

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ**

(лектор — Ошемков А.А.)

(331, 332 группы — весенний семестр 2007 года)

1. Определение топологического пространства. Примеры. Определение непрерывного отображения. Гомеоморфизм. Некоторые свойства топологических пространств (связность, компактность, хаусдорфовость). Определение топологического многообразия.
2. Гладкие многообразия. Гладкие функции и гладкие отображения. Различные определения касательного вектора к многообразию. Их эквивалентность. Производная функции вдоль касательного вектора к многообразию.
3. Неособые совместные поверхности уровня гладких функций как гладкие многообразия. Дифференциал гладкого отображения. Определение вложения и погружения. Теорема Уитни (без док-ва). Определение подмногообразия.
4. Определение многообразия с краем. Край гладкого многообразия как гладкое многообразие. Определения ориентируемости многообразия. Их эквивалентность. Ориентируемость края ориентируемого многообразия.
5. Определение тензора. Основные тензорные операции (сложение, умножение на скаляры, тензорное произведение, свертка, перестановка индексов). Тензоры как полилинейные отображения. Размерность пространства тензоров данного типа. Операции поднятия и опускания индексов.
6. Операции симметрирования и альтернирования. Их свойства. “Стандартный” базис в пространстве кососимметрических тензоров. Внешние формы. Определения внешнего умножения (координатное и инвариантное). Свойства внешнего умножения.
7. Тензорные поля. Базисные векторные и ковекторные поля, связанные с системой координат. Внешние дифференциальные формы. Определение внешнего дифференцирования. Свойства внешнего дифференцирования. Коммутатор векторных полей. Определение и основные свойства.
8. Ковариантное дифференцирование как тензорная операция в  $\mathbb{R}^n$ . Символы Кристоффеля в криволинейных системах координат (в  $\mathbb{R}^n$ ). Определение аффинной связности (операции ковариантного дифференцирования) на многообразии. Ее свойства. Операция ковариантного дифференцирования одного векторного поля вдоль другого. “Однозначность” определения операции ковариантного дифференцирования по ее свойствам.
9. Римановы связности. Теорема о существовании и единственности симметричной римановой связности. Операция ковариантного дифференцирования на поверхностях в  $\mathbb{R}^3$  как композиция обычного дифференцирования и проекции.
10. Определение параллельного переноса на многообразии с аффинной связностью. Свойства оператора параллельного переноса. Свойства параллельного переноса относительно римановой связности.
11. Геодезические. Простейшие свойства и примеры. Экспоненциальное отображение. Геодезические сферы. Лемма Гаусса. Геодезические как кратчайшие.
12. Тензор кривизны. Координатное определение. Формулы для компонент тензора кривизны через символы Кристоффеля. Тензор Риччи. Скалярная кривизна. Тензор кручения и тензор кривизны как полилинейные отображения.
13. Алгебраические симметрии тензора кривизны. Тензор кривизны для римановой связности. Тензор кривизны в двумерном случае. Теорема Гаусса.
14. Определение интеграла от дифференциальной формы (в одной карте). Интеграл от дифференциальной формы по многообразию с краем. Формула Стокса.
15. Операция перенесения формы (прообраз формы). Ее свойства. Группы когомологий. Числа Бетти. Гомоморфизм групп когомологий, порожденный гладким отображением. Вычисление 0-мерной группы когомологий гладкого многообразия. Вычисление групп когомологий окружности. Критерий точности замкнутой 1-формы.
16. Гомотопные отображения. Совпадение гомоморфизмов групп когомологий, порожденных гомотопными отображениями (без док-ва). Гомотопически эквивалентные пространства. Равенство групп когомологий для гомотопически эквивалентных пространств. Лемма Пуанкаре.
17. Теорема Сарда (без док-ва). Определение степени отображения. Степень отображения окружности в окружность. Теорема Брауэра. Теорема о существовании нуля у векторного поля на четномерной сфере. Индекс изолированной особой точки векторного поля.