поверхности, заданной в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ уравнением $x^4 + y^4 + z^4 + xyz = 4$, вычислить матрицу римановой метрики в точке $(1, 1, 1)$ в координатах x, y.

***4.** Поверхность называется *конической*, если она образована лучами с началом в фиксированной точке O, проходящими через точки данной кривой $\mathbf{r}(t)$ (пусть при этом кривая такова, что $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ линейно независимы во всех точках кривой). Доказать, что любая коническая поверхность локально изометрична плоскости.

***5.** Можно ли изометрично отобразить часть прямого кругового цилиндра, заданную условиями $x^2 + y^2 = R^2$ и $0 \le z \le H$, на какую-либо область на конической поверхности?

6. Показать, что винтовая поверхность $\mathbf{r}_1(\rho, v) = (\rho \cos v,\ \rho \sin v,\ \rho + v)$ и гиперболоид вращения $\mathbf{r}_2(r, \varphi) = \left(r \cos\varphi,\ r \sin\varphi,\ \sqrt{r^2-1}\right)$ локально изометричны, причем изометрия устанавливается следующими уравнениями: $\varphi = v + \mathrm{arctg}\, \rho$ и $r^2 = \rho^2 + 1$.

7. Пусть метрика на поверхности имеет вид $ds^2 = du^2 + 2\, dv^2$. Найти угол между линиями $v = 2u$ и $v = -2u$ в точке их пересечения.

8. На поверхности $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v,\ u \sin v,\ v)$ (она называется *геликоидом*) найти площадь "треугольника", заданного неравенствами $0 \le u \le \mathrm{sh}\, v$ и $0 \le v \le v_0$.

9. Пусть метрика на поверхности имеет вид $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2) dv^2$. Найти периметр и углы "треугольника", образованного кривыми $2u = \pm a v^2$ и $v = 1$.

***10.** Найти уравнения кривых, которые делят пополам углы между координатными линиями на параболоиде вращения $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v,\ u \sin v,\ u^2/2)$.

III. КРИВЫЕ

1. Точка M движется по лучу с постоянной скоростью v, который вращается вокруг своего начала O с постоянной угловой скоростью ω. Найти длину траектории точки M, получающейся при одном обороте луча (в начальный момент $OM = a$).

2. *Циклоида* — это кривая, по которой движется точка на ободе колеса, катящегося без проскальзывания по прямой. Найти параметрическое уравнение циклоиды и вычислить ее кривизну в вершине (через радиус колеса R).

3. Ввести на кривой $\mathbf{r}(t) = (e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t)$ натуральный параметр.

4. Описать кривые $\mathbf{r}(t)$, заданные дифференциальным уравнением $\mathbf{r}' = \omega\times\mathbf{r}$, где ω — постоянный вектор.

5. Доказать, что для пространственной кривой $\mathbf{r}(t)$ плоскость, натянутая на вектора $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$ (в точках, где эти вектора линейно независимы), не зависит от регулярной параметризации кривой. (Эта плоскость называется *соприкасающейся плоскостью*.)

6. Доказать, что кривизна кривой в точке P равна кривизне ее ортогональной проекции на соприкасающуюся плоскость в точке P.

7. Выразить кривизну плоской кривой, заданной в виде $\rho = f(\varphi)$ в полярных координатах ρ, φ, через функцию f и ее производные.

8. Кривая задана в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ уравнениями $x + \operatorname{sh} x = \sin y + y$ и $z + e^z = x + \ln(1 + x) + 1$. Найти ее кривизну, кручение и репер Френе в точке $(0, 0, 0)$.

9. Пусть $\gamma(t)$ — кривая, кривизна которой нигде не равна нулю. Доказать, что следующие условия равносильны:
а) кривая $\gamma(t)$ плоская;
б) кручение кривой $\gamma(t)$ тождественно равно нулю;
в) все соприкасающиеся плоскости кривой $\gamma(t)$ проходят через одну точку;
г) все нормальные плоскости кривой содержат некоторый постоянный вектор $\mathbf{e}$.

10. Описать функции $f(t)$, для которых кривая $\mathbf{r}(t) = (e^t,\ 2e^{-t},\ tf(t))$ — плоская.

11. Доказать, что если материальная точка движется в пространстве под действием центральной силы (т.е. сила в каждой точке P направлена вдоль прямой OP, где O — некоторая фиксированная точка), то ее траектория — плоская кривая.

12. Доказать, что если все нормальные плоскости к пространственной кривой проходят через фиксированную точку P, то эта кривая лежит на сфере с центром в точке P.

13. В каждой точке кривой $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t,\ 4\sin(t/2))$ в направлении вектора ускорения $\mathbf{r}''$ отложен отрезок, длина которого в четыре раза больше кривизны кривой. Для каждой точки новой кривой найти уравнение соприкасающейся плоскости.

14. Найти кривизну и кручение винтовой линии $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$.

15. Описать все кривые с постоянными кривизной и кручением: $k = \mathrm{const}$ и $\varkappa = \mathrm{const}$.

***16.** Найти уравнение плоской кривой, для которой радиус кривизны совпадает с длиной отрезка нормали от кривой до оси абсцисс.

***17.** Написать параметрическое уравнение плоской кривой, для которой зависимость кривизны k от натурального параметра s задается формулой $k(s) = \frac{a}{a^2+s^2}$.

***18.** Доказать, что $\int_\gamma k(s)\,ds = 2\pi$, где $k(s)$ — кривизна замкнутой плоской выпуклой кривой γ, а s — натуральный параметр.

***19.** Доказать утверждение: если между точками двух кривых установлено (гладкое) соответствие, при котором бинормали в соответствующих точках совпадают (как прямые), то эти кривые плоские.

***20.** Для овала (т. е. гладкой замкнутой выпуклой кривой на плоскости) обозначим через $w(\varphi)$ его ширину в направлении φ (т. е. расстояние между двумя его параллельными касательными, образующими угол φ с некоторым фиксированным направлением ($\varphi \in [0, 2\pi]$). Доказать, что длина овала равна $\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} w(\varphi)\,d\varphi$.