КРИВЫЕ

1. *Циклоида* — это кривая, по которой движется точка на ободе колеса, катящегося без проскальзывания по прямой. Найти параметрическое уравнение циклоиды и вычислить ее кривизну в вершине (через радиус колеса R).
2. Описать функции $f(t)$, для которых кривая $\mathbf{r}(t) = (e^t,\ 2e^{-t},\ tf(t))$ — плоская.
3. Пусть $\gamma(t)$ — кривая, кривизна которой нигде не равна нулю. Доказать, что следующие условия равносильны:
   а) кривая $\gamma(t)$ плоская;
   б) кручение кривой $\gamma(t)$ тождественно равно нулю;
   в) все соприкасающиеся плоскости кривой $\gamma(t)$ проходят через одну точку;
   г) все нормальные плоскости кривой содержат некоторый постоянный вектор $\mathbf{e}$.
4. Доказать, что кривизна кривой в точке P и кривизна ее проекции на соприкасающуюся плоскость в точке P одинаковы.
5. В каждой точке кривой $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t,\ 4\sin(t/2))$ в положительном направлении главной нормали отложен отрезок в четыре раза больше кривизны кривой. Для каждой точки новой кривой найти уравнение соприкасающейся плоскости.
6. Найти уравнение плоской кривой, для которой радиус кривизны совпадает с длиной отрезка нормали от кривой до оси абсцисс.
7. Кривая задана в $\mathbb{R}^3(x, y, z)$ в неявном виде уравнениями $x + \operatorname{sh} x = \sin y + y$ и $z + e^z = x + \ln(1 + x) + 1$. Найти ее кривизну в точке $(0, 0, 0)$.
8. Описать класс кривых с постоянными кривизной и кручением: $k = \mathrm{const}$ и $\varkappa = \mathrm{const}$.
9. Выразить кривизну плоской кривой, заданной в виде $\rho = f(\phi)$ в полярных координатах ρ, ϕ, через функцию f и ее производные.
10. Ввести на кривой $\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ e^t)$ натуральный параметр.
11. Доказать, что длина отрезка касательной к *астроиде* $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, заключенного между осями координат, постоянна и равна a.
12. Найти кривую $\mathbf{r}(t)$, описываемую уравнением $\mathbf{r}' = \omega \times \mathbf{r}$, где ω — постоянный вектор.
13. Описать кривые $\mathbf{r}(t)$, заданные уравнением $\mathbf{r}'' = -\frac{\lambda \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$, где $\lambda = \mathrm{const}$.
14. Доказать, что $\int_\gamma k(s)\, ds = 2\pi$, где $k(s)$ — кривизна замкнутой плоской выпуклой кривой γ, а s — натуральный параметр.
15. Доказать, что если между точками двух кривых γ и γ^* можно установить такое (гладкое) соответствие, что касательные в каждой паре соответствующих точек параллельны, то отношения кручения к кривизне в соответствующих точках равны.
16. Доказать утверждение: если между точками двух кривых установлено (гладкое) соответствие, при котором бинормали в соответствующих точках совпадают (как прямые), то эти кривые плоские.
17. Доказать, что если все нормальные плоскости к кривой проходят через фиксированную точку x_0, то эта кривая лежит на сфере с центром в точке x_0.

ГЕОМЕТРИЯ НА СФЕРЕ И ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

1. Обозначим через G множество всех преобразований верхней полуплоскости ($\operatorname{Re} z > 0$, $z \in \mathbb{C}$) вида $z \to \frac{az+b}{cz+d}$, где a, b, c, d — вещественные числа, и $ad - bc > 0$.
   а) Показать, что любое преобразование из G является изометрией для метрики Лобачевского.
   б) Доказать, что G — это множество всех собственных (т.е. сохраняющие ориентацию) изометрий плоскости Лобачевского.
   в) Описать все изометрии плоскости Лобачевского.
2. Найти все изометрии стандартной метрики на двумерной сфере.
3. Доказать, что сфера, плоскость Лобачевского и обычная (евклидова) плоскость локально не изометричны.
4. Показать, что при стереографической проекции сферы из северного полюса на плоскость, проходящую через ее центр,
   а) сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр, переходят в прямые и окружности на плоскости;
   б) углы между кривыми сохраняются.
5. Выразить длину окружности и площадь круга через радиус на сфере и на плоскости Лобачевского.
6. Выразить площадь треугольника через углы на сфере и на плоскости Лобачевского.
7. Найти длину отрезка в метрике Лобачевского, соединяющего точки z и w верхней полуплоскости.
8. Доказать неравенство треугольника на плоскости Лобачевского.
9. Доказать, что в плоскости Лобачевского любые два треугольника с нулевыми углами можно перевести изометрией друг в друга.
10. Доказать, что любая собственная изометрия плоскости Лобачевского является композицией двух симметрий (относительно прямых).
11. Показать, что длина прямолинейного отрезка, соединяющего две любые фиксированные точки на плоскости Лобачевского, меньше длины любой другой кривой, соединяющей эти точки.
12. На плоскости Лобачевского (в модели $\{|z| < 1\}$) дана окружность с центром в точке $(1/2, 0)$ радиуса 2 (в метрике Лобачевского). Выписать ее уравнение в декартовых координатах.
13. Доказать теорему Пифагора для геометрии Лобачевского: если в треугольнике со сторонами a, b, c угол, противолежащий стороне c — прямой, то $\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \ \operatorname{ch} b$.

ТОПОЛОГИЯ И МНОГООБРАЗИЯ

1. Доказать, что следующие пространства попарно не гомеоморфны: прямая, отрезок, луч, окружность, пара пересекающихся прямых, плоскость, сфера.
2. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ гомеоморфно открытому диску $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$.
3. Пусть X — компактное топологическое пространство, Y — хаусдорфово топологическое пространство, $f\colon X \to Y$ — непрерывное взаимно-однозначное отображение. Доказать, что f — гомеоморфизм.
4. Доказать, что множество прямых на плоскости гомеоморфно листу Мёбиуса.
5. Доказать, что для многообразий понятия связности и линейной связности эквивалентны.
6. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ (при $n \neq m$) не диффеоморфны.
7. Доказать, что две гладкие структуры на топологическом пространстве совпадают тогда и только тогда, когда совпадают пространства гладких функций для этих гладких структур.
8. Пусть $M = \{f(\mathbf{x}) = \mathrm{const}\}$ — неособая поверхность уровня гладкой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ [*т.е.* $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \neq 0$ *для всех точек* $\mathbf{x} \in M$]. Доказать, что а) M — гладкое многообразие, б) M — ориентируемо.
9. Доказать, что n-мерное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ — гладкое многообразие. При каких n оно ориентируемо?
10. Определить, при каких значениях констант c_1 и c_2 подмножество $\mathbb{R}^6$ (с декартовыми координатами $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$), выделяемое уравнениями $x_1^2+x_2^2+x_3^2+y_1^2+y_2^2+y_3^2 = c_1$ и $x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3 = c_2$, является гладким многообразием (и найти его размерность).
11. Для каждого из следующих множеств матриц доказать, что оно является гладким ориентируемым многообразием, найти его размерность и число компонент связности, а также выяснить является ли оно компактным:
    а) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \{$вещественные 2×2-матрицы $A \mid \det A = 1\}$
    б) $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R}) = \{$вещественные 3×3-матрицы $A \mid AA^\top = E,\ \det A = 1\}$
    в) $\mathrm{SU}(2) = \{$комплексные 2×2-матрицы $A \mid A\overline{A}^\top = E\}$
    г) $\mathrm{SO}(1,1) = \{$вещественные 2×2-матрицы $A \mid AIA^\top = I\}$, где $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.
12. Доказать, что
    а) $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ гомеоморфно произведению двумерного диска на окружность,
    б) $\mathrm{SO}(3,\mathbb{R})$ гомеоморфно множеству единичных касательных векторов к двумерной сфере,
    в) $\mathrm{SU}(2)$ гомеоморфно 3-мерной сфере.
13. Определить, являются ли гладкими следующие функции на двумерной сфере (заданные в сферических координатах): $\cos\phi$, $\cos\theta$, $\sin\theta$, θ^2 [*Здесь: θ — угол, отсчитываемый от оси z, ϕ — долгота*].
14. Пусть $M = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$ — стандартная сфера в $\mathbb{R}^3$ с декартовыми координатами x, y, z. Рассмотрим касательный вектор ξ к M в точке $P = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, декартовы координаты которого равны $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$. Найти координаты вектора ξ (как касательного вектора к M) в сферической системе координат (θ, φ).
15. Доказать, что любое отображение f сферы S^2 в плоскость $\mathbb{R}^2$ имеет критические точки [*т.е. такие точки, в которых дифференциал отображения f вырожден*].
16. Доказать, что существует погружение двумерного тора с выброшенной точкой в плоскость.

ПОВЕРХНОСТИ

1. Найти главные кривизны и главные направления прямого кругового конуса.
2. Вычислить первую и вторую квадратичные формы следующей поверхности: $\mathbf{r}(u,v) = (a\cos u\cos v,\ a\cos u\sin v,\ c\sin u)$. Найти главные кривизны, среднюю кривизну и гауссову кривизну.
3. На поверхности $\{z = x^2\}$ в $\mathbb{R}^3(x,y,z)$ найти кривизну нормального сечения в точке $(2,2,4)$ в направлении касательной к кривой, задаваемой уравнениями $y = x^2/2$ и $z = x^2$.
4. Доказать, что при любой параметризации сферы ее первая квадратичная форма пропорциональна второй.
5. Показать, что винтовая поверхность $\mathbf{r}_1(\rho,v) = (\rho\cos v,\ \rho\sin v,\ \rho+v)$ и гиперболоид вращения $\mathbf{r}_2(r,\phi) = \left(r\cos\phi,\ r\sin\phi,\ \sqrt{r^2-1}\right)$ локально изометричны, причем изометрия устанавливается следующими уравнениями: $\phi = v + \operatorname{arctg}\rho$ и $r^2 = \rho^2+1$.
6. Показать, что прямой геликоид $\mathbf{r}(u,v) = (v\cos u,\ v\sin u,\ u)$ является минимальной поверхностью. Найти главные направления на геликоиде.
7. Пусть метрика на поверхности имеет вид $ds^2 = du^2 + (u^2+a^2)dv^2$. Определить, под каким углом пересекаются кривые $u+v=0$ и $u-v=0$.
8. Пусть на плоскости с координатами u, v задана метрика $ds^2 = du^2 + \operatorname{sh}^2 u\, dv^2$. Найти длину линии $u = v$ между точками $M_1(t_1,t_1)$ и $M_2(t_2,t_2)$.
9. Доказать утверждение: если все нормали к поверхности пересекают некоторую прямую, то поверхность является поверхностью вращения.
10. Точка поверхности называется *омбилической*, если главные кривизны в этой точке равны. Найти омбилические точки поверхности $xyz = a^3$.
11. Описать все минимальные поверхности вращения (т. е. поверхности вращения с нулевой средней кривизной).