Расстояние Громова–Хаусдорфа от симплексов до пространств с двумя расстояниями

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

12 июля 2019 г.

Аннотация

В данной работе вычислено расстояние Громова–Хаусдорфа от произвольного симплекса (метрического пространства, все ненулевые расстояния в котором одинаковы) до конечного метрического пространства X, ненулевые расстояния в котором принимают два разных значения. В качестве следствия получено полное решение обобщенной проблемы Борсука для таких пространств X, а также выведены формулы для числа кликового покрытия и хроматического числа произвольного графа G в терминах расстояния до симплекса от построенного по G метрического пространства с двумя расстояниями.

Введение

Конечные метрические пространства возникают в самых различных областях математики, играют важную роль в приложениях, являются источником интересных задач и предметом активного изучения специалистов, см. многочисленные примеры в [1]. Важный класс таких пространств образуют те, у которых расстояние между различными точками принимает только два значения (для краткости мы будем называть такие пространства пространствами с двумя расстояниями). Особенно интенсивно исследуются конечные подмножества евклидова пространства, обладающие этим свойством. Дело в том, что они тесно связаны с такими популярными темами как сферические коды и сферический дизайн, см. например [2], а также с проблемой Борсука. Остановимся на ней более подробно.

Напомним, что в еще 1933 году Борсук [3], [4] высказал гипотезу, что каждое ограниченное подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, состоящее более чем из одной точки, можно разбить на $k \le n+1$ частей меньшего диаметра, и доказал ее для $n = 2$. Перкаль [5] распространил результат на случай $n = 3$. Также ряд существенных продвижений был получен 40–50е годы. Отметим работы Хадвигера [6], [7], доказавшего гипотезу для выпуклых подмножеств. Но в 1993 году Кан и Калаи [8] неожиданно построили контрпример в размерности $n = 1325$, а также показали, что гипотеза не верна при всех $n > 2014$. Эта оценка последовательно улучшалась в работах Райгородского, $n \ge 561$, Хинрихса и Рихтера, $n \ge 298$, Бондаренко, $n \ge 65$, и Йенриха, $n \ge 64$, см. обзор [9]. Работы Бонадренко [10] и Йенриха [11] как раз основаны на подмножествах стандартной сферы, расстояния между различными точками которых принимают только два различных значения.

Недавно авторы обнаружили [12], что обобщенную проблему Борсука (в которой тот же вопрос ставится для произвольного ограниченного метрического пространства X, а не для подмножества $\mathbb{R}^n$) можно решить, вычислив расстояние Громова–Хаусдорфа от X до так называемых симплексов — метрических пространств, у которых все ненулевые расстояния одинаковы (см. теорему 2.12).

Напомним, что Д. Эдвардс [13] и, независимо, М. Громов [14] определили функцию расстояния между компактными метрическими пространствами, обобщив конструкцию Хаусдорфа и используя изометрические вложения во всевозможные объемлющие пространства, см. определение ниже. Подробное введение в геометрию пространства Громова–Хаусдорфа можно найти в [15, гл. 7] или в [16].

Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа между двумя конкретными пространствами — нетривиальная задача. В работе [17] были вычислены расстояния от конечных симплексов до компактных метрических пространств в ряде частных случаев. Позднее эти результаты были обобщены на случай произвольных ограниченных метрических пространств, см. работу [18]. Был определен ряд дополнительных характеристик последних, в терминах которых удалось или выписать точные формулы для расстояния Громова–Хаусдорфа до произвольных симплексов, или дать точные верхние и нижние оценки этих расстояний. Именно это позволило обнаружить связь между расстояниями до симплексов и проблемой Борсука, см. [12]. Затем, с помощью геометрической интерпретации, формулы из [18] удалось переписать в более удобном виде, что дало возможность вычислить расстояния от симплексов до произвольного ультраметрического пространства [19].

В данной работе с помощью формул из [19] вычислены расстояния до конечных метрических пространств с двумя расстояниями (Теорема 2.11). Это позволило получить полное решение проблемы Борсука для таких пространств. Ответ (Следствие 2.13) дан в терминах числа кликового покрытия графа G с множеством вершин X и ребрами, состоящими из всех пар точек из X, находящихся на меньшем из двух ненулевых расстояний. Отметим, что проверить гипотезу Борсука для таких пространств предложил Дэвид Лерман (David Larman) в 70-е годы.

Кроме того, эта же техника позволяет вычислить число кликового покрытия и хроматическое число произвольного простого графа в терминах расстояния Громова–Хаусдорфа до построенного по этому графу конечного метрического пространства с двумя расстояниями, следствия 2.15 и 2.14

Работа частично подержана Программой Президента РФ поддержки ведущих научных школ России (Проект НШ–6399.2018.1, Соглашение 075–02–2018–867), РФФИ, Проект 19-01-00775-а, а также Программой поддержки научных школ МГУ.

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество. Через $\#X$ будем обозначать *мощность* множества X.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Если $A, B \subset X$ — непустые подмножества, то положим $|AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}$. Если $A = \{a\}$, то вместо $\bigl|\{a\}B\bigr| = |B\{a\}|$ будем писать $|aB| = |Ba|$.

Для каждой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \cup_{a\in A} U_r(a)$.

1.1 Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

Для непустых A, $B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\bigr\} = \max\{\sup_{a\in A}|aB|,\ \sup_{b\in B}|Ab|\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Хорошо известно [15], [16], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X, является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием $d_{GH}(X, Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y* назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$. Хорошо известно [15], [16], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой.

Метрическое пространство X назовем *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Симплекс, в котором ненулевые расстояния равны $\lambda > 0$, обозначим через $\lambda\Delta$.

Предложение 1.1 ([15], [16]). *Пусть X — произвольное метрическое пространство, а Δ — одноточечное пространство. Тогда для любого $\lambda > 0$ имеем $d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$.*

Теорема 1.2 ([18]). *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $\#X < \#\lambda\Delta$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\operatorname{diam} X - \lambda,\ \lambda\}.$$

Пусть X — произвольное множество и m — кардинальное число, не превосходящее $\#X$. Через $\mathcal{D}_m(X)$ обозначим семейство всевозможных разбиений множества X на m частей.

Пусть теперь X — метрическое пространство. Тогда для каждого $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ положим

$$\operatorname{diam} D = \sup_{i\in I}\operatorname{diam} X_i.$$

Далее, для любых непустых $A, B \subset X$ пусть

$$|AB| = \inf\bigl\{|ab| : (a,b) \in A \times B\bigr\},$$

и для каждого $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ определим

$$\alpha(D) = \inf\bigl\{|X_iX_j| : i \ne j\bigr\}.$$

Рассмотрим на плоскости с координатами (α, d) множество

$$\mathcal{AD}_m(X) = \Bigl\{\bigl(\alpha(D), \operatorname{diam} D\bigr) : D \in \mathcal{D}_m(X)\Bigr\}$$

и через $\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$ обозначим замыкание этого множества. Точку $(\alpha, d) \in \overline{\mathcal{AD}}_m(X)$ назовем *экстремальной*, если для нее не существует отличная от нее точка $(\alpha', d') \in \overline{\mathcal{AD}}_m(X)$, для которой $\alpha' \ge \alpha$ и $d' \le d$. Множество всех экстремальных точек из $\overline{\mathcal{AD}}_m(X)$ обозначим через $\operatorname{Ext}_m(X)$. Также положим $h_{\alpha,d}(\lambda) = \max\{d,\ \lambda - \alpha\}$.

Теорема 1.3 ([19]). *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Тогда множество $\operatorname{Ext}_m(X)$ непусто и*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\bigl\{\operatorname{diam} X - \lambda,\ \inf_{(\alpha,d)\in\operatorname{Ext}_m(X)} h_{\alpha,d}(\lambda)\bigr\}.$$

2 Расстояние Громова–Хаусдорфа от симплексов до пространств с двумя ненулевыми расстояниями

Покажем теперь, как из теорем 1.2 и 1.3 можно вывести формулы для расстояния Громова–Хаусдорфа от симплексов до пространств с двумя ненулевыми расстояниями.

На протяжении этого параграфа X обозначает конечное метрическое пространство, $n = \#X$, с двумя разными ненулевыми расстояниями $a < b$, и $m = \#\lambda\Delta$. Ясно, что $\operatorname{diam} X = b$.

Теорема 1.2 приводит к следующему результату.

Следствие 2.1. *Пусть и $m > n$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{b - \lambda,\, \lambda\}.$$

Если $m = n$, то $\mathcal{D}_m(X)$ состоит ровно из одного элемента D, а именно, из разбиение X на одноточечные подмножества. Таким образом, $\operatorname{diam} D = 0$ и $\alpha(D) = a$. Из теоремы 1.3 мгновенно заключаем.

Следствие 2.2. *Пусть $m = n$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{b - \lambda,\, \lambda - a\}.$$

Еще один тривиальный случай получается при $m = 1$ и вытекает из предложения 1.1.

Следствие 2.3. *Пусть $m = 1$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = b.$$

Нам осталось разобрать случай $1 < m < n$. Здесь для каждого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ величины $\operatorname{diam} D$ и $\alpha(D)$ принимают одно из значений a и b, поэтому в этом случае множества $\operatorname{Ext}_m(X) \subset \overline{\mathcal{AD}}_m(X) = \mathcal{AD}_m(X)$ содержатся в четырехточечном множестве. Следующая лемма непосредственно вытекает из определения экстремальных точек.

Лемма 2.4. *При $1 < m < n$, возможны следующие варианты*:

(1) *если $(b, a) \in \mathcal{AD}_m(X)$, то $\operatorname{Ext}_m(X) = \big\{(b, a)\big\}$;*

(2) *если же $(b, a) \notin \mathcal{AD}_m(X)$, то имеются следующие возможности*:

  (a) *если $\#\mathcal{AD}_m(X) = 3$, то $\operatorname{Ext}_m(X) = \mathcal{AD}_m(X) = \big\{(a, a),\, (b, b)\big\}$;*

  (b) *если $\mathcal{AD}_m(X) = \big\{(a, a),\, (b, b)\big\}$, то $\operatorname{Ext}_m(X) = \mathcal{AD}_m(X) = \big\{(a, a),\, (b, b)\big\}$;*

  (c) *если $\mathcal{AD}_m(X) = \big\{(a, a),\, (a, b)\big\}$, то $\operatorname{Ext}_m(X) = \big\{(a, a)\big\}$;*

  (d) *если $\mathcal{AD}_m(X) = \big\{(a, b),\, (b, b)\big\}$, то $\operatorname{Ext}_m(X) = \big\{(b, b)\big\}$;*

  (e) *если $\#\mathcal{AD}_m(X) = 1$, то $\operatorname{Ext}_m(X) = \mathcal{AD}_m(X)$.*

В частности, если для любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем

(1) $\operatorname{diam} D = b$ *и $(b, b) \in \mathcal{AD}_m(X)$, то $\operatorname{Ext}_m(X) = \big\{(b, b)\big\}$;*

(2) *$\alpha(D)=a$ и $(a,a)\in\mathcal{AD}_m(X)$, то* $\operatorname{Ext}_m(X)=\big\{(a,a)\big\}$.

Напомним, что *кликой* в произвольном простом графе H называется каждый его подграф, в котором всякие две вершины соединены ребром, т.е. который является полным графом. Отметим, что каждый одновершинный подграф также является кликой. Для удобства, множества вершин клики также будем называться *кликой*.

На множестве клик существует естественный порядок по включению, и, в силу сказанного выше, однозначно определенное семейство максимальных клик является *покрытием графа* H в том смысле, что объединение всех множеств вершин максимальных клик совпадает с множеством вершин $V(H)$ графа H.

Если не ограничиваться максимальными кликами, то, вообще говоря, также можно найти и другие семейства клик, покрывающие граф H. Одна из классических задач в теории графов — вычисление наименьшего возможного числа клик, покрывающего граф H. Это число называется *числом кликового покрытия* и иногда обозначается через $\theta(H)$. Легко видеть, что число $\theta(H)$ также равно наименьшему числу клик, множества вершин которых разбивают $V(H)$.

Другой популярной задачей является поиск наименьшего числа цветов, в которые можно покрасить вершины простого графа H так, чтобы смежные вершины были покрашены в разные цвета. Это число обозначается через $\gamma(H)$ и называется *хроматическим числом графа* H.

Для простого графа H через H' обозначим *двойственный* ему граф, т.е. граф имеющий то же самое множество вершин и дополнительное множество ребер (две вершины в H' соединены ребром, если и только если они не соединяются ребром в H).

Следующий факт хорошо известен.

Предложение 2.5. *Для любого простого графа H выполняется $\theta(H)=\gamma(H')$.*

Обозначим через $k(H)$ количество связных компонент графа H.

Лемма 2.6. *Для любого простого графа H выполняется $k(H)\le\theta(H)$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда граф H совпадает с дизъюнктным объединением своих максимальных клик: множества вершин этих клик попарно не пересекаются.*

Построим на множестве X простой граф G, ребра которого состоят из всех пар точек пространства X, находящихся друг от друга на расстоянии a (“граф минимальных расстояний”). Ясно, что $1\le k(G)\le\theta(G)\le n-1$.

Приведем две очевидных леммы.

Лемма 2.7. *Пусть $1<m<n$ и $D=\{X_i\}_{i=1}^m\in\mathcal{D}_m(X)$. Тогда $\operatorname{diam}D\in\{a,b\}$, причем*

(1) $\operatorname{diam}D=a$*, если и только если каждое X_i является кликой в графе G;*

(2) $\operatorname{diam}D=b$*, если и только если одно из X_i не является кликой в графе G.*

Лемма 2.8. *Пусть $1<m<n$ и $D=\{X_i\}_{i=1}^m\in\mathcal{D}_m(X)$. Тогда $\alpha(D)\in\{a,b\}$, причем*

(1) *$\alpha(D)=b$, если и только если каждая связная компонента графа G содержится в некотором X_i;*

(2) *$\alpha(D)=a$, если и только если некоторая компонента графа G пересекает разные X_i.*

Следствие 2.9. *При* $1 < m < n$, *пусть* $k := k(G) = \theta(G)$, *тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} \max\{b-\lambda,\, b,\, \lambda-b\} & \text{при } m < k, \\ \max\{b-\lambda,\, a,\, \lambda-b\} & \text{при } m = k, \\ \max\{b-\lambda,\, a,\, \lambda-a\} & \text{при } m > k. \end{cases}$$

Доказательство. По лемме 2.6, граф G разбит на k клик.

Если $m < k$, то в каждое разбиение $D = \{X_i\} \in \mathcal{D}_m(X)$ входит X_i, не являющееся кликой, поэтому, в силу леммы 2.7, $\operatorname{diam} D = b$. С другой стороны, существует разбиение D, в котором каждая компонента графа G содержится в некотором X_i, поэтому, в силу леммы 2.8, для такого разбиения имеем $\alpha(D) = b$. Следовательно, $(b, b) \in \mathcal{AD}_m(X)$, так что, в силу леммы 2.4, получаем $\operatorname{Ext}_m(X) = \big\{(b, b)\big\}$, откуда вытекает первая формула.

Если $m = k$, то для разбиения $D \in \mathcal{D}_m(X)$ на m клик имеем $\operatorname{diam} D = a$ и $\alpha(D) = b$, поэтому $(b, a) \in \mathcal{AD}_m(X)$, так что, в силу леммы 2.4, получаем $\operatorname{Ext}_m(X) = \big\{(b, a)\big\}$, откуда вытекает вторая формула.

Наконец, если $m > k$, то для каждого разбиения $D = \{X_i\} \in \mathcal{D}_m(X)$ некоторая компонента графа G пересекает разные X_i, поэтому, в силу леммы 2.8, для такого разбиения имеем $\alpha(D) = a$. С другой стороны, существует разбиение D, в котором каждая компонента является кликой, поэтому для такого разбиения имеем $\operatorname{diam} D = a$, так что $(a, a) \in \mathcal{AD}_m(X)$, поэтому, в силу леммы 2.4, получаем $\operatorname{Ext}_m(X) = \big\{(a, a)\big\}$, откуда вытекает третья формула. □

Нам осталось разобрать случай $k(G) < \theta(G)$.

Следствие 2.10. *При* $1 < m < n$, *пусть* $k := k(G) < \theta(G) =: \theta$, *тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} \max\{b-\lambda,\, b,\, \lambda-b\} & \text{при } m \le k, \\ \max\{b-\lambda,\, b,\, \lambda-a\} & \text{при } k < m < \theta, \\ \max\{b-\lambda,\, a,\, \lambda-a\} & \text{при } m \ge \theta. \end{cases}$$

Доказательство. Случаи $m < k$ и $m > \theta$ доказываются точно так же, как соответственно первая и последние формулы в следствии 2.9.

Пусть $m = k < \theta$, тогда, как и в доказательстве следствия 2.9, для каждого разбиения $D \in \mathcal{D}_m(X)$ выполняется $\operatorname{diam} D = b$. Так как $m = k$, то разбиение D на $X_i = V(G_i)$ принадлежит $\mathcal{D}_m(X)$, и $\alpha(D) = b$ Но тогда, по лемме 2.4, $\operatorname{Ext}_m(X) = \big\{(b, b)\big\}$, что и доказывает первую формулу.

Пусть $k < m < \theta$. В этом случае для каждого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем $\operatorname{diam} D = b$ и $\alpha(D) = a$. Таким образом, в этом случае $\operatorname{Ext}_m(X) = \mathcal{AD}_m(X) = \big\{(a, b)\big\}$, что и доказывает вторую формулу.

Наконец, пусть $m = \theta$, тогда для каждого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ некоторая компонента графа G пересекает более одного элемента разбиения D, так что, в силу леммы 2.8, имеем $\alpha(D) = a$. Но для разбиения D графа G на m клик выполняется $\operatorname{diam} D = a$, поэтому $(a, a) \in \mathcal{AD}_m(X)$, и, в силу леммы 2.4, имеем $\operatorname{Ext}_m(X) = \big\{(a, a)\big\}$, так что третья формула доказана. □

Соберем все полученные выше результаты.

Теорема 2.11. *Пусть X — конечное метрическое пространство с двумя ненулевыми расстояниями $a < b$, $n = \#X$, и $\lambda\Delta$ — симплекс, $m = \#\lambda\Delta$. Обозначим через G граф с множеством вершин X и ребрами, состоящими из всех пар точек из X, находящихся на расстоянии a. Пусть $k := k(G)$ — число связных компонент графа G, а $\theta := \theta(G)$ — его число кликового покрытия. Тогда*

(1) *если $k = \theta$, то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} b & \text{при } m = 1, \\ \max\{b,\, \lambda - b\} & \text{при } 1 < m < k = \theta, \\ \max\{b - \lambda,\, a,\, \lambda - b\} & \text{при } m = k = \theta, \\ \max\{b - \lambda,\, a,\, \lambda - a\} & \text{при } k = \theta < m < n, \\ \max\{b - \lambda,\, \lambda - a\} & \text{при } m = n, \\ \max\{b - \lambda,\, \lambda\} & \text{при } m > n; \end{cases}$$

(2) *если же $k < \theta$, то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} b & \text{при } m = 1, \\ \max\{b,\, \lambda - b\} & \text{при } 1 < m \le k, \\ \max\{b,\, \lambda - a\} & \text{при } k < m < \theta, \\ \max\{b - \lambda,\, a,\, \lambda - a\} & \text{при } \theta \le m < n, \\ \max\{b - \lambda,\, \lambda - a\} & \text{при } m = n, \\ \max\{b - \lambda,\, \lambda\} & \text{при } m > n. \end{cases}$$

В [12] мы рассматривали *обобщенную проблему Борсука*: выяснить, можно ли данное ограниченное метрическое пространство разбить на заданное число частей строго меньшего диаметра. Там же была доказана следующая теорема.

Теорема 2.12 ([12]). *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и m — кардинальное число, $m \le \#X$. Выберем любое число $0 < \lambda < \operatorname{diam} X$, тогда*

(1) *пространство X можно разбить на m частей строго меньшего диаметра, если и только если $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) < \operatorname{diam} X$;*

(2) *пространство X нельзя разбить на m частей строго меньшего диаметра, если и только если $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \operatorname{diam} X$.*

Из теорем 2.11 и 2.12 вытекает решение обобщенной проблемы Борсука для конечных пространств с двумя ненулевыми расстояниями.

Следствие 2.13. *Пусть X — конечное метрическое пространство с двумя ненулевыми расстояниями $a < b$, $n = \#X$. Обозначим через G граф с множеством вершин X и ребрами, состоящими из всех пар точек из X, находящихся на расстоянии a. Пусть $\theta(G)$ — число кликового покрытия графа G. Тогда пространство X нельзя разбить на m частей меньшего диаметра, если $m < \theta(G)$, и можно разбить на m частей меньшего диаметра, если $\theta(G) \le m \le n$.*

Переформулируем следствие 2.13 и приведем точное значение числа кликового покрытия в терминах расстояния Громова–Хаусдорфа.

Следствие 2.14. *Пусть $G = (V, E)$ — произвольный конечный граф. Введем на V метрику, положив все расстояния между смежными в G вершинами равными a, а все остальные расстояния равными b, $a < b \le 2a$. Пусть m — наибольшее натуральное число такое, что для симплекса $a\Delta$, состоящего из m вершин, выполняется $2d_{GH}(a\Delta, V) = b$. Тогда $\theta(G) = m + 1$.*

Приведем еще одно следствие, вычисляющее хроматическое число графа через расстояния Громова–Хаусдорфа.

Следствие 2.15. *Пусть $G = (V, E)$ — произвольный конечный граф. Введем на V метрику, положив все расстояния между смежными в G вершинами равными b, а все остальные расстояния равными a, $a < b \le 2a$. Пусть m — наибольшее натуральное число такое, что для симплекса $a\Delta$, состоящего из m вершин, выполняется $2d_{GH}(a\Delta, V) = b$. Тогда $\gamma(G) = m + 1$.*

Список литературы

[1] E. Deza, M. M. Deza, *Encyclopedia of Distances.* 4th edition, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 2016.

[2] O. R. Musin, "Spherical Two-Distant Sets", J. of Comb. Theory, Ser. A, **116**, 988 (2009).

[3] K. Borsuk, "Über die Zerlegung einer n-dimensionalen Vollkugel in n-Mengen". In: *Verh. International Math. Kongress Zürich*, p. 192 (1932).

[4] K. Borsuk, "Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre", Fundamenta Math., **20**, pp. 177–190 (1933).

[5] J. Perkal, "Sur la subdivision des ensembles en parties de diam?tre inférieur", Colloquium Mathematicum, **2**, 45 (1947).

[6] H. Hadwiger, "Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers", Commentarii Mathematici Helvetici, **18** (1), pp. 73–75 (1945).

[7] H. Hadwiger, "Mitteilung betreffend meine Note: Überdeckung einer Menge durch Mengen kleineren Durchmessers", Commentarii Mathematici Helvetici, v. 19 (1946).

[8] J. Kahn, G. Kalai, "A counterexample to Borsuk's conjecture", Bull. Amer. Math. Soc., v. 29 (1), pp. 60–62 (1993).

[9] A. M. Raigorodskii, "Around Borsuk's Hypothesis", Journal of Mathematical Sciences, v. 154 (4), pp. 604–623 (2008).

[10] A. V. Bondarenko, "On Borsuk's conjecture for two-distance sets", arXiv e-prints, `arXiv:1305.2584` (2013).

[11] T. Jenrich, "A 64-dimensional two-distance counterexample to Borsuk's conjecture", arXiv e-prints, `arXiv:1308.0206` (2013).

[12] A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, "Solution to Generalized Borsuk Problem in Terms of the Gromov–Hausdorff Distances to Simplexes", arXiv e-prints, `arXiv:1906.10574` (2019).

[13] D. Edwards, "The Structure of Superspace". In: *Studies in Topology*, ed. by N. M. Stavrakas and K. R. Allen, New York, London, San Francisco, Academic Press, Inc. (1975).

[14] M. Gromov, "Groups of Polynomial growth and Expanding Maps". In: *Publications Mathematiques I.H.E.S.*, **53** (1981).

[15] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[16] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов*. Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, Москва, 2017.

[17] A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, "Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes", arXiv e-prints, `arXiv:1607.06655` (2016).

[18] D. S. Grigor'ev, A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, "Gromov–Hausdorff distance to simplexes", arXiv e-prints, `arXiv:1906.09644` (2019); Чебышевский сборник, в печати.

[19] A. O. Ivanov, A. A.Tuzhilin, "The Gromov-Hausdorff Distances between Simplexes and Ultrametric Spaces", arXiv e-prints, `arXiv:1907.03828` (2019).