

I. КРИВЫЕ

- параметрическое задание кривой, описываемой словами, дифференциальным уравнением, системой уравнений
- вычисление длины кривой, натуральная параметризация кривой
- различные определения и свойства кривизны кривой, вычисление кривизны кривой

1. Точка M движется по лучу с постоянной скоростью v , который вращается вокруг своего начала O с постоянной угловой скоростью ω . Найти длину траектории точки M , получающейся при одном обороте луча (в начальный момент $OM = a$).
2. Окружность радиуса r катится (без проскальзывания) по внешней стороне неподвижной окружности радиуса R . В начальный момент точка M катящейся окружности лежит на неподвижной окружности. Найти длину траектории точки M до ее следующего попадания на неподвижную окружность.
3. Описать кривые $\mathbf{r}(t)$, заданные дифференциальным уравнением $\mathbf{r}' = \omega \times \mathbf{r}$, где ω — постоянный вектор.
4. Доказать, что если материальная точка движется в пространстве под действием центральной силы (т.е. сила в каждой точке P направлена вдоль прямой OP , где O — некоторая фиксированная точка), то ее траектория — плоская кривая.
5. Доказать, что если все нормальные плоскости к кривой проходят через фиксированную точку P , то эта кривая лежит на сфере с центром в точке P .
6. Ввести на кривой $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ натуральный параметр.
7. Доказать, что для пространственной кривой $\mathbf{r}(t)$ плоскость, натянутая на вектора $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$ (в точках, где эти вектора линейно независимы), не зависит от регулярной параметризации кривой. (Эта плоскость называется *соприкасающейся плоскостью* кривой.)
8. Доказать, что кривизна кривой в точке P и кривизна ее ортогональной проекции на соприкасающуюся плоскость в точке P одинаковы.
9. В каждой точке кривой $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin(t/2))$ в направлении вектора ускорения $\mathbf{r}''$ отложен отрезок, длина которого в четыре раза больше кривизны кривой. Для каждой точки новой кривой найти уравнение соприкасающейся плоскости.
10. Найти кривизну винтовой линии $\mathbf{r}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$.
11. Кривая задана в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ в неявном виде уравнениями $x + \operatorname{sh} x = \sin y + y$ и $z + e^z = x + \ln(1 + x) + 1$. Найти ее кривизну в точке $(0, 0, 0)$.
12. Выразить кривизну плоской кривой, заданной в виде $\rho = f(\varphi)$ в полярных координатах ρ, φ , через функцию f и ее производные.
13. Найти уравнение плоской кривой, для которой радиус кривизны совпадает с длиной отрезка нормали от кривой до оси абсцисс.
14. Написать параметрическое уравнение плоской кривой, для которой зависимость кривизны k от натурального параметра s задается формулой $k(s) = \frac{a}{a^2 + s^2}$.
15. Доказать, что $\int_{\gamma} k(s) ds = 2\pi$, где $k(s)$ — кривизна замкнутой плоской выпуклой кривой γ , а s — натуральный параметр.

II. ГЕОМЕТРИЯ НА СФЕРЕ И ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

- различные формы записи метрик на сфере и плоскости Лобачевского, их изометрии
- свойства прямых и окружностей на сфере и плоскости Лобачевского
- вычисление длин кривых и площадей фигур на сфере и плоскости Лобачевского

1. Обозначим через G множество всех преобразований верхней полуплоскости ($\operatorname{Re} z > 0, z \in \mathbb{C}$) вида $z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d — вещественные числа, и $ad - bc > 0$.
 - а) Показать, что любое преобразование из G является изометрией для метрики Лобачевского.
 - б) Доказать, что G — это множество всех собственных (т.е. сохраняющие ориентацию) изометрий плоскости Лобачевского.
 - в) Описать все изометрии плоскости Лобачевского.
2. Найти все изометрии стандартной метрики на двумерной сфере.
3. Доказать, что сфера, плоскость Лобачевского и обычная (евклидова) плоскость локально не изометричны.
4. Показать, что при стереографической проекции сферы из северного полюса на плоскость, проходящую через ее центр,
 - а) сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр, переходят в прямые и окружности на плоскости;
 - б) углы между кривыми сохраняются.
5. Выразить длину окружности и площадь круга через радиус на сфере и на плоскости Лобачевского.
6. Выразить площадь треугольника через углы на сфере и на плоскости Лобачевского.
7. Найти длину отрезка в метрике Лобачевского, соединяющего точки z и w верхней полуплоскости.
8. Доказать неравенство треугольника на плоскости Лобачевского.
9. Доказать, что в плоскости Лобачевского любые два треугольника с нулевыми углами можно перевести изометрией друг в друга.
10. Доказать, что любая собственная изометрия плоскости Лобачевского является композицией двух симметрий (относительно прямых).
11. Показать, что длина прямолинейного отрезка, соединяющего две любые фиксированные точки на плоскости Лобачевского, меньше длины любой другой кривой, соединяющей эти точки.
12. На плоскости Лобачевского (в модели $\{ |z| < 1 \}$) дана окружность с центром в точке $(1/2, 0)$ радиуса 2 (в метрике Лобачевского). Выписать ее уравнение в декартовых координатах.
13. Доказать теорему Пифагора для геометрии Лобачевского: если в треугольнике со сторонами a, b, c угол, противолежащий стороне c — прямой, то $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b$.

III. РИМАНОВА МЕТРИКА

- вычисление римановой метрики для поверхности, заданной параметрически или уравнением
 - запись данной римановой метрики в новых координатах, локальная изометричность поверхностей
 - вычисление длин кривых, углов между кривыми, площадей фигур для заданной римановой метрики
-

- Доказать утверждения:
 - если все нормали к поверхности проходят через некоторую точку, то поверхность является частью сферы;
 - если все нормали к поверхности пересекают некоторую прямую, то поверхность является частью поверхности вращения.
- Вычислить первую квадратичную форму поверхности $\mathbf{r}(u, v) = (a \cos u \cos v, a \cos u \sin v, c \sin u)$.
- Для поверхности, заданной в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ уравнением $x^4 + y^4 + z^4 + xyz = 4$, вычислить матрицу римановой метрики в точке $(1, 1, 1)$ в координатах x, y .
- Поверхность называется *конической*, если она образована лучами с началом в фиксированной точке O , проходящими через точки данной кривой $\mathbf{r}(t)$ (пусть при этом кривая такова, что $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ линейно независимы во всех точках кривой). Доказать, что любая коническая поверхность локально изометрична плоскости.
- Можно ли изометрично отобразить часть прямого кругового цилиндра, заданную условиями $x^2 + y^2 = R^2$ и $0 \leq z \leq H$, на какую-либо область на конической поверхности.
- Показать, что винтовая поверхность $\mathbf{r}_1(\rho, v) = (\rho \cos v, \rho \sin v, \rho + v)$ и гиперboloид вращения $\mathbf{r}_2(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi, \sqrt{r^2 - 1})$ локально изометричны, причем изометрия устанавливается следующими уравнениями: $\varphi = v + \arctg \rho$ и $r^2 = \rho^2 + 1$.
- Пусть метрика на поверхности имеет вид $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$. Определить, под каким углом пересекаются кривые $u + v = 0$ и $u - v = 0$.
- На плоскости с координатами u, v задана метрика $ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u dv^2$. Найти длину линии $u = v$ между точками $M_1(t_1, t_1)$ и $M_2(t_2, t_2)$.
- На поверхности $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, v)$ (она называется *геликоидом*) найти площадь “треугольника”, заданного неравенствами $0 \leq u \leq \operatorname{sh} v$ и $0 \leq v \leq v_0$.
- Найти уравнения кривых, которые делят пополам углы между координатными линиями параболоида вращения $\mathbf{r}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2/2)$.