Метрика Громова—Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутренняя

Иванов А.О., Николаева Н.К., Тужилин А.А.

10 апреля 2015 г.

1 Введение

Обозначим через $\mathfrak{M}$ пространство всех метрических компактов (рассматриваемых с точностью до изометрии) с метрикой Громова–Хаусдорфа. Известен ряд свойств пространства $\mathfrak{M}$, например, что оно — линейно-связное, полное, сепарабельное, но не ограниченно компактное. Цель настоящей работы — доказать, что метрика Громова–Хаусдорфа является на $\mathfrak{M}$ строго внутренней, т.е. любые две точки из $\mathfrak{M}$ соединяются кратчайшей геодезической.

2 Основные определения и предварительные результаты

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в [1].

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Для каждых $x \in X$ и непустого $A \subset X$ определим $|xA|$ как точную нижнюю грань расстояний $|xa|$ по всем $a \in A$; для непустых A, $B \subset X$ определим $d(B, A)$ как точную верхнюю грань расстояний $|bA|$ по всем $b \in B$; наконец, для тех же A и B положим $d_H(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}$. Число $d_H(A, B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа*. Хорошо известно, что на множестве всех замкнутых ограниченных подмножеств пространства X функция d_H является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *Громова–Хаусдорфа между* X *и* Y называется точная нижняя грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$. Хорошо известно, что на множестве $\mathfrak{M}$ всех компактных метрических пространств функция d_{GH} является метрикой.

Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X,Y)$. Если $\pi_X\colon X \times Y \to X$ и $\pi_Y\colon X \times Y \to Y$ — канонические проекции, т.е. $\pi_X(x,y) = x$ и $\pi_Y(x,y) = y$, то теми же символами будем обозначать ограничения этих отображений на каждое отношение $\sigma \subset \mathcal{P}(X,Y)$.

Отношение R между X и Y называется *соответствием*, если ограничение канонических проекций π_X и π_Y на R — сюръекции. Иными словами, для каждого $x \in X$ существует $y \in Y$, находящийся с x в отношении R и, обратно, для каждого $y \in Y$ существует $x \in X$, находящийся с y в отношении R. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Пусть X и Y — метрические пространства, тогда для каждого отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ определено его *искажение* $\operatorname{dis}\sigma$:

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y) \in \sigma,\ (x',y') \in \sigma\Big\}.$$

Если $f\colon X \to Y$ — отображение, то его *искажением* $\operatorname{dis} f$ назовем искажение графика отображения f.

Следующий результат хорошо известен.

Предложение 2.1. *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R \mid R \in \mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Если X и Y — конечные метрические пространства, то множество $\mathcal{R}(X,Y)$ конечно, поэтому существует $R \in \mathcal{R}(X,Y)$, для которого $d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\operatorname{dis} R$. Каждое такое отношение R назовем *оптимальным*.

Нам понадобится еще несколько вспомогательных результатов.

Предложение 2.2. *Пусть X — произвольное метрическое пространство, Y — непустое подмножество X, а S — некоторая ε-сеть в X. Тогда в Y существует (2ε)-сеть, мощность которой не превосходит мощности множества S.*

Пусть $M \subset \mathfrak{M}$ — некоторое семейство метрических компактов. Будем говорить, что M *равномерно вполне ограничено*, если выполняются следующие два условия:

1. существует число $D \ge 0$ такое, что для любого $X \in M$ выполняется $\operatorname{diam} X \le D$ (диаметры пространств из M равномерно ограничены);

2. для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что каждое $X \in M$ содержит некоторую ε-сеть, состоящую не более чем из $N(\varepsilon)$ точек (количества элементов ε-сетей равномерно ограничены).

Предложение 2.3. *Семейство $M \subset \mathfrak{M}$ — предкомпактно, если и только если оно — равномерно вполне ограничено.*

3 Доказательство основной теоремы

Пусть X и Y — два конечных метрических пространства, и R — оптимальное соответствие между ними. Тогда, по определению, $d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\operatorname{dis}R$.

А.А.Тужилин предложил определить на R функцию расстояния так. Выберем произвольное $0\le\alpha\le 1$ и пусть $\beta=1-\alpha$. Положим

$$\bigl|(x,y)(x',y')\bigr|_\alpha=\alpha|xx'|+\beta|yy'|.$$

Очевидно, полученная функция положительно определена и симметрична. Проверим неравенство треугольника. Имеем

$$\begin{aligned}\bigl|(x,y)(x',y')\bigr|_\alpha+\bigl|(x',y')(x'',y'')\bigr|_\alpha&=\alpha|xx'|+\beta|yy'|+\alpha|x'x''|+\beta|y'y''|\ge\\ &\ge\alpha|xx''|+\beta|yy''|=\bigl|(x,y)(x'',y'')\bigr|_\alpha.\end{aligned}$$

Таким образом, $|\cdot|_\alpha$ является метрикой на R при каждом $0<\alpha<1$, а при $\alpha=0,\,1$ — псевдометрикой.

Обозначим через $R_x\subset X\times R$ и $R_y\subset R\times Y$ соответствия, определенные так:

$$R_x=\Bigl\{\bigl(x,(x,y)\bigr):x\in X,\,(x,y)\in R\Bigr\},\quad R_x=\Bigl\{\bigl((x,y),y\bigr):(x,y)\in R,\,y\in Y\Bigr\}.$$

Вычислим искажения этих соответствий. Имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{dis}R_x=\max&\Bigl\{\Bigl||xx'|-\alpha|xx'|-\beta|yy'|\Bigr|:x,\,x'\in X,\ (x,y),\,(x',y')\in R\Bigr\}=\\ &=\beta\max\Bigl\{\bigl||xx'|-|yy'|\bigr|:(x,y),\,(x',y')\in R\Bigr\}=\beta\operatorname{dis}R\end{aligned}$$

(аналогично, $\operatorname{dis}R_y=\alpha\operatorname{dis}R$).

Следовательно, $d_{GH}(X,R)\le\beta d_{GH}(X,Y)$ и $d_{GH}(R,Y)\le\alpha d_{GH}(X,Y)$, поэтому $d_{GH}(X,R)=\beta d_{GH}(X,Y)$, а $d_{GH}(R,Y)=\alpha d_{GH}(X,Y)$, т.е. $\bigl(R,|\cdot|_\alpha\bigr)$ лежит между X и Y. В частности, при $\alpha=1/2$ пространство $\bigl(R,|\cdot|_\alpha\bigr)$ является серединой между X и Y.

Итак, мы доказали следующий результат.

Предложение 3.1. *У любых двух конечных метрических пространств существует середина в $\mathfrak{M}$.*

Середину между конечными пространствами, построенную описанным выше способом, назовем *канонической серединой, построенной по оптимальному соответствию* R, и будем обозначать той же буквой R.

Пусть теперь X и Y — произвольные метрические компакты. Для каждого $n\in\mathbb{N}$ обозначим через X_n и Y_n некоторое конечные $1/n$-сети в X и Y соответственно, и пусть R_n — каноническая середина между X_n и Y_n. Покажем, что множество $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathfrak{M}$ — предкомпактно. Так как $x_n\to X$ и $Y_n\to Y$, то, по критерию Громова предкомпактности, существует D такое, что $\operatorname{diam}X_n<D$ и $\operatorname{diam}Y_n<D$ при всех $n\in\mathbb{N}$, а также для каждого $\varepsilon>0$

существует $N(\varepsilon) > 0$ такое, что во всех X_n и Y_n существуют ε-сети X'_n и Y'_n, состоящие не более чем из $N(\varepsilon)$ точек каждая.

Определим на $X_n \times Y_n$ расстояние по тому же принципу, что и на R_n, а именно, положим

$$\big|(x, y), (x', y')\big| = \frac{1}{2}\big(|xx'| + |yy'|\big).$$

Ясно, что ограничение этого расстояния на R_n совпадает с расстоянием, заданным на R_n выше. Кроме того, $\operatorname{diam} R_n \le \operatorname{diam}(X_n \times Y_n) < D$, так что множество $\{R_n\}$ равномерно ограничено. Наконец, $X'_n \times Y'_n$ является ε-сетью для $X_n \times Y_n$, состоящей не более чем из $N(\varepsilon)^2$ точек. Но тогда в R_n имеется (2ε)-сеть, состоящая не более чем из $N(\varepsilon)^2$ точек. Таким образом, выполняются условия критерия Громова предкомпактности, откуда и вытекает предкомпактность множества $\{R_n\}$.

Без ограничения общности, будем считать, что последовательность R_n сходится в $\mathfrak{M}$ к некоторому R. Из непрерывности функции расстояния вытекает, что R — середина между X и Y. Таким образом, мы доказали следующий результат.

Предложение 3.2. *У любых двух компактный метрических пространств существует середина в* $\mathfrak{M}$.

Хорошо известно, что $\mathfrak{M}$ — полное метрическое пространство, а в полном метрическом пространстве существование середин равносильно тому, что метрика является строго внутренней. Тем самым, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.1. *Метрика пространства* $\mathfrak{M}$ *все метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, является строго внутренней.*

Список литературы

[1] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.