Отношения Штейнера и Штейнера–Громова пространства компактов Громова–Хаусдорфа

А.О.Иванов, А.А.Тужилин

2 мая 2016 г.

Аннотация

В работе изучается метрическое пространство $\mathcal{M}$ классов изометрий компактных метрических пространств с расстоянием Громова–Хаусдорфа. Показано, что в достаточно малых окрестностях конечных метрических пространств общего положения все минимальные деревья Штейнера для границ M, лежащих в этих окрестностях и составленных из конечных метрических пространств с тем же числом точек, являются минимальными заполнениями соответствующих конечных метрических пространств M. В качестве следствия вычислены отношения Штейнера и Штейнера–Громова пространства $\mathcal{M}$: они оказались равными $1/2$.

Библиография: 9 названий.

1 Введение

Пусть $\mathcal{M}$ обозначает пространство всех классов изометрии метрических компактов, наделенное метрикой Громова–Хаусдорфа. В работе [1], в качестве компактов общего положения, мы брали конечные метрические пространства, в которых все расстояния попарно различны, и все неравенства треугольника строгие. Такие пространства образуют всюду плотное, хотя и не открытое, подмножество в $\mathcal{M}$. Мы выяснили, что малые окрестности n-точечных компактов общего положения, ограниченные на семейства всех n-точечных метрических пространств, изометричны окрестностям в некотором пространстве $\mathbb{R}^k_\infty$, т.е. в пространстве $\mathbb{R}^k$ с нормой $\big\|(x_1,\ldots,x_k)\big\| = \max\big\{|x_i|\big\}$. Используя эти изометрии, а также изометричное вложение Куратовского каждого конечного k-точечного метрического пространства в $\mathbb{R}^k_\infty$, мы показали, что каждое конечное метрическое пространство изометрично вкладывается в $\mathcal{M}$. В настоящей статье мы используем эти результаты и покажем, что для границ, лежащих в малых окрестностях пространств общего положения и состоящих из конечных метрических пространств с одинаковым числом точек, все минимальные деревья Штейнера являются минимальными заполнениями своих границ, рассматриваемых как конечные метрические пространства, см. [5]. Чуть более деликатный анализ, чем в [1], даст нам, в качестве следствия, теорему реализации в $\mathcal{M}$ всех минимальных заполнений конечных метрических пространств в виде кратчайших деревьев. Отсюда мгновенно получается, что отношения Штейнера и Штейнера–Громова пространства $\mathcal{M}$ равны $1/2$.

2 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Для каждой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \cup_{a \in A} U_r(a)$.

Для непустых A, $B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B) \& B \subset U_r(A)\bigr\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Хорошо известно [2], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множество всех замкнутых ограниченных подмножеств из X, является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X,Y)$ *Громова–Хаусдорфа между X и Y* называется точная нижняя грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$. Хорошо известно [2], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Будем говорить, что граф G *определен на метрическом пространстве* X, если $V \subset X$. Для каждого такого графа определены *длины* $|e|$ его *ребер* $e = vw$ как расстояния $|vw|$ между концами v и w этих ребер, а также *длина* $|G|$ самого *графа* G как сумма длин всех его ребер.

Если $M \subset X$ произвольное конечное непустое подмножество, и $G = (V, E)$ — граф на X, то будем говорить, что граф G *соединяет* M, если $M \subset V$. Точная нижняя грань длин связных графов, соединяющих $M \subset X$, называется *длиной минимального дерева Штейнера на* M или *длиной кратчайшего дерева на* M и обозначается через $\mathrm{smt}(M, X)$. Каждый связный граф G, соединяющий M и такой, что $|G| = \mathrm{smt}(M, X)$, является деревом и называется *минимальным деревом Штейнера на* M или *кратчайшим деревом на* M. Множество всех минимальных деревьев Штейнера на M обозначим через $\mathrm{SMT}(M, X)$. Заметим, что множество $\mathrm{SMT}(M, X)$ может быть пустым, а $\mathrm{SMT}(M, X)$ и $\mathrm{smt}(M, X)$ зависят не только от расстояний между точками из M, но и от устройства объемлющего пространства X:

изометричные M, лежащие в разных метрических пространствах, могут соединяться кратчайшими деревьями разной длины. Подробности о теории кратчайших деревьев можно найти, например, в [3] или [4].

Предложение 2.1 ([3]). *Если X — полное риманово многообразие или конечномерное нормированное пространство, то для любого конечного непустого $M \subset X$ имеем* $\mathrm{SMT}(M,X) \neq \emptyset$.

Пусть M — конечное метрическое пространство. Определим число $\mathrm{mst}(M)$, положив его равным длине кратчайшего дерева вида (M,E). Полученная величина называется *длиной минимального остовного дерева на M*; дерево $G=(M,E)$, для которого $|G|=\mathrm{mst}(M)$, называется *минимальным остовным деревом на M*. Заметим, что для любого M на нем всегда существует минимальное остовное дерево.

Фиксируем теперь метрическое пространство M. Будем изометрично вкладывать его в различные метрические пространства X и для каждого такого вложения вычислим длину минимального дерева Штейнера на образе множества M. "Кратчайшую" длину минимального дерева Штейнера назовем *длиной минимального заполнения M* и будем обозначать через $\mathrm{mf}(M)$. Чтобы избежать проблем типа парадокса Кантора, дадим более аккуратное определение. Число $\mathrm{mf}(M)$ — это точная нижняя грань чисел r, для которых существуют метрическое пространство X и изометричное вложение $\mu\colon M \to X$, $\mathrm{smt}\big(\mu(M),X\big) \le r$. Если $\mathrm{SMT}\big(\mu(M),X\big) \neq \emptyset$ и $\mathrm{smt}\big(\mu(M),X\big) = \mathrm{mf}(M)$, то каждое $G \in \mathrm{SMT}\big(\mu(M),X\big)$ называется *минимальным заполнением M*. В [5] мы привели эквивалентное определение минимальных заполнений, не прибегая к объемлющим пространствам X, и показали, что для любого конечного метрического пространства M минимальное заполнение всегда существует. Из [5] легко выводится следующий результат.

Предложение 2.2 ([5]). *Для любого конечного метрического пространства M все его минимальные заполнения — это в точности графы $G=(V,E)$, в которых V является некоторым метрическим пространством, расширяющим M и таким, что* $|G|=\mathrm{mst}(V)=\mathrm{mf}(M)$.

Пусть M — произвольное конечное подмножество метрического пространства X, состоящее не менее чем из двух точек. Тогда $\mathrm{smt}(M,X)>0$, $\mathrm{mf}(M)>0$ и $\mathrm{mst}(M)>0$. Имеются три величины, характеризующие связи между введенными выше тремя типами деревьев:

- *отношение Штейнера* $\mathrm{sr}(M,X)=\mathrm{smt}(M,X)/\mathrm{mst}(M)$;
- *отношение Штейнера–Громова* $\mathrm{sgr}(M)=\mathrm{mf}(M)/\mathrm{mst}(M)$;
- *суботношение Штейнера* $\mathrm{ssr}(M,X)=\mathrm{mf}(M)/\mathrm{smt}(M,X)$.

Если дополнительно взять точную нижнюю грань определенных выше отношений по всем таким $M \subset X$, то получим соответствующие отношения для объемлющего пространства X. Отметим, что вычисление этих отношений — крайне нетривиальная задача. Подробности о теории одномерных минимальных заполнений можно найти в [5].

Обозначим через $\mathbb{R}^n_\infty$ пространство $\mathbb{R}^n$ с заданной на нем нормой

$$\big\|(x_1,\dots,x_n)\big\| = \max\big\{|x_i|\big\}.$$

Напомним, что каждое конечное метрическое пространство изометрично вкладывается в некоторое $\mathbb{R}^n_\infty$ с помощью *вложения Куратовского*, определяемого в следующем предложении.

Предложение 2.3 ([6])**.** *Отображение из метрического пространства $X=\{x_1,\dots,x_n\}$ в $\mathbb{R}^n_\infty$, заданное формулой*

$$\chi\colon x_i\mapsto \big(|x_1x_i|,\dots,|x_nx_i|\big),$$

изометрично.

Предложение 2.4 (З.Н.Овсянников, [7], [8])**.** *Каждое кратчайшее дерево в $\mathbb{R}^n_\infty$ является минимальным заполнением своей границы.*

Обозначим через $\mathcal{M}_{[n]}$ подмножество в $\mathcal{M}$, составленное из всех метрических пространств, каждое из которых имеет ровно n точек, и пусть $\mathcal{M}_n=\cup_{1\le k\le n}\mathcal{M}_{[k]}$.

В следующем предложении утверждается существование кратчайших деревьев в $\mathcal{M}$ на границах, точки которых являются конечными метрическими пространствами.

Предложение 2.5 ([9])**.** *Для каждого $M\subset\mathcal{M}_n$ выполняется*

$$\mathrm{SMT}(M,\mathcal{M})\ne\emptyset.$$

Для каждого $n\in\mathbb{N}$ определим отображение $\nu\colon\mathcal{M}_{[n]}\to\mathbb{R}^{n(n-1)/2}_\infty$ следующим образом. Для $X=\{x_1,\dots,x_n\}\in\mathcal{M}_{[n]}$ рассмотрим все расстояния $|x_ix_j|$ между различными точками, упорядочим их по возрастанию, и полученный вектор из $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, деленный на 2, обозначим через $\nu(X)$.

Под *пространством общего положения* будем понимать такое конечное метрическое пространство, что все его ненулевые расстояния попарно различны, и все его неравенства треугольника строгие. Семейство всех пространств общего положения обозначим через $\mathcal{M}^{\mathrm{gen}}$. Ясно, что $\mathcal{M}^{\mathrm{gen}}$ всюду плотно в $\mathcal{M}$. Положим также $\mathcal{M}^{\mathrm{gen}}_n=\mathcal{M}_n\cap\mathcal{M}^{\mathrm{gen}}$ и $\mathcal{M}^{\mathrm{gen}}_{[n]}=\mathcal{M}_{[n]}\cap\mathcal{M}^{\mathrm{gen}}$.

Пусть $X=\{x_1,\dots,x_n\}\in\mathcal{M}$, $n\ge3$. Положим $\delta(X)$ равным наименьшему из следующих двух чисел:

$$\min\big\{|x_ix_j|+|x_jx_k|-|x_ix_k| : \#\{i,j,k\}=3\big\},$$
$$\min\Big\{\big||x_ix_j|-|x_px_q|\big| : \#\{i,j,p,q\}\ge3\Big\}.$$

Для $n=2$ пусть $\delta(X)=|x_1x_2|$.

Предложение 2.6 ([1]). *Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{M}^{\mathrm{gen}}$. Положим $\delta = \delta(X)/6$, $U = U_\delta(X) \subset \mathcal{M}_n$, $N = n(n-1)/2$, $W = U_\delta\bigl(\nu(X)\bigr) \subset \mathbb{R}^N_\infty$. Тогда отображение $\nu|_U : U \to W$ — изометрия.*

Замечание 2.7. Окрестность $U = U_\delta(X) \subset \mathcal{M}_n$ не содержит пространств с меньшим чем n числом точек, поэтому отображение ν определено на U.

Предложение 2.8 ([1]). *Пусть X — произвольное конечное метрическое пространство, состоящее из n точек. Обозначим через k наименьшее натуральное число, для которого $n \le k(k-1)/2$. Тогда X изометрично вкладывается в $\mathcal{M}$, причем вложение можно выбрать так, чтобы образ X лежал в $\mathcal{M}_{[k]}$.*

3 Кратчайшие деревья в малых окрестностях пространств общего положения

Следующая теорема сводит задачу Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа для границ из малых окрестностей конечных пространств общего положения к задаче о минимальных заполнениях конечных метрических пространств.

Теорема 3.1. *Пусть $X \in \mathcal{M}^{\mathrm{gen}}_{[n]}$. Тогда для каждого $N \in \mathbb{N}$ существует такая окрестность $U_r(X) \subset \mathcal{M}_n$, что для каждого множества $M \subset U_r(X)$, состоящего не более чем из N точек, каждое его минимальное дерево Штейнера, существующее в силу 2.5, является минимальным заполнением.*

Доказательство. Пусть $\nu\colon \mathcal{M}_{[n]} \to \mathbb{R}^{n(n-1)/2}_\infty$ — построенное выше отображение. Положим $Y = \nu(X)$ и $R = \mathbb{R}^{n(n-1)/2}_\infty$. По предложению 2.6, существует такое $\delta > 0$, что отображение ν является изометрией между $U = U_\delta(X) \subset \mathcal{M}_n$ и $W = U_\delta(Y) \subset R$.

Положим $r = \delta/\bigl[1+2(N-1)\bigr]$. Пусть $A \subset U_r(Y)$, тогда расстояние между каждой парой точек из A меньше, чем $2r$. Пусть, кроме того, A состоит не более чем из N точек, тогда длина произвольного дерева с множеством вершин A меньше, чем $2r(N-1)$ и, значит, $\mathrm{smt}(A, R) < 2r(N-1)$.

Пусть $G = (V, E) \in \mathrm{SMT}(A, R)$. Тогда $\operatorname{diam} V \le |G| < 2r(N-1)$, где $\operatorname{diam} V$ обозначает диаметр множества V. Так как $A \subset V$, то одна из точек V, скажем $p \in A$, отстоит от Y меньше, чем на r, поэтому для любой $v \in V$ имеем

$$|Yv| \le |Yp| + |pv| \le |Yp| + \operatorname{diam} V < r + 2r(N-1) = \delta.$$

Таким образом, мы показали, что для каждого $G = (V, E) \in \mathrm{SMT}(A, R)$ имеем $V \subset W$.

Возьмем теперь произвольное $M \subset U_r(X)$ и положим $A = \nu(M)$. Тогда $A \subset U_r(Y)$. Как было показано выше, для каждого $G = (V, E) \in \mathrm{SMT}(A, R)$ имеем $V \subset U_\delta(Y)$, поэтому $V' = \nu^{-1}(V)$ изометрично V, и $V' \supset M$.

Пусть $G' = (V', E')$ — единственный граф, для которого $\nu^{-1}\colon V \to V'$ является изоморфизмом G и G'. Тогда $|G'| = |G|$ и, так как G — минимальное заполнение для A в силу 2.4, то G' — минимальное заполнение для M. Так как длины всех минимальных деревьев Штейнера на одной и той же границе одинаковы, все кратчайшие деревья на $M \subset \mathcal{M}$ являются минимальными заполнениями для M. □

Следующий результат показывает, что каждое минимальное заполнение может быть реализовано как кратчайшее дерево в пространстве Громова–Хаусдорфа.

Теорема 3.2. *Пусть X — произвольное конечное метрическое пространство и $G = (V, E)$ — произвольное его минимальное заполнение. Тогда существует такое $N \in \mathbb{N}$ и изометричное вложение $f\colon X \to \mathcal{M}_N$, что*

(1) *отображение f продолжается до изометрического вложения $F\colon V \to \mathcal{M}_N$,*

(2) *граф $F(G) := \big(F(V), F(E)\big)$ является минимальным деревом Штейнера в $\mathcal{M}$, соединяющим $f(X)$, т.е. $F(G) \in \mathrm{SMT}\big(f(X), \mathcal{M}\big)$,*

(3) *каждое минимальное дерево Штейнера в $\mathcal{M}$, соединяющее $f(X)$, является минимальным заполнением.*

Доказательство. Для доказательства пункта (1) достаточно воспользоваться 2.8 и построить сначала изометричное вложение F пространства V в $\mathcal{M}$, а затем f определить как ограничение F на X. Пункт (2) следует из того, что каждый связный граф, соединяющий конечное подмножество метрического пространства, не короче минимального заполнения для этого подмножества. Для доказательства пункта (3) достаточно заметить, что все минимальные деревья Штейнера на одной и той же границе имеют одинаковые длины. □

Теорема 3.2 и [5] приводят нас к следующему результату.

Следствие 3.1. *Имеем* $\mathrm{sr}(\mathcal{M}) = 1/2$ *и* $\mathrm{sgr}(\mathcal{M}) = 1/2$.

Доказательство. Действительно, если Δ_n обозначает метрическое пространство, состоящее из n точек, расстояния между которыми равны 1, то $\mathrm{mst}(\Delta_n) = n - 1$. В силу [5], минимальное заполнение для Δ_n представляет собой звезду $\big(\Delta_n \cup \{v\}, E\big)$ с ребрами $vx_i \in E$, $x_i \in \Delta_n$, длины которых равны $1/2$. Поэтому $\mathrm{mf}(\Delta_n) = n/2$. Вложим Δ_n в $\mathcal{M}$ так, чтобы минимальное дерево Штейнера на его образе совпало с минимальным заполнением (это можно сделать в силу теоремы 3.2) и пусть M — образ Δ_n при таком вложении. Тогда $\mathrm{smt}(M, \mathcal{M}) = \mathrm{mf}(M) = \mathrm{mf}(\Delta_n) = n/2$ и $\mathrm{mst}(M) = n - 1$, поэтому $\mathrm{sr}(M, \mathcal{M}) = \frac{n/2}{n-1} = \mathrm{sgr}(M)$, так что, устремляя n к бесконечности, получаем требуемое. □

Замечание 3.2. В работе [8] показано, что $\mathrm{ssr}(\mathcal{M}) < 0.857$. Интересно было бы получить точное значение для $\mathrm{ssr}(\mathcal{M})$.

Список литературы

[1] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Local structure of Gromov–Hausdorff space and isometric embeddings of finite metric spaces into the former space.* ArXiv e-prints, arXiv:1604.07615, 2016.

[2] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Теория экстремальных сетей*, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[4] Hwang F.K., Richards D.S., Winter P. *The Steiner Tree Problem.* Annals of Discrete Mathematics 53, North-Holland: Elsevier, 1992. ISBN 0-444-89098-X.

[5] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении*, Матем. сб., 2012, т. 203, N 5, сс. 65-118.

[6] Kuratowski C. *Quelques problemes concernant les espaces metriques non-separables.* Fund. Math., 1935, v. 25, pp. 534–545.

[7] Овсянников З.Н. *Курсовая работа*, Мех-мат МГУ, Москва, 2010.

[8] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings.* ArXiv e-prints, 1604.06116, 2016.

[9] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *Steiner Problem in Gromov–Hausdorff Space: the case of finite metric spaces.* ArXiv e-prints, arXiv:1604.02170, 2016.