Расстояние Громова–Хаусдорфа от симплексов до ультраметрических пространств

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

6 июля 2019 г.

Аннотация

В данной работе продолжено исследование расстояний Громова–Хаусдорфа между ограниченным метрическим пространством X и так называемым симплексом — метрическим пространством, у которого все ненулевые расстояния одинаковы. Получена новая формула для этого расстояния в случае, когда мощность симплекса не превосходит мощности пространства X, что позволило вывести точную формулу для расстояния от симплекса до произвольного конечного ультраметрического пространства.

Введение

Один из естественных и весьма распространенных математических подходов к сравнению тех или иных объектов состоит в определении функции расстояния между ними как меры их "несхожести", см. многочисленные примеры в [1]. Данная работа посвящена изучению геометрии класса всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, с помощью расстояния Громова–Хаусдорфа.

Еще в 1914 году Ф. Хаусдорф [2] определил неотрицательную симметричную функцию на парах непустых подмножеств метрического пространства X, равную точной нижней грани таких неотрицательных чисел r, что одно множество содержится в r-окрестности другого, и наоборот. Позднее Д. Эдвардс [3] и, независимо, М. Громов [4] обобщили конструкцию Хаусдорфа на семейство всех компактных метрических пространств, используя их изометрические вложения во всевозможные объемлющие пространства, см. определение ниже. Полученная функция называется расстоянием Громова–Хаусдорфа, а соответствующее метрическое пространство $\mathcal{M}$ метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, — пространством Громова–Хаусдорфа. Геометрия этого пространства оказалась довольно причудливой и активно изучается специалистами, в том числе потому, что "пространство всех пространств" имеет целый ряд очевидных приложений. Хорошо известно, что $\mathcal{M}$ — линейно связное, полное, сепарабельное, геодезическое метрическое пространство, не являющееся ограниченно компактным. Подробное введение в геометрию пространства Громова–Хаусдорфа можно найти в [8, гл. 7] или в [9].

Задача вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа между двумя конкретными пространствами весьма непроста. В данной работе авторы продолжают изучать эту задачу в частном случае, когда одно из рассматриваемых пространств является так называемым симплексом — метрическим пространством с единственным ненулевым расстоянием. Этот случай оказывается особенно интересным в силу ряда причин: расстояния до симплексов позволяют, в случае конечного метрического пространства X, восстановить длины ребер минимального остовного дерева на X, см. [13]; они полезны при исследовании группы изометрий пространства Громова–Хаусдорфа [10]; в терминах этих расстояний решается обобщенная проблема Борсука [6].

В работе [7] были вычислены расстояния от конечных симплексов до компактных метрических пространств в ряде частных случаев. Позднее эти результаты были обобщены на случай произвольных ограниченных метрических пространств, см. работу [5]. Был определен ряд дополнительных характеристик последних, в терминах которых удалось или выписать точные формулы для расстояния Громова–Хаусдорфа до произвольных симплексов, или дать точные верхние и нижние оценки этих расстояний.

В настоящей работе формулы из [5] для расстояния от симплекса до произвольного ограниченного пространства X получили геометрическую интерпретацию, что позволило переписать их в более удобном виде в случае симплексов, мощность которых не превосходит мощности пространства X, см. теорему 2.5. В качестве приложения удалось вывести точные формулы для расстояний от симплексов до любого конечного ультраметрического пространства, см. теорему 3.3. (Напомним, что метрическое пространство называется ультраметрическим, если образованный любыми его тремя точками треугольник является равнобедренным, причем "основание" не превосходит "боковых сторон", см. определение ниже). Также получен критерий того, что конечное метрическое пространство является ультраметрическим, который формулируется в терминах минимальных остовных деревьев (Теорема 3.1).

Работа частично подержана Программой Президента РФ поддержки ведущих научных школ России (Проект НШ–6399.2018.1, Соглашение 075–02–2018–867), РФФИ, Проект 19-01-00775-а, а также Программой поддержки научных школ МГУ.

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество. Через $\#X$ будем обозначать *мощность* множества X.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Если $A, B \subset X$ — непустые подмножества, то положим $|AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}$. Если $A = \{a\}$, то вместо $\bigl|\{a\}B\bigr| = |B\{a\}|$ будем писать $|aB| = |Ba|$.

Для каждой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \cup_{a\in A} U_r(a)$.

1.1 Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

Для непустых A, $B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\bigr\} = \max\{\sup_{a\in A}|aB|,\ \sup_{b\in B}|Ab|\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Хорошо известно [8], [9], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X, является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием $d_{GH}(X, Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y*

назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$. Хорошо известно [8], [9], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой.

Метрическое пространство X назовем *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Симплекс, в котором ненулевые расстояния равны $\lambda > 0$, обозначим через $\lambda\Delta$. При $\lambda = 1$ пространство $\lambda\Delta$ будем для краткости обозначать через Δ.

Предложение 1.1 ([8], [9])**.** *Пусть X — произвольное метрическое пространство, а Δ — одноточечное пространство. Тогда для любого $\lambda > 0$ имеем $d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$.*

Теорема 1.2 ([5])**.** *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $\#X < \#\lambda\Delta$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Пусть X — произвольное множество и m — кардинальное число, не превосходящее $\#X$. Через $\mathcal{D}_m(X)$ обозначим семейство всевозможных разбиений множества X на m частей.

Пусть теперь X — метрическое пространство. Тогда для каждого $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ положим

$$\operatorname{diam} D = \sup_{i\in I} \operatorname{diam} X_i.$$

Далее, для любых непустых $A, B \subset X$ пусть

$$|AB| = \inf\bigl\{|ab| : (a, b) \in A \times B\bigr\},$$

и для каждого $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ определим

$$\alpha(D) = \inf\bigl\{|X_iX_j| : i \ne j\bigr\}.$$

Предложение 1.3. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Для произвольного метрического пространства X положим

$$\varepsilon(X) = \inf\bigl\{|xy| : x, y \in X,\, x \ne y\bigr\}.$$

Отметим, что $\varepsilon(X) \le \operatorname{diam} X$, причем для ограниченного X равенство достигается, если и только если X является симплексом.

Теорема 1.4 ([7])**.** *Пусть X — конечное метрическое пространство и $\#\lambda\Delta = \#X$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\bigl\{\lambda - \varepsilon(X),\, \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}.$$

Для произвольного метрического пространства X, $m = \#X$, положим

$$\alpha_m^-(X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \alpha(D), \qquad \alpha_m(X) = \alpha_m^+(X) = \sup_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \alpha(D),$$

$$d_m(X) = d_m^-(X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \operatorname{diam} D, \qquad d_m^+(X) = \sup_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \operatorname{diam} D.$$

Замечание 1.5. Мы ввели упрощенные переобозначения для $\alpha_m^+(X)$ и $d_m^-(X)$ потому, что эти величины, в отличии от их “близнецов” $\alpha_m^-(X)$ и $d_m^+(X)$, встречаются в приводимых ниже формулах намного чаще.

Теорема 1.6 ([5])**.** *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \le \#X$.*

(1) *Если $2d_m^+(X) > \operatorname{diam} X - \alpha_m(X)$, то положим*

$$a = \max\Big\{\alpha_m^-(X) + d_m(X),\, \frac{\operatorname{diam} X + \alpha_m^-(X)}{2},\, \operatorname{diam} X - d_m^+(X)\Big\},$$
$$b = \alpha_m(X) + d_m^+(X),$$

тогда $a < b$ и

(a) *при $\lambda \le a$ имеем $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\operatorname{diam} X - \lambda,\, d_m(X)\}$;*

(b) *при $a \le \lambda \le b$ имеем*

$$\max\{\operatorname{diam} X - \lambda,\, d_m(X),\, \lambda - \alpha_m(X)\} \le 2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \le \min\{d_m^+(X),\, \lambda - \alpha_m^-(X)\};$$

(c) *при $\lambda \ge b$ имеем $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \lambda - \alpha_m(X)$.*

(2) *Если же $2d_m^+(X) \le \operatorname{diam} X - \alpha_m(X)$, то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\operatorname{diam} X - \lambda,\, \lambda - \alpha_m(X)\}.$$

Оказывается, для вычисления расстояний Громова–Хаусдорфа между конечными метрическими пространствами важную роль играют минимальные остовные деревья. Это связано с тем, что длины ребер этих деревьев тесно связаны с геометрическими характеристиками различных разбиений объемлющего пространства.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный (простой) граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Если V — метрическое пространство, то определены *длины $|e|$ ребер $e = vw$ графа G* как расстояния $|vw|$ между концами v и w этих ребер, а также *длина $|G|$ графа G* как сумма длин всех его ребер.

Пусть X — конечное метрическое пространство. Определим число $\operatorname{mst}(X)$, положив его равным длине кратчайшего дерева среди деревьев вида (X, E). Полученная величина называется *длиной минимального остовного дерева на X*; дерево $G = (X, E)$, для которого $|G| = \operatorname{mst}(X)$, называется *минимальным остовным деревом на X*. Заметим, что для любого X на нем всегда существует минимальное остовное дерево. Множество всех минимальных остовных деревьев на X обозначим через $\operatorname{MST}(X)$.

Отметим, что минимальное остовное дерево, вообще говоря, определено неоднозначно. Для $G \in \operatorname{MST}(X)$ через $\sigma(G)$ обозначим вектор длин ребер дерева G, упорядоченных по убыванию.

Предложение 1.7. *Для любых $G_1, G_2 \in \operatorname{MST}(X)$ имеем $\sigma(G_1) = \sigma(G_2)$.*

Предложение 1.7 обосновывает следующее определение.

Определение 1.8. Для любого конечного метрического пространства X через $\sigma(X)$ обозначим вектор $\sigma(G)$ для произвольного $G \in \operatorname{MST}(X)$ и назовем этот вектор mst-*спектром пространства X*.

2 Расстояние Громова–Хаусдорфа до симплексов в терминах экстремальных точек

В соответствии с предложением 1.3, чтобы для данного ограниченного метрического пространства X и кардинального числа $m \le \#X$ точно вычислить функцию $g_m(\lambda) = d_{GH}(\lambda\Delta, X)$, достаточно знать все пары $\big(\alpha(D), \operatorname{diam} D\big)$, $D \in \mathcal{D}_m(X)$. Будем рассматривать эти пары как точки плоскости, на которой фиксированы стандартные координаты (α, d). Множество всех таких пар обозначим через $\mathcal{AD}_m(X) \subset \mathbb{R}^2$, а также положим $h_{\alpha,d}(\lambda) := \max\{d,\ \lambda - \alpha\}$. Перепишем предложением 1.3 в новых обозначения, воспользовавшись тем, что функцию $\operatorname{diam} X - \lambda$ не зависит от разбиения D, и поменяв местами inf и max.

Следствие 2.1. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\Big\{\operatorname{diam} X - \lambda,\ \inf_{(\alpha,d)\in\mathcal{AD}_m(X)} h_{\alpha,d}(\lambda)\Big\}.$$

В дальнейшем нам будет удобней работать не с множеством $\mathcal{AD}_m(X)$, а с его замыканием $\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$. Отметим, что как $\mathcal{AD}_m(X)$, так и $\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$ лежат в параллелограмме, образованном пересечением двух полос: горизонтальной полосы между прямыми $y = d_m^-(X)$ и $y = d_m^+(X)$, и наклонной полосы между прямыми $y = \lambda - \alpha_m^-(X)$ и $y = \lambda - \alpha_m^+(X)$. Таким образом, оба этих множества ограничены, а $\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$ еще и компактно.

Положим

$$F(\lambda) = \inf_{(\alpha,d)\in\mathcal{AD}_m(X)} h_{\alpha,d}(\lambda), \quad \bar F(\lambda) = \inf_{(\alpha,d)\in\overline{\mathcal{AD}}_m(X)} h_{\alpha,d}(\lambda). \tag{1}$$

Так как при каждом фиксированном λ величина $h_{\alpha,d}(\lambda)$ непрерывно зависит от α и d, то $F(\lambda) = \bar F(\lambda)$, откуда получаем следующий результат.

Следствие 2.2. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\Big\{\operatorname{diam} X - \lambda,\ \inf_{(\alpha,d)\in\overline{\mathcal{AD}}_m(X)} h_{\alpha,d}(\lambda)\Big\}.$$

Далее, заметим, что для любой точки $(\alpha, d) \in \mathbb{R}^2$ график функции $y = h_{\alpha,d}(\lambda)$ представляет собой угол с вершиной в точке $T_{\alpha,d} = (\alpha + d, d)$, одна из сторон которого противонаправлена оси абсцисс, а другая сонаправлена с биссектрисой первого квадранта. Заметим, что для любых (α, d), (α', d') таких, что $\alpha \ge \alpha'$ и $d \le d'$ имеем $h_{\alpha,d}(\lambda) \le h_{\alpha',d'}(\lambda)$ при всех λ, таким образом, при вычислении $d_{GH}(\lambda\Delta, X)$ такие $(\alpha', d') \in \overline{\mathcal{AD}}_m(X)$, для которых существует $(\alpha, d) \in \overline{\mathcal{AD}}_m(X)$, $\alpha \ge \alpha'$, $d \le d'$, можно не учитывать.

Точку $(\alpha, d) \in \overline{\mathcal{AD}}_m(X)$ назовем *экстремальной*, если для нее не существует отличная от нее точка $(\alpha', d') \in \overline{\mathcal{AD}}_m(X)$, для которой $\alpha' \ge \alpha$ и $d' \le d$. Множество всех экстремальных точек из $\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$ обозначим через $\operatorname{Ext}_m(X)$.

Замечание 2.3. Определим на плоскости отношение частичного порядка, положив $(\alpha, d) \le (\alpha', d')$, если и только если $\alpha \ge \alpha'$ и $d \le d'$. Тогда при каждом фиксированном λ отображение $(\alpha, d) \mapsto h_{\alpha,d}(\lambda)$ монотонно. Точка $(\alpha, d) \in \overline{\mathcal{AD}}_m(X)$ экстремальна, если и только если она является минимальным элементом множества $\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$ относительно этого порядка.

Предложение 2.4. *Множество* $\mathrm{Ext}_m(X)$ *непусто.*

Доказательство. Как было отмечено выше, множество $\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$ компактно, поэтому непрерывная функция $\pi_2\colon \overline{\mathcal{AD}}_m(X)\to\mathbb{R}$, $\pi_2\colon(\alpha,d)\mapsto d$, принимает наименьшее значение (равное $d_m(X)$). Следовательно, множество $M=\big\{(\alpha,d)\in\overline{\mathcal{AD}}_m(X):\pi_2(\alpha,d)=d_m(X)\big\}$ непусто и, в силу непрерывности функции π_2, — компактно, поэтому функция $\pi_1\colon M\to\mathbb{R}$, $\pi_1\colon(\alpha,d)\mapsto\alpha$, принимает наибольшее значение в некоторой точке $\big(\alpha_0,d_m(X)\big)\in\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$. Ясно, что эта точка экстремальна. $\square$

Теорема 2.5. *Пусть* X *— произвольное ограниченное метрическое пространство и* $m=\#\lambda\Delta\le\#X$. *Тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta,X)=\max\big\{\operatorname{diam}X-\lambda,\inf_{(\alpha,d)\in\mathrm{Ext}_m(X)}h_{\alpha,d}(\lambda)\big\}.$$

Доказательство. Пусть $\bar F(\lambda)$ задается формулой из (1). Положим также

$$H(\lambda)=\inf_{(\alpha,d)\in\mathrm{Ext}_m(X)}h_{\alpha,d}(\lambda).$$

Так как $\mathrm{Ext}_m(X)\subset\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$, то при всех λ имеем $H(\lambda)\ge\bar F(\lambda)$. Докажем обратное неравенство.

Фиксируем произвольное λ. По определению функции $\bar F(\lambda)$, существует последовательность $(\alpha_i,d_i)\in\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$ такая, что $h_{\alpha_i,d_i}(\lambda)\to\bar F(\lambda)$. В силу компактности множества $\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$, переходя, если необходимо, к подпоследовательности, будет сразу считать, что последовательность (α_i,d_i) сходится к некоторому $(\alpha',d')\in\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$. Так как $h_{\alpha,d}(\lambda)$ непрерывна по α и d, имеем $h_{\alpha',d'}(\lambda)=\bar F(\lambda)$.

Положим

$$\overline{\mathcal{AD}}_m(X,\lambda)=\big\{(\alpha',d')\in\overline{\mathcal{AD}}_m(X):h_{\alpha',d'}(\lambda)=\bar F(\lambda)\big\}.$$

Как было только что показано, множество $\overline{\mathcal{AD}}_m(X,\lambda)$ непусто. Докажем, что это множество содержит экстремальную точку.

Из непрерывности функции $h_{\alpha,d}(\lambda)$ по α и d вытекает, что $\overline{\mathcal{AD}}_m(X,\lambda)$ — замкнутое и, значит, компактное множество. Положим $d_0=\inf\big\{d:(\alpha,d)\in\overline{\mathcal{AD}}_m(X,\lambda)\big\}$. Из компактности множества $\overline{\mathcal{AD}}_m(X,\lambda)$ вытекает, что существует α, для которого $(\alpha,d_0)\in\overline{\mathcal{AD}}_m(X,\lambda)$.

Обозначим через $\overline{\mathcal{AD}}_m(X,\lambda,d_0)$ множество всех таких пар (α,d_0). Как было показано, это множество непусто. Из непрерывности функции $h_{\alpha,d}(\lambda)$ по α вытекает, что $\overline{\mathcal{AD}}_m(X,\lambda,d_0)$ — компакт. Положим $\alpha_0=\sup\{\alpha:(\alpha,d_0)\in\overline{\mathcal{AD}}_m(X,\lambda,d_0)\}$. В силу компактности множества $\overline{\mathcal{AD}}_m(X,\lambda,d_0)$, точка (α_0,d_0) лежит в $\overline{\mathcal{AD}}_m(X,\lambda,d_0)\subset\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$. Однако эта точка экстремальная, иначе получаем противоречие с определением d_0 и α_0. Но отсюда вытекает, что $H(\lambda)\le\bar F(\lambda)$, доказательство закончено. $\square$

3 Расстояние Громова–Хаусдорфа от симплексов до ультраметрических пространств

Покажем теперь, как из полученных выше результатов можно вывести конкретные формулы для расстояния Громова–Хаусдорфа в ряде частных случаев.

Начнем с *ультраметрических* пространств, т.е. таких пространств X, в которых функция расстояния удовлетворяет усиленному неравенству треугольника:

$$|xz| \le \max\bigl\{|xy|,\,|yz|\bigr\}$$

для любых $x, y, z \in X$. Из этого неравенства следует аналогичное “неравенство многоугольника”, а именно, для произвольного набора точек $x = x_1, x_2, \ldots, x_k$ пространства X справедливо неравенство

$$|x_1x_k| \le \max\bigl\{|x_1x_2|, |x_2x_3|, \ldots, |x_{k-1}x_k|\bigr\}.$$

Теорема 3.1. *Пусть X — конечное метрическое пространство и G — минимальное остовное дерево для X. Для любых различных $v, w \in X$ через γ_{vw} обозначим единственный путь в G, соединяющий v и w. Тогда X — ультраметрическое пространство, если и только если для любых различных $v, w \in X$ выполняется*

$$|vw| = \max_{e\in E(\gamma_{vw})} |e|. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть сначала X — ультраметрическое пространство. Выберем произвольные различные $v, w \in X$, тогда, если $vw \in E(G)$, то формула (2) имеет место. Пусть теперь v и w не смежны. Так как G — минимальное остовное дерево, то $|vw| \ge \max_{e\in E(\gamma_{vw})} |e|$. Обратное неравенство — это “неравенства многоугольника” в ультраметрическом пространстве.

Обратно, предположим, что формула (2) имеет место для любых различных $v, w \in E(G)$. Выберем произвольные три попарно различные точки $u, v, w \in X$. Если одна из них, скажем v, лежит на пути в G, соединяющем две другие точки, т.е. на пути $\gamma_{u,w}$, то

$$|uw| = \max_{e\in E(\gamma_{uw})} |e| = \max_{e\in E(\gamma_{uv})\cup E(\gamma_{vw})} |e| = \max\bigl\{|uv|, |vw|\bigr\},$$

поэтому “треугольник” uvw — равнобедренный, причем “основание” не длиннее “боковой стороны”.

Пусть теперь ни одна из рассматриваемых точек не лежит на пути в G между двумя другими. Это означает, что существует отличная от них точка $x \in X$, через которую проходят все три пути в G, соединяющие попарно вершины u, v, w. Следовательно, каждый из этих трех путей составлен из пары путей, соединяющих x и u, v, w. Имеем

$$|uw| = \max_{e\in E(\gamma_{uw})} |e| = \max_{e\in E(\gamma_{ux})\cup E(\gamma_{xw})} |e| \le \max_{e\in E(\gamma_{ux})\cup E(\gamma_{xw})\cup E(\gamma_{xv})} |e| = \max\bigl\{|uv|, |vw|\bigr\},$$

что и требовалось. $\square$

Из теоремы 3.1 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 3.2. *Пусть X — конечное ультраметрическое пространство, состоящее из n точек, и $\sigma(X) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1})$ — его* mst*-спектр. Тогда для любых различных $v, w \in X$ имеем $|vw| \in \sigma(X)$. В частности,* $\operatorname{diam} X = \sigma_1$.

Теорема 3.3. *Пусть X — конечное ультраметрическое пространство, состоящее из n точек, и $\sigma(X) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1})$ — его* mst*-спектр. Тогда для любого кардинального числа $m > 0$ имеем*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \begin{cases} \sigma_1 & \textit{при } m = 1,\\ \max\{\sigma_1 - \lambda,\, \sigma_m,\, \lambda - \sigma_{m-1}\} & \textit{при } 1 < m < n,\\ \max\{\sigma_1 - \lambda,\, \lambda - \sigma_{n-1}\} & \textit{при } m = n,\\ \max\{\sigma_1 - \lambda,\, \lambda\} & \textit{при } m > n. \end{cases}$$

Доказательство. С учетом следствия 3.2, первая формула вытекает из предложения 1.1, третья — из теоремы 1.4, четвертая — из теоремы 1.2. Докажем вторую формулу.

Для этого мы используем теорему 2.5, показав, что множество $\mathrm{Ext}_m(X)$ состоит из одной точки, а именно, из (σ_{m-1},σ_m). Другими словами, (σ_{m-1},σ_m) является наименьшим элементом множества $\overline{\mathcal{AD}_m}(X)$ относительно порядка, определенного в замечании 2.3.

Пусть G — произвольное минимальное остовное дерево для X, а $e_1,\dots,e_{n-1}$ — его ребра, причем $|e_i|=\sigma_i$.

Выкинем из G ребра $e_1,\dots,e_{m-1}$, тогда G распадется на m деревьев $G_1,\dots,G_m$. Положим $X_i=V(G_i)$, тогда $D=\{X_i\}_{i=1}^m\in\mathcal{D}_m(X)$. По теореме 3.1, диаметры всех X_i не превосходят $|e_m|$, причем одно из G_i содержит e_m, так что диаметр соответствующего ему X_i равен $|e_m|$. Таким образом, $\operatorname{diam} D=|e_m|=\sigma_m$.

С другой стороны, для любых $x_i\in X_i$ и $x_j\in X_j$, $i\ne j$, путь γ в G, соединяющий x_i и x_j, проходит через некоторые ребра из множества $\{e_i\}_{i=1}^{m-1}$, поэтому, в силу теоремы 3.1, имеем $|x_ix_j|\ge|e_{m-1}|$. Кроме того, существуют некоторые X_i и X_j, которые соединены ребром e_{m-1}, поэтому $|X_iX_j|=|e_{m-1}|$ и, значим, $\alpha(D)=|e_{m-1}|=\sigma_{m-1}$.

Покажем теперь, что точка (σ_{m-1},σ_m) экстремальна, причем никакая другая, отличная от нее точка $\big(\alpha(D'),\operatorname{diam} D'\big)$, $D'\in\mathcal{D}_m(X)$, экстремальной не является.

Выберем произвольное $D'=\{Y_i\}_{i=1}^m\in\mathcal{D}_m(X)$ и построим граф G', выбрав в качестве вершин множества Y_i, а в качестве ребер — те ребра из $E(G)$, которые соединяют разные множества Y_i и Y_j. Тогда G' — связный граф (возможно, с кратными ребрами), поэтому он содержит не менее $(m-1)$-го ребра e_i. Но тогда кратчайшее из ребер графа G' имеет длину не большую, чем $|e_{m-1}|$, поэтому $\alpha(D')\le|e_{m-1}|$.

Осталось показать, что $\operatorname{diam} D'\ge|e_m|$. Предположим противное, тогда ни одно из ребер e_i, $i\le m$, не соединяет точки, лежащие в одном и том же Y_j. Это означает, в частности, что все такие e_i соединяют разные Y_j и Y_k, т.е. являются ребрами графа G'. Таким образом, связный граф G' содержит некоторый цикл C. Обозначим через $Y_{i_1},\dots,Y_{i_k},Y_{i_{k+1}}=Y_{i_1}$ последовательные вершины цикла C, и пусть e_{i_p} — ребро цикла C, соединяющее Y_{i_p} и $Y_{i_{p+1}}$. Положим $e_{i_p}=v_pw_p$, где $v_p\in Y_{i_p}$, $w_p\in Y_{i_{p+1}}$.

Пусть γ_p, $p=1,\dots,k-1$, обозначает путь в дереве G, соединяющий w_p и v_{p+1}. Так как обе вершины лежат в $Y_{i_{p+1}}$, и, по предположению, $\operatorname{diam} Y_{i_{p+1}}<|e_m|$, то, в силу теоремы 3.1, путь γ_p не проходит ни через одно ребро из множества $\{e_i\}_{i=1}^m$. Следовательно, проходя последовательно $e_{i_1},\gamma_1,e_{i_2},\gamma_2,\dots,\gamma_{k-1},e_{i_k}$, мы получим путь в G, соединяющий вершины v_1 и w_k, лежащие в Y_{i_1}. Но тогда, по теореме 3.1, $\operatorname{diam} Y_{i_1}\ge|v_1w_k|\ge|e_m|$, противоречие. $\square$

Список литературы

[1] Deza E., Deza M.M., *Encyclopedia of Distances*, 4th edition, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2016.

[2] Hausdorff F., *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig, Veit, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949].

[3] Edwards D., “The Structure of Superspace”, // In: *Studies in Topology*, ed. by Stavrakas N.M. and Allen K.R., New York, London, San Francisco, Academic Press, Inc., 1975.

[4] Gromov M., “Groups of Polynomial growth and Expanding Maps” // in: Publications Mathematiques I.H.E.S., **53**, 1981.

[5] Grigor'ev D.S., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., "Gromov–Hausdorff distance to simplexes" // ArXiv e-prints, `arXiv:1906.09644`, 2019; Чебышевский сборник, в печати.

[6] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., "Solution to Generalized Borsuk Problem in Terms of the Gromov–Hausdorff Distances to Simplexes" // ArXiv e-prints, `arXiv:1906.10574`, 2019.

[7] Iliadis S., Ivanov A., Tuzhilin A., "Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes" // ArXiv e-prints, `arXiv:1607.06655`, 2016.

[8] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В., *Курс метрической геометрии*. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[9] Иванов А.О., Тужилин А.А., *Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов*. Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, Москва, 2017.

[10] Ivanov A. O., Tuzhilin A. A., "Isometry group of Gromov–Hausdorff space" // Matematicki Vesnik, Vol. 71 (1–2), 123–154, 2019; `arXiv:1806.02100`, 2018.

[11] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A., "Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings" // ArXiv e-prints, `arXiv: 1604.06116`, 2016.

[12] Ivanov A., Tuzhilin A., "Geometry of Gromov–Hausdorff metric space" // Bulletin de l'Academie Internationale CONCORDE. no. 3, pp. 47–57, 2017.

[13] Tuzhilin A.A., "Calculation of Minimum Spanning Tree Edges Lengths using Gromov–Hausdorff Distance" // ArXiv e-prints, `arXiv:1605.01566`, 2016.