Устройство пространства Громова–Хаусдорфа в малых окрестностях конечных метрических пространств общего положения

А.О.Иванов, А.А.Тужилин

16 ноября 2016 г.

Аннотация

Изучается локальное устройство метрического пространства $\mathcal{M}$, состоящего из классов изометрии компактных метрических пространств и наделенного метрикой Громова–Хаусдорфа. Показано, что достаточно малые шаровые окрестности одинакового радиуса любых двух конечных пространств общего положения, состоящих из одинакового числа точек, изометричны. В качестве следствия доказано, что конусы над такими окрестностями (с вершинами в одноточечном пространстве) также изометричны, и что группа изометрий каждой достаточно малой шаровой окрестности конечного пространства общего положения, состоящего из $n \geq 3$ точек, содержит подгруппу, изоморфную группе S_n перестановок n-точечного множества.

Библиография: 6 названий.

1 Введение

Обозначим через $\mathcal{M}$ пространство всех метрических компактов (рассматриваемых с точностью до изометрии) с метрикой Громова–Хаусдорфа. Такое $\mathcal{M}$ обычно называют пространством Громова–Хаусдорфа. Нас будут интересовать изометрии, связанные с $\mathcal{M}$. В работе [1] рассматриваются конечные метрические пространства M, у которых все ненулевые расстояния различны и все неравенства треугольника строгие. Такие M называются пространствами общего положения. В [1] показано, что для любого n-точечного пространства M общего положения достаточно малая его окрестность в $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}$, состоящем из всех не более чем n-точечных пространств, изометрична некоторому открытому подмножеству в $\mathbb{R}^k_\infty$, $k = n(n-1)/2$, т.е. в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^k$ с метрикой, заданной нормой $\big\|(x_1, \ldots, x_k)\big\|_\infty = \max_i |x_i|$. Отсюда, в частности, вытекает, что шаровые окрестности в $\mathcal{M}_n$ для пространств общего положения, имеющие достаточно малые одинаковые радиусы, изометричны.

В настоящей работе мы усилим этот результат. А именно, мы покажем, что у n-точечных пространств общего положения шаровые окрестности во **всем пространстве** $\mathcal{M}$ достаточно малого одинакового радиуса изометричны. При этом, изометрии будут построены явно. В качестве следствия мы выведем, что изометричными являются также и конусы на такими окрестностями, где под конусом CZ над множеством $Z \subset \mathcal{M}$ мы понимаем $\{\lambda X \in \mathcal{M} : X \in Z,\, \lambda > 0\} \cup \{\Delta_1\}$, где λX — метрическое пространство, полученное из $X \in \mathcal{M}$ умножением всех расстояний на λ, а Δ_1 — одноточечное метрическое пространство.

Кроме того, мы покажем, что малые шаровые окрестности n-точечных пространств общего положения, $n \geq 3$, имеют достаточно богатую группу изометрий, а именно, туда входит подгруппа, изоморфная группе перестановок S_n множества из n элементов.

2 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Для каждой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ обозначим открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \cup_{a \in A} U_r(a)$.

Для непустых A, $B \subset X$ пусть

$$d_H(A, B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B) \& B \subset U_r(A)\bigr\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Хорошо известно [2], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множестве всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X, является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием $d_{GH}(X, Y)$ Громова–Хаусдорфа между X и Y* называется точная нижняя грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \leq r$. Хорошо известно [2], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой.

Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех непустых отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X, Y)$. Если $\pi_X : X \times Y \to X$ и $\pi_Y : X \times Y \to Y$ — канонические проекции, т.е. $\pi_X(x, y) = x$ и $\pi_Y(x, y) = y$, то теми же символами будем обозначать ограничения этих отображений на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$.

Будем смотреть на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X. Тогда, по аналогии с тем, как это принято для отображений, для каждого $x \in X$ определен его образ $\sigma(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in \sigma\}$; для каждого $A \subset X$ определено $\sigma(A)$ как объединение образов всех элементов из A; для каждого $y \in Y$ определен его прообраз $\sigma^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in \sigma\}$; для каждого $B \subset Y$ определен его прообраз как объединение прообразов всех его элементов.

Отношение R между X и Y называется *соответствием*, если ограничения канонических проекций π_X и π_Y на R — сюръекции. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Пусть X и Y — метрические пространства, тогда для каждого отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ определено его *искажение*

$$\operatorname{dis} \sigma = \sup\Bigl\{\bigl||xx'| - |yy'|\bigr| : (x, y) \in \sigma,\ (x', y') \in \sigma\Bigr\}.$$

Следующий результат хорошо известен.

Предложение 2.1 ([2]). *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\bigr\}.$$

Определение 2.2. Соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ называется *оптимальным*, если $d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\operatorname{dis} R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)$.

Если X и Y — конечные метрические пространства, то множество $\mathcal{R}(X,Y)$ конечно, так что в этом случае всегда существует оптимальное соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$.

Предложение 2.3 ([3], [4], [5])**.** *Для любых X, $Y \in \mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y) \neq \emptyset$.*

Если X — метрическое пространство, то через $\operatorname{diam} X$ обозначим его диаметр, т.е. величину $\sup\bigl\{|xx'| : x, x' \in X\bigr\}$. Для вещественного $\lambda > 0$ через λX обозначим метрическое пространство, полученное из X умножением всех расстояний на λ.

Следующие утверждение также хорошо известно [2].

Предложение 2.4. *Для произвольных метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda\, d_{GH}(X,Y).$$

В заключение этого раздела, приведем еще ряд нужных нам понятий и обозначений.

Через Δ_1 будем обозначать одноточечное метрическое пространство. Для $Z \subset \mathcal{M}$ под *конусом $CZ \subset \mathcal{M}$ над Z* будем понимать множество $\{\lambda X : X \in Z,\, \lambda > 0\} \cup \{\Delta_1\}$.

В конкретных вычислениях и оценках искажений соответствий мы будем применять следующие обозначения, оказавшиеся удобными и интенсивно использовавшиеся в [6].

Обозначение 2.5. Для непустых подмножеств A и B метрического пространства X положим $|AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}$ и $|AB|' = \sup\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}$.

3 Локальное устройство пространства Громова–Хаусдорфа в окрестности метрических пространств общего положения

В данном разделе мы определим пространства общего положения и покажем, что шары достаточно малого одинакового радиуса с центрами в таких пространствах изометричны. **Начиная с этого места, мы будем считать, что у рассматриваемых конечных метрических пространств фиксирован порядок точек**. Для удобства, множества точек таких пространств будем обозначать через $\{1,\dots,n\}$.

Определение 3.1. Будем говорить, что конечное метрическое пространство M *находится в общем положении* или *является пространством общего положения*, если все ненулевые расстояния в M различны и все неравенства треугольника для троек, состоящих из различных точек, — строгие.

Для произвольного метрического пространства X определим величину $\delta(X)$, положив ее равной наименьшему из следующих трех чисел (здесь $\inf\emptyset = \infty$):

$$s(X) = \inf\bigl\{|xy| : x \neq y\bigr\},$$
$$e(X) = \inf\Bigl\{\bigl||xy| - |zw|\bigr| : x \neq y,\, z \neq w,\, \{x,y\} \neq \{z,w\}\Bigr\},$$
$$t(X) = \inf\bigl\{|xy| + |yz| - |xz| : x \neq y \neq z \neq x\bigr\}.$$

В силу соглашения, для $X \in \mathcal{M}$ выполнение одного из неравенств $e(X) > 0$, $s(X) > 0$, $t(X) > 0$, $\delta(X) > 0$ влечет конечность метрического пространства X. При этом, для конечного X,

(1) $s(X)>0$ всегда, при этом $s(X)=\infty$, если и только если пространство X — одноточечное;

(2) $e(X)>0$ эквивалентно тому, что все ненулевые расстояния между точками из X различны, при этом $e(X)=\infty$, если и только если X — или одноточечное, или двухточечное;

(3) $t(X)>0$ эквивалентно тому, что для каждой тройки попарно различных точек из X все неравенства треугольника строгие, при этом, как и в предыдущем пункте, $t(X)=\infty$, если и только если X — или одноточечное, или двухточечное;

(4) $\delta(X)>0$ эквивалентно тому, что X находится в общем положении.

3.1 Каноническое разбиение

Метрические компакты, лежащие в достаточно малых окрестностях пространств общего положения, имеют однозначно определенные разбиения, которые мы и опишем в настоящем разделе.

Предложение 3.2. *Пусть $M=\{1,\ldots,n\}$ — некоторое метрическое пространство. Тогда для любого $0<\varepsilon\le s(M)/2$ и каждого $X\in\mathcal{M}$ такого, что $2d_{GH}(M,X)<\varepsilon$, существует единственное, с точностью до нумерации точками пространства M, разбиение $X=\sqcup_{i=1}^n X_i$, обладающее следующими свойствами*:

(1) $\operatorname{diam} X_i<\varepsilon$;

(2) *для любых $i,j\in M$ и любых $x\in X_i$ и $x'\in X_j$ (здесь индексы i и j могут быть равны друг другу) выполняется $\big||xx'|-|ij|\big|<\varepsilon$.*

Доказательство. Выберем произвольное $R\in\mathcal{R}_{\rm opt}(M,X)$ и положим $X_i=R(i)$. Если $X_i\cap X_j\ne\emptyset$ при некоторых $i\ne j$, то $\operatorname{dis}R\ge|ij|\ge s(M)$, поэтому $2d_{GH}(M,X)=\operatorname{dis}R>\varepsilon$, противоречие. Таким образом, $\{X_i\}_{i=1}^n$ — разбиение X.

Заметим, что

$$\operatorname{dis}R=\max_{i,j}\Big\{\operatorname{diam}X_i,\,\operatorname{dis}\Big[\big(\{i\}\times X_i\big)\cup\big(\{j\}\times X_j\big)\Big],\,j\ne i\Big\}<\varepsilon,$$

поэтому $\operatorname{diam}X_i<\varepsilon$ при всех i, и $\big||xx'|-|ij|\big|<\varepsilon$ при всех $j\ne i$. Если же $i=j$, то $\big||xx'|-|ij|\big|=|xx'|\le\operatorname{diam}X_i<\varepsilon$, так что пункт (2) имеет место при всех $i,j\in M$, даже равных друг другу.

Пусть $X=\sqcup_{i=1}^n Y_i$ — другое такое разбиение. Отметим, что никакое Y_i не может одновременно пересекать X_j и X_k для $j\ne k$, так как $\operatorname{diam}Y_i<\varepsilon$, а для любых $x_j\in X_j$ и $x_k\in X_k$ выполняется $|x_jx_k|>|jk|-\varepsilon\ge s(M)-\varepsilon\ge\varepsilon$. Таким образом, каждое Y_i пересекает ровно одно X_j. Точно так же, каждое X_j пересекает ровно одно Y_i. Но, так как $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ — разбиения множества X, для каждых X_i, Y_j, $X_i\cap Y_j\ne\emptyset$, выполняется $Y_j=X_i$. $\square$

Замечание 3.3. Предложение 3.2 описывает также и одноточечное пространство $M=\Delta_1$. В этом случае $s(M)=\infty$, так что на ε нет ограничений сверху (оно может быть также равно ∞). Так как $2d_{GH}(M,X)<\varepsilon$, то $\operatorname{diam}X<\varepsilon$. Разбиение $\{X_i\}$ состоит из одного элемента $X_1=X$. Пункт (1), в силу сказанного выше, также выполняется. Пункт (2) тоже имеет место, так как $i=j=1$, откуда $\big||xx'|-|ij|\big|=|xx'|\le\operatorname{diam}X<\varepsilon$.

Замечание 3.4. Отметим, что из пункта (2) предложения 3.2 вытекает $\operatorname{diam}X_i\le\varepsilon$, а это — слабее пункта (1).

Приведем еще один полезный вариант предложения 3.2.

Предложение 3.5. *Пусть $M = \{1, \dots, n\}$ — некоторое метрическое пространство. Тогда для любого $0 < \varepsilon \le s(M)/2$, каждого $X \in \mathcal{M}$, $2d_{GH}(M, X) < \varepsilon$, и каждого $R \in \mathcal{R}_{\rm opt}(M, X)$ семейство $\{R(i)\}_{i=1}^n$ является разбиением множества X, причем имеют место следующие свойства*:

(1) $\operatorname{diam} R(i) < \varepsilon$;

(2) *для любых $i, j \in M$, $x \in R(i)$, $x' \in R(j)$ выполняется $\big||xx'| - |ij|\big| < \varepsilon$.*

Более того, если R' — еще одно оптимальное соответствие между M и X, то разбиения $\{R(i)\}_{i=1}^n$ и $\{R'(i)\}_{i=1}^n$ могут отличаться друг от друга лишь нумерациями, заданными соответствиями $i \mapsto R(i)$ и $i \mapsto R'(i)$.

Определение 3.6. Семейство $\{X_i\}$ из предложения 3.2 назовем *каноническим разбиением пространства X относительно M*.

Замечание 3.7. Для $\#M = 1$ каноническое разбиение пространства X состоит из одного элемента, и этот элемент — само пространство X. Если $\#M = 2$ и элементы канонического разбиения $X = A \sqcup B$ неизометричны, то всегда существует две разных нумерации этого разбиения точками пространства M: $X_1 = A$, $X_2 = B$ и $X_1 = B$, $X_2 = A$. Для пространств, в которых $\#M > 2$ и $e(M) > 0$, при достаточно малых ε уже имеет место единственность, см. ниже предложение 3.11.

Предложение 3.8. *Пусть $M = \{1, \dots, n\}$ — метрическое пространство. Выберем произвольное $0 < \varepsilon \le s(M)/4$, любые $X, Y \in \mathcal{M}$, $2d_{GH}(M, X) < \varepsilon$, $2d_{GH}(M, Y) < \varepsilon$, и пусть $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ обозначают канонические разбиения соответственно X и Y относительно M. Тогда для каждого $R \in \mathcal{R}_{\rm opt}(X, Y)$ существует биекция $\psi\colon M \to M$ такая, что для некоторых $R_i \in \mathcal{R}(X_i, Y_{\psi(i)})$ выполняется $R = \sqcup_{i=1}^n R_i$.*

Доказательство. Оценим $\operatorname{dis} R$. Для этого рассмотрим $R' = \sqcup_{i=1}^n X_i \times Y_i$. Тогда, по предложению 3.2, имеем

$$\operatorname{dis} R \le \operatorname{dis} R' = \max\{\operatorname{diam} X_i,\, \operatorname{diam} Y_i,\, \big||X_iX_j|' - |Y_iY_j|\big|,\, \big||X_iX_j| - |Y_iY_j|'\big|,\, i \ne j\} \le 2\varepsilon.$$

Выберем произвольные $x, x' \in X_i$, $y \in R(x)$, $y' \in R(x')$ и покажем, что y и y' принадлежат одному и тому же Y_j. Предположим противное, тогда для некоторых $j \ne k$ имеем $y \in Y_j$, $y' \in Y_k$, откуда, по предложению 3.2, $|xx'| < \varepsilon$, $|yy'| > |jk| - \varepsilon \ge s(M) - \varepsilon \ge 3\varepsilon$, так что $\operatorname{dis} R \ge \big||xx'| - |yy'|\big| > 2\varepsilon$, противоречие.

Меняя местами X и Y, заключаем, что для любых (x, y), $(x', y') \in R$ точки x и x' лежат в одном элементе канонического разбиения $\{X_i\}$, если и только если точки y и y' лежат в одном и том же элементе канонического разбиения $\{Y_i\}$, что и завершает доказательство. $\square$

Предложение 3.9. *Пусть $M = \{1, \dots, n\}$ и $N = \{1, \dots, n\}$ — метрические пространства. Расстояние между i и j в M обозначим через $|ij|_M$, а в N — через $|ij|_N$. Предположим, что $t(N) > 0$, выберем произвольное $0 < \varepsilon \le \min\{s(M)/2, 2s(N)/3, t(N)/3\}$, любое $X \in \mathcal{M}$, $2d_{GH}(M, X) < \varepsilon$, и пусть $\{X_i\}$ — каноническое разбиение X относительно M. Определим на $X \times X$ функцию ρ так: для $x \in X_i$ и $x' \in X_j$ положим $\rho(x, x') = |xx'| - |ij|_M + |ij|_N$ (здесь индексы i и j могут быть равны друг другу). Тогда ρ — метрика на X, совпадающая на каждом X_i с исходной метрикой. Более того, если V обозначает множество X с метрикой ρ, то $V \in \mathcal{M}$ и $d_{GH}(N, V) \le d_{GH}(M, X)$.*

Доказательство. Если $M=\Delta_1$, то $N=\Delta_1$, функция ρ совпадает с исходной метрикой на $X_1=X$, поэтому V и X — равные метрические пространства, так что $d_{GH}(N,V)\le d_{GH}(M,X)$.

Пусть теперь $\#M\ge 2$. Так как, по предложению 3.2, для $i\ne j$, $x\in X_i$, $x'\in X_j$ выполняется $|xx'|-|ij|_M+|ij|_N>-\varepsilon+s(N)\ge-\varepsilon+3\varepsilon/2>0$, функция ρ — положительно определенная. Остается проверить, что для ρ выполняется неравенство треугольника.

Пусть $x\in X_i$, $x'\in X_j$, $x''\in X_k$ — произвольные точки пространства X. Докажем, что $\rho(x,x'')\le\rho(x,x')+\rho(x',x'')$, т.е., в явном виде,

$$|xx'|+|x'x''|-|xx''|-|ij|_M-|jk|_M+|ik|_M+|ij|_N+|jk|_N-|ik|_N\ge 0. \tag{1}$$

Пусть сначала $i=j=k$, тогда

$$|xx'|+|x'x''|-|xx''|-|ij|_M-|jk|_M+|ik|_M+|ij|_N+|jk|_N-|ik|_N= \\ =|xx'|+|x'x''|-|xx''|\ge 0.$$

Далее, пусть ровно два из трех индексов i, j, k равны между собой. Достаточно рассмотреть два случая: $i=j$ и $i=k$.

Если $i=j$, то

$$|xx'|+|x'x''|-|xx''|-|ij|_M-|jk|_M+|ik|_M+|ij|_N+|jk|_N-|ik|_N= \\ =|xx'|+|x'x''|-|xx''|-|ik|_M+|ik|_M+|ik|_N-|ik|_N=|xx'|+|x'x''|-|xx''|\ge 0.$$

Если $i=k$, то учитывая, что $x_k\in X_i$, получаем

$$|xx'|+|x'x''|-|xx''|-|ij|_M-|jk|_M+|ik|_M+|ij|_N+|jk|_N-|ik|_N= \\ =\big(|xx'|-|ij|_M\big)+\big(|x'x''|-|ij|_M\big)-|xx''|+2|ij|_N.$$

По предложению 3.2, имеем $|xx'|-|ij|_M>-\varepsilon$, $|x'x''|-|ij|_M>-\varepsilon$, $-|xx''|\ge-\operatorname{diam}X_i>-\varepsilon$. С другой стороны, $2|ij|_N\ge 2s(N)\ge 3\varepsilon$, откуда вытекает справедливость неравенства (1).

Наконец, предположим, что $n\ge 3$ и $i\ne j\ne k\ne i$. Для удобства изложения, переобозначим выбранные три точки пространства X через $x_i\in X_i$, $x_j\in X_j$ и $x_k\in X_k$. По предложению 3.2, для каждой пары $\{p,q\}\subset\{i,j,k\}$ имеем $|x_px_q|-|pq|_M>-\varepsilon$ и $-|x_px_p|+|pq|_M>-\varepsilon$, откуда

$$|x_ix_j|+|x_jx_k|-|x_ix_k|-|ij|_M-|jk|_M+|ik|_M>-3\varepsilon.$$

С другой стороны, $|ij|_N+|jk|_N-|ik|_N\ge t(N)\ge 3\varepsilon$, так что неравенство (1) имеет место.

Компактность V вытекает из компактности компонент X_i канонического разбиения X (эти компоненты компактны, так как они находятся друг относительно друга на ненулевых расстояниях и, поэтому, являются замкнутыми подмножествами X).

Оценим $d_{GH}(N,V)$. Пусть $R\in\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(M,X)$ — такое, как в доказательстве предложения 3.2, т.е. $X_i=R(i)$. Обозначим через R_V то же самое соответствие R, но уже рассматриваемое как элемент из $\mathcal{R}(N,V)$, и пусть (i,x), $(j,x')\in R_V$. Тогда для $i\ne j$ имеем

$$\big||ij|_N-\rho(x,x')\big|=\big||ij|_N-|xx'|+|ij|_M-|ij|_N\big|=\big||ij|_M-|xx'|\big|,$$

поэтому $2d_{GH}(N,V)\le\operatorname{dis}R_V=\operatorname{dis}R=2d_{GH}(M,X)$, что и требовалось. $\square$

Конструкция, описанная в предложении 3.9, а именно, построение по каноническому разбиению пространства X нового метрического пространства V, будет использована нами для реализации локальной изометрии в пространстве Громова–Хаусдорфа. Однако, непосредственное использование этого предложения не дает желаемых результатов. Дело в том, что описанная конструкция метрики ρ зависит от выбора нумерации элементов канонического разбиения точками пространства M, а эта нумерация, вообще говоря, неоднозначна. Один из примеров был приведен в замечании 3.7. Другой очевидный пример получается, если в качестве M взять более общее метрическое пространство с нетривиальной группой симметрий, например, такое M, в котором все ненулевые расстояния равны между собой.

Тем не менее, когда M состоит не более чем из двух точек, неоднозначность нумерации не мешает. Таким образом, дальнейшее изложение разбивается на две части. Сначала мы отдельно изучим случай не более чем двухточечных M, а потом, для $\#M \ge 3$, введем на M дополнительные ограничения в виде $e(M) > 0$, что, как было сказано в замечании 3.7, гарантирует нам однозначность нумерации элементов канонического разбиения (при достаточно малых ε).

3.2 Случай пространств, состоящих из одной или двух точек

Пусть сначала $M = \Delta_1$, тогда, в обозначениях предложения 3.9, $N = \Delta_1 = M$. В силу замечания 3.3, на ε ограничений сверху нет, и каноническое разбиение пространства X состоит из одного элемента, а именно, $X_1 = X$. Таким образом, функция ρ совпадает с исходной метрикой на X, и, значит, V — это то же самое метрическое пространство X. Следовательно, отображение $X \to V$ определено однозначно и является тождественным отображением из $U_\varepsilon(\Delta_1)$ в себя. Это отображение мы обозначим через $D_{M,N,\varepsilon}$.

Пусть теперь $M = \{1,2\}$, $N = \{1,2\}$ и $0 < \varepsilon \le \min\{s(M)/2, 2s(N)/3\}$. Отметим, что в силу $t(N) = \infty$, ограничения на ε ровно такие же, как и в предложении 3.9. Как было сказано в замечании 3.7, у канонического разбиения $\{A,B\}$ пространства X имеется две нумерации. Однако при каждой из этих нумераций пространство $V \in \mathcal{M}$ из предложения 3.9 одно и то же. Тем самым, мы построили отображение $D_{M,N,\varepsilon}\colon U_\varepsilon(M) \to U_\varepsilon(N)$.

Усилим ограничения на ε так, чтобы можно было применить предложение 3.8, а именно, потребуем выполнения $0 < \varepsilon \le \min\{s(M)/4, 2s(N)/3\}$. Выберем произвольные $X, Y \in U_\varepsilon(M)$ и положим $V = D_{M,N,\varepsilon}(X)$, $W = D_{M,N,\varepsilon}(Y)$. Пусть $\{X_1, X_2\}$ и $\{Y_1, Y_2\}$ — канонические разбиения соответственно X и Y относительно M, и $R \in \mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$. По предложению 3.8, существует биекция $\psi\colon M \to M$ такая, что для некоторых $R_i \in \mathcal{R}(X_i, Y_{\psi(i)})$ выполняется $R = R_1 \sqcup R_2$. Следовательно,

$$2d_{GH}(X,Y) = \max\{\operatorname{dis} R_1,\, \operatorname{dis} R_2,\, \big||x_1x_2| - |y_1y_2|\big| : (x_1,y_1) \in R_1,\, (x_2,y_2) \in R_2\}.$$

Так как V и W отличаются от X и Y лишь функциями расстояния, R можно также рассматривать как элемент $\mathcal{R}(V,W)$. Так как при переходе к V и W метрики на X_i и Y_i не изменились, не изменились также и $\operatorname{dis} R_i$. Кроме того, расстояния $|x_1x_2|$ и $|y_1y_2|$ изменились на одну и ту же величину $|12|_N - |12|_M$, поэтому величины $\big||x_1x_2| - |y_1y_2|\big|$ также сохранились. Отсюда вытекает, что для R, рассматриваемого как элемент из $\mathcal{R}(V,W)$, искажение такое же, как и у исходного R, поэтому $d_{GH}(V,W) \le d_{GH}(X,Y)$.

“Симметризуем” теперь условие на ε, т.е. потребуем, чтобы выполнялось

$$0 < \varepsilon \le \min\{s(M)/4, s(N)/4\},$$

тогда также будет корректно определено отображение $D_{N,M,\varepsilon}\colon U_\varepsilon(N)\to U_\varepsilon(M)$, являющееся, как легко видеть, обратным к $D_{M,N,\varepsilon}$. Следовательно, $d_{GH}(X,Y)\le d_{GH}(V,W)$, тем самым, мы получаем следующий результат.

Предложение 3.10. *Пусть $M=\{1,\dots,n\}$ и $N=\{1,\dots,n\}$ — метрические пространства, $n\le 2$, и $0<\varepsilon\le\min\{s(M)/4,e(M)/4\}$. Тогда отображение $D_{M,N,\varepsilon}\colon U_\varepsilon(M)\to U_\varepsilon(N)$ является изометрией.*

3.3 Случай пространств, состоящих из трех и более точек

Следующее предложение гарантирует, при определенных предположениях, единственность нумерации канонического разбиения.

Предложение 3.11. *Пусть $M=\{1,\dots,n\}$ — метрическое пространство, у которого $n\ge 3$ и $e(M)>0$. Выберем произвольное $0<\varepsilon\le\frac12\min\{s(M),e(M)\}$, любое $X\in\mathcal{M}$, $2d_{GH}(M,X)<\varepsilon$, и пусть $\{X_i\}$ и $\{X_i'\}$ — канонические разбиения X относительно M. Тогда $X_i=X_i'$ при каждом i.*

Доказательство. По предложению 3.2, разбиения $\{X_i\}$ и $\{X_i'\}$ отличаются нумерацией, т.е. существует такая перестановка $\varphi\colon M\to M$, что $X_i=X'_{\varphi(i)}$. Мы должны показать, что перестановка φ тождественная.

Предположим противное, т.е. что для некоторого j выполняется $X_j=X_i'$, $i\ne j$. Так как $n>0$, то существует $k\notin\{i,j\}$. Положим $X_p'=X_k$. Так как $k\ne j$, то $p\ne i$. Кроме того, $i\ne j$ и $i\ne k$, поэтому $\{j,k\}$ и $\{i,p\}$ — различные пары, откуда $\bigl||jk|-|ip|\bigr|\ge e(M)\ge\min\bigl\{s(M),e(M)\bigr\}\ge 2\varepsilon$. Но, по условию, для любых $x_j\in X_j=X_i'$ и $x_k\in X_k=X_p'$ выполняется $\bigl||x_jx_k|-|jk|\bigr|<\varepsilon$ и $\bigl||x_jx_k|-|ip|\bigr|<\varepsilon$, откуда

$$\bigl||jk|-|ip|\bigr|=\bigl||jk|-|x_jx_k|+|x_jx_k|-|ip|\bigr|\le\bigl||x_jx_k|-|jk|\bigr|+\bigl||x_jx_k|-|ip|\bigr|<2\varepsilon,$$

противоречие. □

Следующий результат доказывает аналогично предложению 3.11.

Предложение 3.12. *Пусть $M=\{1,\dots,n\}$ — метрическое пространство, $n\ge 3$, $e(M)>0$. Выберем произвольное $0<\varepsilon\le\frac14\min\bigl\{s(M),\,e(M)\bigr\}$, любые $X,Y\in\mathcal{M}$, $2d_{GH}(M,X)<\varepsilon$, $2d_{GH}(M,Y)<\varepsilon$, и пусть $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ обозначают канонические разбиения соответственно X и Y относительно M. Тогда для каждого $R\in\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$ существуют $R_i\in\mathcal{R}(X_i,Y_i)$ такие, что $R=\sqcup_{i=1}^nR_i$.*

Доказательство. По предложению 3.8, существует биекция $\psi\colon M\to M$ и $R_i\in\mathcal{R}(X_i,Y_{\psi(i)})$ такие, что $R=\sqcup_{i=1}^nR_i$. Мы должны доказать, что ψ — тождественное отображение.

Предположим противное, т.е. что для некоторого j выполняется $\psi(j)=i$, $i\ne j$. Так как $n>0$, то существует $k\notin\{i,j\}$. Положим $p=\psi(k)$. Так как $k\ne j$, то $p\ne i$. Кроме того, $i\ne j$ и $i\ne k$, поэтому $\{j,k\}$ и $\{i,p\}$ — различные пары, откуда $\bigl||jk|-|ip|\bigr|\ge s(M)\ge\min\bigl\{s(M),e(M)\bigr\}\ge 4\varepsilon$. Но, по условию, для любых $x_j\in X_j$, $x_k\in X_k$, $y_i\in R(x_j)\subset Y_i$, $y_p\in R(x_k)\subset Y_p$ выполняется $\bigl||y_iy_p|-|ip|\bigr|<\varepsilon$, $\bigl||x_jx_k|-|jk|\bigr|<\varepsilon$, $\bigl||x_jx_k|-|y_iy_p|\bigr|<2\varepsilon$, где последнее неравенство имеет место в силу того, что (x_j,y_i), $(x_k,y_p)\in R$ и $\operatorname{dis}R=2d_{GH}(X,Y)\le 2d_{GH}(X,M)+2d_{GH}(M,Y)<2\varepsilon$.

Из сказанного выше получаем следующую оценку:

$$\big||jk|-|ip|\big| = \big||jk|-|x_jx_k|+|x_jx_k|-|y_iy_p|+|y_iy_p|-|ip|\big| \le \\ \le \big||jk|-|x_jx_k|\big| + \big||x_jx_k|-|y_iy_p|\big| + \big||y_iy_p|-|ip|\big| < 4\varepsilon,$$

противоречие. □

Предложение 3.13. *В обозначениях предложения* 3.9*, пусть дополнительно известно, что* $e(M)>0$ *и* $0<\varepsilon\le\min\{s(M)/2, e(M)/2, 2s(N)/3, t(N)/3\}$*, тогда метрика* ρ *и пространство* V *определены однозначно.*

Доказательство. Это вытекает из предложения 3.11, которое гарантирует, что каноническое разбиение пространства X определено однозначно. □

3.4 Основные результаты

Обозначение 3.14. В предложении 3.13 мы, для пространств $M=\{1,\dots,n\}$, $N=\{1,\dots,n\}$, $n\ge 3$, и достаточно малых $\varepsilon>0$, построили отображение из $U_\varepsilon(M)\subset\mathcal{M}$ в $U_\varepsilon(N)\subset\mathcal{M}$, сопоставляющее каждому пространству $X\in U_\varepsilon(M)$ пространство, получающееся из X следующей заменой метрики: если $\{X_i\}$ — каноническое разбиение пространства X, и $x\in X_i$, $x'\in X_j$, то к расстоянию $|xx'|$ прибавляется $|ij|_N-|ij|_M$. Полученное отображение, как и в случае $n\le 2$, будем обозначать через $D_{M,N,\varepsilon}$.

Теорема 3.1. *Пусть* $M=\{1,\dots,n\}$ *и* $N=\{1,\dots,n\}$ *— метрические пространства общего положения, и* $0<\varepsilon\le\min\{s(M)/4, e(M)/4, t(M)/3, s(N)/4, e(N)/4, t(N)/3\}$*. Тогда отображение* $D_{M,N,\varepsilon}\colon U_\varepsilon(M)\to U_\varepsilon(N)$ *является изометрией.*

Доказательство. Заметим, что при $n\le 2$ условие теоремы совпадает с условием предложения 3.10, поэтому в этом случае теорема доказана. Пусть теперь $n\ge 3$. Дальнейшие рассуждения очень похожи на проведенные в разделе 3.2.

Выберем произвольные $X,Y\in U_\varepsilon(M)$ и положим $V=D_{M,N,\varepsilon}(X)$, $W=D_{M,N,\varepsilon}(Y)$. Пусть $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ — канонические разбиения соответственно X и Y относительно M, и $R\in\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$. По предложению 3.12, существуют $R_i\in\mathcal{R}(X_i,Y_i)$ такие, что $R=\sqcup R_i$. Следовательно,

$$2d_{GH}(X,Y)=\max_{i,j,k}\{\operatorname{dis}R_k,\ \big||x_ix_j|-|y_iy_j|\big| : (x_i,y_i)\in R_i,\ (x_j,y_j)\in R_j,\ i\ne j\}.$$

Так как V и W отличаются от X и Y лишь функциями расстояния, R можно также рассматривать как элемент $\mathcal{R}(V,W)$. Так как при переходе к V и W метрики на X_i и Y_i не изменились, не изменились также и $\operatorname{dis}R_i$. Кроме того, для каждых $i\ne j$ расстояния $|x_ix_j|$ и $|y_iy_j|$ изменились на одну и ту же величину $|ij|_N-|ij|_M$, поэтому величины $\big||x_ix_j|-|y_iy_j|\big|$ также сохранились. Отсюда вытекает, что для R, рассматриваемого как элемент из $\mathcal{R}(V,W)$, искажение такое же, как и у исходного R, поэтому $d_{GH}(V,W)\le d_{GH}(X,Y)$.

Осталось заметить, что, в силу симметричности сделанных предположений на M, N и ε, все проделанные выше построения можно обратить и построить $D_{N,M,\varepsilon}\colon U_\varepsilon(N)\to U_\varepsilon(M)$, которое, очевидно, будет обратным к $D_{M,N,\varepsilon}$. Следовательно, $d_{GH}(X,Y)\le d_{GH}(V,W)$, что и завершает доказательство теоремы. □

Заметим, что при $n \geq 3$ отображение $D_{M,N,\varepsilon}$ существенно зависит от нумерации точек пространств M и N. В частности, если в качестве N брать M, но с другими нумерациями точек, мы получим нетривиальные отличающиеся друг от друга изометрии из $U_\varepsilon(M)$ на себя. Действительно, если выбрать в $U_\varepsilon(M)$ такое пространство X, что компоненты его канонического разбиения состоят из разного конечного числа точек, скажем $\#X_i = i$, то образы такого X при отображениях $D_{M,N,\varepsilon}$ не будут изометричны, так как никакая изометрия X не может нетривиально переставлять $\{X_i\}$.

Пусть S_n — группа перестановок множества $\{1,\ldots,n\}$, тогда для каждого $\tau \in S_n$ через M^τ обозначим метрическое пространство M, в котором точка i имеет номер $\tau(i)$. Сказанное выше приводит к следующему результату.

Следствие 3.15. *Пусть $M = \{1,\ldots,n\}$, $n \geq 3$, — метрическое пространство общего положения. Тогда для достаточно маленьких $\varepsilon > 0$ и любых $\tau, \sigma \in S_n$, $\tau \neq \sigma$, изометрии $D_{M,M^\tau,\varepsilon}$ и $D_{M,M^\sigma,\varepsilon}$ шаровой окрестности $U_\varepsilon(M)$ различны. Таким образом, группа изометрий шаровой окрестности $U_\varepsilon(M)$ содержит подгруппу, изоморфную группе перестановок S_n.*

Так как, по предложению 2.4, умножение всех расстояний метрических компактов на $\lambda > 0$ представляет собой гомотетию пространства Громова–Хаусдорфа с центром в одноточечном пространстве Δ_1, а ограничение на ε в теореме 3.1 является 1-однородным по λ, то каждая изометрия $D_{M,N,\varepsilon}\colon U_\varepsilon(M) \to U_\varepsilon(N)$ порождает изометрию $D_{\lambda M,\lambda N,\lambda\varepsilon}\colon U_{\lambda\varepsilon}(\lambda M) \to U_{\lambda\varepsilon}(\lambda N)$ и, как следствие, конусов $CU_\varepsilon(M)$ и $CU_\varepsilon(N)$ (на Δ_1 мы продолжаем отображение по непрерывности).

Следствие 3.16. *Пусть $M = \{1,\ldots,n\}$ и $N = \{1,\ldots,n\}$ — метрические пространства общего положения, $n \geq 3$, тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует изометрия конусов $CU_\varepsilon(M)$ и $CU_\varepsilon(N)$, переводящая Δ_1 в себя.*

Список литературы

[1] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Local structure of Gromov–Hausdorff space and isometric embeddings of finite metric spaces into the former space*, ArXiv e-prints, `arXiv:1604.07615` (2016).

[2] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov–Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.

[4] Chowdhury S., Memoli F. *Constructing Geodesics on the Space of Compact Metric Spaces.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.02385, 2016.

[5] `http://mathoverflow.net/questions/135184/for-which-metric-spaces-is-gromov-hausdorff-distance-actually-achieved?rq=1`

[6] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes.* ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655, 2016.