

Расстояние Громова–Хаусдорфа, неприводимые соответствия, проблема Штейнера и минимальные заполнения

Иванов А.О., Тужилин А.А.

21 апреля 2016 г.

Аннотация

Определены неприводимые соответствия, позволяющие эффективно вычислять расстояние Громова–Хаусдорфа. С помощью неприводимых соответствий показано, что семейство всех не более чем трехточечных метрических пространств, наделенное метрикой Громова–Хаусдорфа, изометрично многогранному конусу в пространстве $\mathbb{R}^3$ с тах-нормой. Установлено, что в достаточно малых окрестностях трехточечных метрических пространств со строгими неравенствами треугольника минимальные деревья Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа являются минимальными заполнениями, т.е. их длину нельзя уменьшить, если граничное множество изометрично вложить в какое-нибудь другое объемлющее пространство. Построен пример трехточечной границы, состоящей из трехточечных пространств, для которой минимальное дерево Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа не является минимальным заполнением. Тем самым, показано, что суботношение Штейнера пространства Громова–Хаусдорфа меньше 1. Идея неприводимых соответствий позволила написать существенно более быстрый алгоритм вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа между конечными метрическими пространствами. С помощью численного эксперимента оценку сверху на суботношение Штейнера удалось уточнить: оказывается, оно меньше 0.857.

Введение

Расстояние Громова–Хаусдорфа между произвольными метрическими пространствами измеряет “степень похожести” этих пространств (точное определение см. ниже). Вычисление этого расстояния — задача довольно сложная. Имеется ряд методов, позволяющих существенно продвинуться в этом направлении. Одним из них является использование техники соответствий.

В настоящей статье мы расскажем об этой технике, приведем примеры ее применения, а также определим класс неприводимых соответствий и покажем, как последние позволяют эффективно вычислять расстояния Громова–Хаусдорфа.

В качестве приложения мы покажем, что семейство всех трехточечных метрических пространств изометрично многогранному конусу в $\mathbb{R}_\infty^3$ — пространстве $\mathbb{R}^3$ с нормой $\|(x^1, x^2, x^3)\| = \max |x^i|$. Наличие такой изометрии приводит к интересным последствиям, связанным с проблемой Штейнера.

Напомним, что минимальным деревом Штейнера или кратчайшим деревом, соединяющим конечное множество M точек метрического пространства X , называется самое короткое среди

всех деревьев, построенных на конечных множествах $V \subset X$, $V \supset M$, см. подробности в [1] или [2]. При этом множество M называется границей или граничным множеством кратчайшего дерева. Заметим, что не для всякого M такое дерево существует, хотя “его длину” (точную нижнюю грань длин деревьев) вычислить можно всегда. В силу того, что V может содержать дополнительные точки, длина минимального дерева Штейнера зависит не только от расстояний между точками из M , но и от геометрии объемлющего пространства X . Изометрично вкладывая данное метрическое пространство M в различные метрические пространства X и минимизируя длины соответствующих кратчайших деревьев, мы приходим к величине, которая называется длиной минимального заполнения для M , см. [3].

Интересная задача — выяснить, в каких метрических пространствах длина минимального дерева Штейнера для любой границы совпадает с длиной минимального заполнения. Одним из примеров таких пространств является $\mathbb{R}_\infty^n$. Соответствующий результат был доказан З.Н.Овсянниковым [8]. Полная классификация банаховых пространств с таким свойством, в дополнительном предположении, что для каждого конечного подмножества кратчайшее дерево существует, была получена Б.Б.Бедновым и П.А.Бородиным в [4].

Построенная нами изометрия между семейством трехточечных метрических пространств и конусом в $\mathbb{R}_\infty^3$ привел нас к гипотезе, что и в пространстве $\mathcal{M}$ метрических компактов с метрикой Громова–Хаусдорфа (рассматриваемых с точностью до изометрии) длины кратчайших деревьев могут быть равными длинам минимальных заполнений.

К нашему удивлению, мы построили контрпример к этой гипотезе: оказывается, даже для троек трехточечных метрических пространств минимальное дерево Штейнера может оказаться длиннее соответствующего минимального заполнения. В [3] мы ввели понятие суботношения Штейнера, которое, в некотором смысле, изменяет “вариационную кривизну” объемлющего пространства, т.е. то, во сколько раз минимальное заполнение может быть короче кратчайшего дерева (на границах, лежащих в этом пространстве). Таким образом, в настоящей статье мы также показали, что суботношение Штейнера пространства Громова–Хаусдорфа меньше 1, а, точнее, меньше 0.857.

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$.

Пусть $\mathcal{P}(X)$ — семейство всех непустых подмножеств пространства X . Для $A, B \in \mathcal{P}(X)$ положим

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} |ab|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} |ab|\right\}.$$

Величина $d_H(A, B)$ называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B* .

Пусть $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{P}(X)$ — множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X .

Предложение 1.1 ([5]). *Ограничение d_H на $\mathcal{H}(X)$ является метрикой.*

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z) , состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y' , изометричных соответственно X и Y , назовем *реализацией пары (X, Y)* . *Расстоянием Громова–Хаусдорфа $d_{GH}(X, Y)$ между X и Y* называется точная нижняя грань чисел r , для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \leq r$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех компактных метрических пространств (рассматриваемых с точностью до изометрии), наделенное метрикой Громова–Хаусдорфа. Это $\mathcal{M}$ часто называют *пространством Громова–Хаусдорфа*.

Предложение 1.2 ([5]). *Ограничение d_{GH} на $\mathcal{M}$ является метрикой.*

Приведем эквивалентное определение расстояния Громова–Хаусдорфа, более приспособленное для конкретных вычислений. Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех непустых отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X, Y)$. Если $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ и $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$ — канонические проекции, т.е. $\pi_X(x, y) = x$ и $\pi_Y(x, y) = y$, то теми же символами будем обозначать ограничения этих отображений на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$.

Отношение R между X и Y называется *соответствием*, если ограничение канонических проекций π_X и π_Y на R — сюръекции. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Пусть X и Y — метрические пространства, тогда для каждого отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ определено его *искажение* $\text{dis } \sigma$:

$$\text{dis } \sigma = \sup \left\{ \left| |xx'| - |yy'| \right| : (x, y) \in \sigma, (x', y') \in \sigma \right\}.$$

Имеет место следующий хорошо известный результат.

Предложение 1.3 ([5]). *Для любых метрических пространств X и Y выполняется*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R \mid R \in \mathcal{R}(X, Y) \}.$$

Определение 1.4. Соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \text{dis } R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y)$.

Предложение 1.5 ([6]). *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\text{opt}}(X, Y) \neq \emptyset$.*

2 Соответствия и их свойства

Всюду ниже в этом разделе, если не оговорено противное, X и Y обозначают произвольные непустые множества. Будем смотреть на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X . Тогда, по аналогии с тем, как это принято для отображений, для каждого $x \in X$ определен его образ $\sigma(x) = \{y \in Y \mid (x, y) \in \sigma\}$; для каждого $A \subset X$ определено $\sigma(A)$ как объединение образов элементов из A ; для каждого $y \in Y$ определен его прообраз $\sigma^{-1}(y) = \{x \in X \mid (x, y) \in \sigma\}$; для каждого $B \subset Y$ определен его прообраз как объединение прообразов его элементов.

Пусть $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ — произвольное отношение. Для каждого $x \in X$ определим его *кратность* $k_\sigma(x)$ в σ как мощность множества $\sigma(x)$. Аналогично определяется *кратность* $k_\sigma(y)$ в σ элемента $y \in Y$.

2.1 Неприводимые соответствия

Отношение включения задает на $\mathcal{R}(X, Y)$ частичный порядок: $R_1 \leq R_2$, если и только если $R_1 \subset R_2$.

Определение 2.1. Минимальные в этом порядке соответствия назовем *неприводимыми*, а все остальные — *приводимыми*. Множество всех неприводимых соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}^0(X, Y)$.

Таким образом, соответствие приводимо тогда и только тогда, когда из него можно так выкинуть некоторые пары (x, y) , что полученное в результате отношение останется соответствием. Отметим, что график сюръективного отображения является примером неприводимого соответствия.

Предложение 2.2. *Соответствие R является неприводимым, если и только если для каждого $(x, y) \in R$ имеем $\min(k_R(x), k_R(y)) = 1$.*

Доказательство. Пусть сначала R — неприводимое соответствие, и пусть утверждение предложения не выполняется, т.е. для некоторого $(x, y) \in R$ оба $k_R(x)$ и $k_R(y)$ не меньше 2. Это означает, что существуют $x' \in X$, $x' \neq x$, и $y' \in Y$, $y' \neq y$, для которых $(x', y) \in R$ и $(x, y') \in R$. Но тогда $R \setminus \{(x, y)\}$ по-прежнему является соответствием, что противоречит минимальности R .

Обратно, пусть для каждого $(x, y) \in R$ выполняется $\min(k_R(x), k_R(y)) = 1$, но R не является неприводимым. Тогда существует $(x, y) \in R$ такое, что $R \setminus \{(x, y)\}$ также является соответствием. Но тогда имеются $x' \in X$ и $y' \in Y$ такие, что $(x', y) \in R$ и $(x, y') \in R$, поэтому $k_R(x) > 1$ и $k_R(y) > 1$, противоречие. $\square$

Всюду ниже в данном разделе R обозначает неприводимое соответствие между X и Y , т.е. $R \in \mathcal{R}^0(X, Y)$.

Следствие 2.3. *Выберем из X произвольные x и $x' \neq x$ и предположим, что $k_R(x) > 1$. Тогда $R(x) \cap R(x') = \emptyset$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. существует такой $y \in Y$, что $(x, y) \in R$ и $(x', y) \in R$. Но тогда для пары $(x, y) \in R$ выполняется одновременно $k_R(y) > 1$ и $k_R(x) > 1$, что противоречит предложению 2.2. $\square$

Следствие 2.4. *Пусть $\#X \geq 2$ и $\#Y \geq 2$, тогда не существует $x \in X$ такого, что $\{x\} \times Y \subset R$.*

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим отличный от x элемент $x' \in X$ и любой $y \in R(x')$, тогда обе кратности $k_R(x)$ и $k_R(y)$ больше или равны 2, противоречие с предложением 2.2. $\square$

Конструкция 2.5. Пусть $R \in \mathcal{R}^0(X, Y)$. Для каждого $x \in X$ положим $X_1 = \{x \in X : k_R(x) = 1\}$ и $X_2 = X \setminus X_1$. Аналогично, для каждого $y \in Y$ положим $Y_1 = \{y \in Y : k_R(y) = 1\}$ и $Y_2 = Y \setminus Y_1$.

По предложению 2.2, имеем $Y'_1 := R(X_2) \subset Y_1$ и $X'_1 := R^{-1}(Y_2) \subset X_1$. Далее, положим $X''_1 = X_1 \setminus X'_1$ и $Y''_1 = Y_1 \setminus Y'_1$. Итак, мы получили разбиения

$$X = X'_1 \sqcup X''_1 \sqcup X_2 \text{ и } Y = Y'_1 \sqcup Y''_1 \sqcup Y_2.$$

По построению, каждое $(x, y) \in R$ может принадлежать ровно одному из следующих множеств:

$$X'_1 \times Y_2, X''_1 \times Y'_1, X_2 \times Y'_1.$$

Более того, ограничение R на $X_1'' \times Y_1''$ — биекция.

Далее, для каждого $x \in X$ положим $Y_x = R(x)$, а для каждого $y \in Y$ пусть $X_y = R^{-1}(y)$. По следствию 2.3, для любых различных $x_1, x_2 \in X_2$ множества Y_{x_1} и Y_{x_2} не пересекаются; аналогично, для любых различных $y_1, y_2 \in Y_2$ множества X_{y_1} и X_{y_2} также не пересекаются. Положим $\hat{X}_1' = \{X_y\}_{y \in Y_2}$ и $\hat{Y}_1' = \{Y_x\}_{x \in X_2}$, тогда $\hat{X}_1'$ и $\hat{Y}_1'$ являются разбиениями X_1' и Y_1' соответственно, а отношение R индуцирует биекции между $\hat{X}_1'$ и Y_2 , а также между X_2 и $\hat{Y}_1'$.

Итак, мы доказали следующий результат.

Теорема 1. *Каждое неприводимое соответствие $R \in \mathcal{R}^0(X, Y)$ порождает разложения $X = X_1' \sqcup X_1'' \sqcup X_2$ и $Y = Y_1' \sqcup Y_1'' \sqcup Y_2$, а также разбиения $\hat{X}_1'$ и $\hat{Y}_1'$ множеств X_1' и Y_1' соответственно. При этом R индуцирует биекцию $\hat{R}$ между множествами $\hat{X} = \hat{X}_1' \sqcup X_1'' \sqcup X_2$ и $\hat{Y} = Y_2 \sqcup Y_1'' \sqcup \hat{Y}_1'$ такую, что $(x, y) \in R$, если и только если или $x \in \hat{x} \in \hat{X}_1'$, $\{y\} = \hat{R}(\hat{x}) \in Y_2$, или $x \in X_1''$, $y = \hat{R}(y) \in Y_1''$, или $x \in X_2$, $y \in \hat{y} = \hat{R}(x) \in \hat{Y}_1'$.*

Приводимый ниже рисунок 1 иллюстрирует эту теорему.

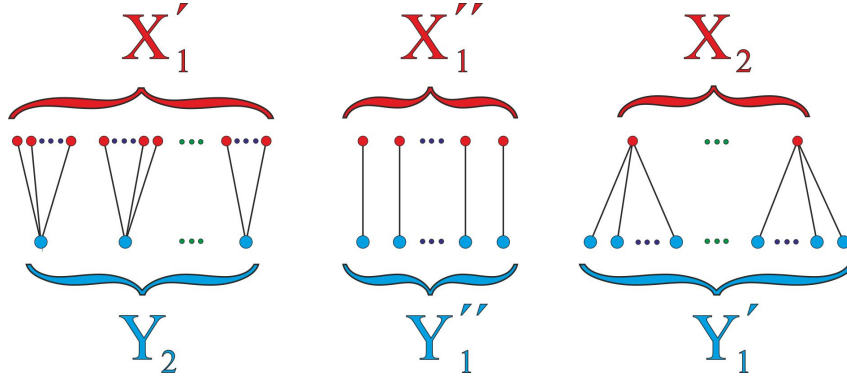


Рис. 1: Структура неприводимого соответствия.

Теорема 2. *Для каждого $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ существует $R_0 \in \mathcal{R}^0(X, Y)$ такое, что $R_0 \subset R$.*

Замечание 2.6. Можно было бы воспользоваться стандартной техникой, основанной на лемме Цорна, но тогда нужно гарантировать, что каждая цепочка $R_1 \supset R_2 \supset \dots$ имеет нижнюю грань, т.е. такое соответствие, которое принадлежит всем R_i . Однако это, вообще говоря, не так. В качестве примера рассмотрим $X = Y = \mathbb{N}$ и положим $R_k = \{(i, j) : \max(i, j) \geq k\}$. Ясно, что каждое R_k лежит в $\mathcal{R}(X, Y)$, и что эти R_k образуют убывающую цепочку. Однако $\cap R_k = \emptyset$, так как для любых i и j существует k , для которого $i < k$ и $j < k$, поэтому $(i, j) \notin R_k$.

Доказательство теоремы 2. Выберем для каждого $x \in X$ любой один элемент (x, y) из R и определим отображение $f: X \rightarrow Y$, положив $y = f(x)$. Отождествив отображение с его графиком, заметим, что $f \subset R$. Положим $Y_1 = f(X)$ и $Y_2 = Y \setminus Y_1$.

Выберем теперь для каждого $y \in Y_2$ любой один элемент (x, y) из R и определим отображение $g: Y_2 \rightarrow X$, положив $x = g(y)$. Вновь, отождествив отображение с его графиком, заметим, что $g^{-1} \subset R$. Положим $X_2 = g(Y_2)$ и $X_1 = X \setminus X_2$.

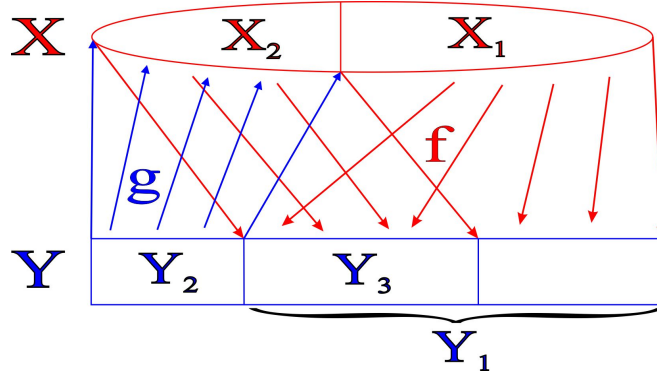


Рис. 2: Построение неприводимого подсоответствия.

Пусть $Y_3 = f(X_2)$. Ясно, что $Y_3 \subset Y_1$, см. рис. 2.

Используя f и g , определим еще одно отношение: $h = f \cup g^{-1}$. Очевидно, $h \in \mathcal{R}(X, Y)$.

Определим теперь отношение R_0 , выкинув из h некоторые пары (x, y) для каждого $y \in Y_3$ по следующему правилу:

- (1) если $h^{-1}(y) \cap X_1 \neq \emptyset$, то выкидываем $(h^{-1}(y) \cap X_2) \times \{y\}$;
- (2) если $h^{-1}(y) \cap X_1 = \emptyset$, т.е. $h^{-1}(y) \subset X_2$, то выкидываем все элементы, попавшие в $h^{-1}(y) \times \{y\}$, кроме любого одного.

Лемма 2.7. Имеем $R_0 \in \mathcal{R}(X, Y)$.

Доказательство. Для каждого $y \in Y \setminus Y_3$ мы ничего не выкидывали, поэтому для таких y всегда имеются $x \in X$, для которых $(x, y) \in R_0$.

Пусть теперь $y \in Y_3$. Если $h^{-1}(y) \cap X_1 \neq \emptyset$, то выкидывали только (x, y) с $x \in X_2$, поэтому остался $x \in X_1$, для которого пару $(x, y) \in h$ мы не выкинули и, значит, она лежит в R_0 . Если же $h^{-1}(y) \cap X_1 = \emptyset$, то мы выкидывали все элементы, попавшие в $h^{-1}(y) \times \{y\}$, кроме одного, поэтому для невыкинутого $(x, y) \in h$ имеем $(x, y) \in R_0$.

Разберемся теперь с $x \in X$. Если $x \in X_1$, то пары $(x, y) \in h$ мы не выбрасывали. Если же $x \in X_2$, то, так как $X_2 = \text{im } g$, существует $y \in Y_2$, для которого $x = g(y)$ и, значит, $(x, y) \in h$, но такие пары мы не выкидывали из h , поэтому $(x, y) \in R_0$. $\square$

Лемма 2.8. Имеем $R_0 \in \mathcal{R}^0(X, Y)$.

Доказательство. Достаточно показать, что для каждой пары $(x, y) \in R_0$ или x , или y не входят в другие пары.

Если $y \in Y_2$, то y входит только в пару $(g(y), y)$. Если $y \in Y_1 \setminus Y_3$, то x входит только в пару $(x, f(x))$.

Наконец, пусть теперь $y \in Y_3$. Если $h^{-1}(y) \cap X_1 \neq \emptyset$, то все пары вида (x', y) , $x' \in X_2$, мы выкинули, так что $x \in X_1$, однако каждый такой x входит ровно в одну пару, а именно, в $(x, f(x))$. Если же $h^{-1}(y) \cap X_1 = \emptyset$, то мы выкинули все пары (x', y) , $x' \in h^{-1}(y) \subset X_2$, кроме одной, так что y входит ровно в одну такую пару. $\square$

Эта лемма и завершает доказательство теоремы. $\square$

Суммирую сказанное, получаем следующий результат.

Следствие 2.9. *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf \{ \text{dis } R : R \in \mathcal{R}^0(X, Y) \}.$$

Обозначим через $\mathcal{R}_{\text{opt}}^0(X, Y)$ множество оптимальных неприводимых соответствий между метрическими пространствами X и Y . Из 1.5 и теоремы 2 непосредственно выводится следующий результат.

Следствие 2.10. *Если $X, Y \in \mathcal{M}$, то $\mathcal{R}_{\text{opt}}^0(X, Y) \neq \emptyset$.*

Применим разработанную выше технику для изучения геометрии подпространств пространства Громова–Хаусдорфа.

Пример 2.11. Пусть $X = \{x_1, x_2\}$ и $Y = \{y_1, y_2\}$, тогда, по следствию 2.4, $\mathcal{R}^0(X, Y)$ состоит только из биекций, поэтому

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{||x_1x_2| - |y_1y_2||}{2}.$$

Тем самым, множество классов изометричности двухточечных метрических пространств, наделенное расстоянием Громова–Хаусдорфа, является метрическим пространством, изометричным открытому лучу $x > 0$ евклидовой прямой $\mathbb{R}$ с координатой x .

Пример 2.12. Рассмотрим два трехточечных пространства $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ и $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Положим $r_{ij} = |x_i x_j|$ и $\rho_{ij} = |y_i y_j|$. Пусть длины сторон первого треугольника равны $a_1 \leq b_1 \leq c_1$, а второго равны $a_2 \leq b_2 \leq c_2$ (сторона длины a_k лежит против первой вершины, длины b_k — против второй вершины, а длины c_k — против третьей вершины). Покажем, что

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \max \{ |a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|, |c_1 - c_2| \}.$$

Опишем сначала неприводимые соответствия $R \in \mathcal{R}^0(X, Y)$, не являющиеся биекциями. Без ограничения общности, существует точка $x \in X$, для которой $\deg_R(x) > 1$. По 2.4, $\deg_R(x) < 3$, откуда $\deg_R(x) = 2$. По 2.3, точки из $X \setminus \{x\}$ соединяются только с точкой одноточечного множества $X \setminus R(x)$. Таким образом, если положить $x = x_i$, оставшиеся точки из $X \setminus \{x\}$ обозначить через x_j и x_k , точки множества $R(x_i)$ обозначить через y_l и y_m , а оставшуюся точку из Y — через y_n , то полученное соответствие будет иметь следующий вид:

$$R = \{ (x_i, y_l), (x_i, y_m), (x_j, y_n), (x_k, y_n) \}.$$

Искажение $\text{dis } R$ такого соответствия равно

$$\max \{ r_{jk}, \rho_{lm}, |r_{ij} - \rho_{ln}|, |r_{ij} - \rho_{mn}|, |r_{ik} - \rho_{ln}|, |r_{ik} - \rho_{mn}| \}.$$

Заметим, что $\max \{ r_{jk}, \rho_{lm} \} \geq |r_{jk} - \rho_{lm}|$, поэтому

$$\text{dis } R \geq \max \{ |r_{jk} - \rho_{lm}|, |r_{ij} - \rho_{nl}|, |r_{ik} - \rho_{nm}| \} = \text{dis } R_1,$$

где R_1 — биекция $\{(x_i, y_n), (x_j, y_l), (x_k, y_m)\}$. Таким образом, при вычислении $d_{GH}(X, Y)$ достаточно рассматривать только соответствия, являющиеся биекциями.

Отметим, что каждая биекция между X и Y порождает биекцию между сторонами треугольников X и Y , максимум модулей разностей длин которых и есть искажение этой биекции. Так что будем теперь для удобства представлять, что R — это биекция между сторонами треугольника X и треугольника Y . Напомним, что выше мы обозначили длины сторон первого треугольника через $a_1 \leq b_1 \leq c_1$, а длины сторон второго — через $a_2 \leq b_2 \leq c_2$. Пусть R — монотонная биекция, т.е. сохраняющая порядок длин сторон. Тогда $\text{dis } R = \max\{|a_1 - a_2|, |b_1 - b_2|, |c_1 - c_2|\}$. Мы покажем, что замена этой биекции на любую другую биекцию R' не уменьшает искажения, что и завершит доказательство формулы, вычисляющей $d_{GH}(X, Y)$.

Пусть $\text{dis } R = |a_1 - a_2|$, и предположим, без ограничения общности, что $a_1 \leq a_2$. Тогда или $(a_1, a_2) \in R'$, и, значит, $\text{dis } R' \geq a_2 - a_1 = \text{dis } R$, или же R' принадлежит одна из пар (a_1, b_2) , (a_1, c_2) , так что снова $\text{dis } R' \geq a_2 - a_1 = \text{dis } R$. Аналогично рассматривается случай $\text{dis } R = |c_1 - c_2|$.

Пусть теперь $\text{dis } R = |b_1 - b_2|$. Вновь, без ограничения общности, предположим, что $b_1 \leq b_2$. Если $(b_1, b_2) \in R'$, то $\text{dis } R' \geq b_2 - b_1 = \text{dis } R$. Если пара (b_1, c_2) или (a_1, b_2) принадлежит R' , то снова $\text{dis } R' \geq \text{dis } R$. Поэтому осталось рассмотреть случай, когда (b_1, a_2) , $(c_1, b_2) \in R'$ и, значит, $(a_1, c_2) \in R'$. Но тогда $\text{dis } R' \geq c_2 - a_1 \geq b_2 - b_1 = \text{dis } R$, что и завершает доказательство формулы.

Таким образом, *семейство классов изометричности трехточечных метрических пространств, наделенное расстоянием Громова–Хаусдорфа, является метрическим пространством, изометричным многогранному конусу*

$$\{(a, b, c) \mid 0 < a \leq b \leq c \leq a + b\}$$

в пространстве $\mathbb{R}_\infty^3$. Соответствующая изометрия сопоставляет треугольнику со сторонами $a \leq b \leq c$ точку с координатами $1/2(a, b, c)$.

3 Кратчайшие сети в пространстве Громова–Хаусдорфа и минимальные заполнения

В настоящем разделе мы применим 2.12 для изучения проблемы Штейнера в пространстве Громова–Хаусдорфа $\mathcal{M}$, а также в его подпространствах $\mathcal{M}_n$, состоящих из всех метрических пространств, каждое из которых имеет не более чем n точек. Напомним основные определения.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф с множеством вершин V и множеством ребер E . Будем говорить, что граф G определен на метрическом пространстве X , если $V \subset X$. Для каждого такого графа определены *длины* $|e|$ его *ребер* $e = vw$ как расстояния $|vw|$ между концами v и w этих ребер, а также *длина* $|G|$ самого *графа* G как сумма длин всех его ребер.

Если $M \subset X$ произвольное конечное подмножество, и $G = (V, E)$ — граф на X , то будем говорить, что граф G *соединяет* M , если $M \subset V$. Точная нижняя грань длин связных графов, соединяющих $M \subset X$, называется *длиной минимального дерева Штейнера на M* или *длиной кратчайшего дерева на M* и обозначается через $\text{smt}(M, X)$. Каждый связный граф G , соединяющий M и такой, что $|G| = \text{smt}(M, X)$, является деревом и называется *минимальным деревом Штейнера на M* или *кратчайшим деревом на M* . Множество всех минимальных деревьев Штейнера на M обозначим через $\text{SMT}(M, X)$. Заметим, что множество $\text{SMT}(M, X)$

может быть пустым, а $\text{SMT}(M, X)$ и $\text{smt}(M, X)$ зависят не только от расстояний между точками из M , но и от устройства объемлющего пространства X : изометричные M , лежащие в разных метрических пространствах, могут соединяться кратчайшими деревьями разной длины. Подробности о теории кратчайших деревьев можно найти, например, в [1] или [2].

Предложение 3.1 ([7]). *Для каждого $M \subset \mathcal{M}_n$ имеем $\text{SMT}(M, \mathcal{M}) \neq \emptyset$. Более того, если $M = \{m_1, \dots, m_k\}$, $k \leq n$, и n_i — количество точек в пространстве m_i , а $N = n_1 + \dots + n_k - (k - 1)$, то существует $G = (V, E) \in \text{SMT}(M, \mathcal{M})$ такое, что $V \subset \mathcal{M}_N$.*

Замечание 3.2. Вторая часть 3.1 вытекает из явной конструкции, приведенной в доказательстве основной теоремы из [7].

Фиксируем теперь метрическое пространство M . Будем изометрично вкладывать его в различные метрические пространства X . “Кратчайшую” длину минимального дерева Штейнера назовем *длиной минимального заполнения M* и будем обозначать через $\text{mf}(M)$. Чтобы избежать проблем типа парадокса Кантора, дадим более аккуратное определение. Число $\text{mf}(M)$ — это точная нижняя грань чисел r , для которых существуют метрическое пространство X и изометричное вложение $\mu: M \rightarrow X$ такие, что $\text{smt}(\mu(M), X) \leq r$. Подробности о теории одномерных минимальных заполнений можно найти в [3].

Нам понадобится следующий результат о связи минимальных заполнений и кратчайших деревьев в $\mathbb{R}_\infty^n$, полученный З.Н. Овсянниковым [8]. Введем необходимые определения. Обозначим через ℓ_∞ пространство ограниченных последовательностей $x = \{x_i\}_{i=1}^\infty$ с нормой $\|x\| = \max_i |x_i|$. Очевидно, $\mathbb{R}_\infty^n$ изометрично вкладывается в ℓ_∞ как координатное подпространство. Далее, напомним, что отображение $f: X \rightarrow Y$ метрических пространств называется *нерастягивающим*, если $|f(x)f(x')| \leq |xx'|$ для любых $x, x' \in X$.

Предложение 3.3 (см. [9]). *Пусть M — конечное метрическое пространство, $K \subset M$ — его непустое подмножество, и $f: K \rightarrow \ell_\infty$ — произвольное нерастягивающее отображение. Тогда отображение f может быть продолжено до нерастягивающего отображения всего пространства M в ℓ_∞ , т.е. существует такое нерастягивающее отображение $g: M \rightarrow \ell_\infty$, что $g|_K = f$.*

Тот же результат выполнен для нерастягивающего отображения в конечномерное пространство $\mathbb{R}_\infty^n$.

Следствие 3.4. *Пусть M — конечное метрическое пространство, $K \subset M$ — его непустое подмножество, и $f: K \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n$ — произвольное нерастягивающее отображение. Тогда отображение f может быть продолжено до нерастягивающего отображения всего пространства M в $\mathbb{R}_\infty^n$, т.е. существует такое нерастягивающее отображение $g: M \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n$, что $g|_K = f$.*

Доказательство. Действительно, отождествим $\mathbb{R}_\infty^n$ с некоторым координатным подпространством в ℓ_∞ . Воспользовавшись 3.3, получим нерастягивающее отображение $g: M \rightarrow \ell_\infty$ такое, что $g|_K = f$. Спроецируем $g(M)$ на координатное подпространство $\mathbb{R}_\infty^n \subset \ell_\infty$. Так как проекция постоянна на $\mathbb{R}_\infty^n$ и не увеличивает расстояний, полученное в результате отображение $M \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n$ и есть искомое. $\square$

Предложение 3.5 (З.Н.Овсянников). *Каждое кратчайшее дерево в $\mathbb{R}_\infty^n$ является минимальным заполнением своей границы.*

Доказательство. Пусть $K \subset \mathbb{R}_\infty^n$ — произвольное конечное непустое подмножество. Рассмотрим изометричное вложение Куратовского [3] этого пространства в $\mathbb{R}_\infty^N$. Как показано в [3], следствие 3.3, его образ $K' \subset \mathbb{R}_\infty^N$ соединяется кратчайшим деревом Γ' , которое является одновременно минимальным заполнением пространства K' . Обозначим через $M' \subset \mathbb{R}_\infty^N$ множество вершин дерева Γ' с метрикой, индуцированной из $\mathbb{R}_\infty^N$. Рассмотрим обратное изометрическое вложение $K' \rightarrow K \subset \mathbb{R}_\infty^n$. В силу следствия 3.4, оно может быть продолжено до изометрического вложения $f: M' \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n$. Положим $M = f(M')$ и пусть Γ обозначает дерево на M , для которого f является изоморфизмом деревьев Γ' и Γ . Дерево Γ соединяет K , его длина равна длине дерева Γ' , поэтому Γ является минимальным заполнением K и, следовательно, Γ также является кратчайшим деревом на K . Так как длины всех кратчайших деревьев на одной и той же границе одинаковы, все кратчайшие деревья на K являются минимальными заполнениями. $\square$

В примере 2.12 мы фактически построили изометричное отображение $\nu: \mathcal{M}_3 \rightarrow \mathbb{R}_\infty^3$, образ которого — многогранный конус

$$\mathcal{C} = \{(a, b, c) \mid 0 \leq a \leq b \leq c \leq a + b\} \subset \mathbb{R}_\infty^3.$$

Внутренность $\text{Int } \mathcal{C}$ этого конуса соответствуют невырожденным трехточечным метрическим пространствам, т.е. тем, в которых все неравенства треугольника строгие. Легко показать, что для каждой точки $P \in \text{Int } \mathcal{C}$ существует такая окрестность $U_\varepsilon(P) \subset \mathbb{R}_\infty^3$, что для любого конечного $M \subset U_\varepsilon(P)$ и каждого $G = (V, E) \in \text{SMT}(M, \mathbb{R}_\infty^3)$ выполняется $V \subset \text{Int } \mathcal{C}$. Положим $V' = \nu^{-1}(V)$, а E' составим в точности из тех vw , для которых $\nu(v)\nu(w) \in E$. Таким образом, G' является деревом на M . По 3.5, дерево G — минимальное заполнение, поэтому, так как отображение ν изометрично, дерево G' также является минимальным заполнением и, значит, $G' \in \text{SMT}(\nu^{-1}(M), M)$. Итак, мы доказали следующий результат.

Теорема 3. *Пусть T — произвольное трехточечное метрическое пространство, в котором все неравенства треугольника строгие. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого конечного подмножества M окрестности $U_\varepsilon(T) \subset \mathcal{M}_3$ каждое минимальное дерево Штейнера $G \in \text{SMT}(M, M)$ является минимальным заполнением M .*

Оказывается, для “больших” граничных множеств минимальные деревья Штейнера в $\mathcal{M}$ уже не обязаны совпадать с минимальными заполнениями.

Пример 3.6. Рассмотрим трехточечные метрические пространства $A^i = \{a_1^i, a_2^i, a_3^i\}$, $i = 1, 2, 3$, в которых векторы ненулевых расстояний $\nu(A^i)$ задаются следующими формулами:

$$B^1 = \nu(A^1) = (8, 22, 29.5), \quad B^2 = \nu(A^2) = (11.5, 18, 29), \quad B^3 = \nu(A^3) = (12, 21.5, 33). \quad (*)$$

Пусть $S \in \mathbb{R}_\infty^3$ — точка с координатами $(10, 20, 31)$. Тогда для нее не выполняются неравенства треугольника, поэтому она не соответствует никакому трехточечному метрическому пространству, т.е. $\nu^{-1}(S) = \emptyset$.

Лемма 3.7 ([3]). *Для произвольного метрического пространства $X = \{P_1, P_2, P_3\}$, $\ell_i = |P_j P_k|$, $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$, минимальное заполнение представляет собой звезду с дополнительной вершиной Z , причем $|Z P_i| = (\ell_j + \ell_k - \ell_i)/2$, так что длина этого минимального заполнения равна $(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3)/2$, т.е. полупериметру треугольника X .*

Вернемся к нашему примеру. Непосредственно убеждаемся, что $|B_i B_j| = 4$, $|B_i S| = 2$ в $\mathbb{R}_\infty^3$, и значит суммарное расстояние в $\mathbb{R}_\infty^3$ от S до точек B^i равно полупериметру треугольника $B^1 B^2 B^3$, поэтому, в силу 3.7, дерево $(\{B^1, B^2, B^3, S\}, \{B^1 S, B^2 S, B^3 S\})$ является минимальным заполнением пространства $\{B^1, B^2, B^3\} \subset \mathbb{R}_\infty^3$, и, следовательно, кратчайшим деревом в $\mathbb{R}_\infty^3$, соединяющим $\{B^1, B^2, B^3\}$.

Покажем, что для границы $M = \{A^1, A^2, A^3\} \in \mathcal{M}$ минимальное дерево Штейнера, существующее в силу 3.1, не является минимальным заполнением.

Действительно, если бы оно было минимальным заполнением, то существовала бы точка $Z \in \mathcal{M}$, для которой, по 3.7, выполнялось бы $d_{GH}(Z, A^i) = 1$ при всех $i = 1, 2, 3$. Пусть такая точка Z существует. В силу 3.1, без ограничения общности можно считать, что $Z \in \mathcal{M}_7$. Положим $Z = \{z_1, \dots, z_7\}$. Выберем произвольные $R_i \in \mathcal{R}_{\text{opt}}^0(A_i, Z)$, тогда $\text{dis } R_i = 2$. Так как при каждом i расстояния между различными a_j^i и a_k^i больше 2, то $R_i(a_j^i) \cap R_i(a_k^i) = \emptyset$, поэтому имеется три разбиения $Z = \sqcup_{k=1}^3 R_i(a_k^i)$.

Далее, условие $\text{dis } R_i = 2$ влечет, что $\text{diam } R_i(a_k^i) \leq 2$ при всех i и k ; кроме того, так как наименьшее расстояние между разными точками пространств B^i равно 8, то наименьшее расстояние между точками из разных $R_i(a_j^i)$ и $R_i(a_k^i)$ не меньше 6. Отсюда вытекает, что все разбиения $\{R_i(a_k^i)\}_{k=1}^3$ одинаковы.

Пусть $|a_1^1 a_2^1| = 29.5$, $|a_1^1 a_3^1| = 22$, $|a_2^1 a_3^1| = 8$, тогда для любых $x \in R_1(a_1^1)$, $y \in R_1(a_2^1)$ и $z \in R_1(a_3^1)$ имеем $|xy| \in [27.5, 31.5]$, $|xz| \in [20, 24]$ и $|yz| \in [6, 10]$. Построим аналогичные тройки отрезков для A^2 и A^3 . В результате получаем следующие три тройки:

$$\begin{array}{lll} [27.5, 31.5], & [20, 24], & [6, 10], \\ [27, 31], & [16, 20], & [9.5, 13.5], \\ [31, 35], & [19.5, 23.5], & [10, 14]. \end{array}$$

Заметим, что каждое из трех выбранных выше расстояний $|xy|$, $|yz|$, $|xz|$ должно одновременно лежать по крайней мере еще в двух отрезках: в одном, соответствующем A^2 , и в другом, соответствующем A^3 (вторая и третья строка в приведенной выше таблице). Таким образом, для каждого из этих расстояний соответствующая ему тройка отрезков, выбранных по одному в каждой строке, должна пересекаться. Легко видеть, что в приведенной таблице пересекаются только отрезки, стоящие в вертикальных столбцах. Итак, $|xy| \in [27.5, 31.5] \cap [27, 31] \cap [31, 35] = \{31\}$, поэтому $|xy| = 31$. Аналогично показывается, что $|xz| = 20$ и $|yz| = 10$. Таким образом, в Z существует тройка точек, не удовлетворяющая неравенству треугольника, противоречие.

В [3] было введено понятие *суботношения Штейнера* $\text{ssr}(X)$ метрического пространства X :

$$\text{ssr}(X) = \inf \left\{ \frac{\text{mf}(M)}{\text{smt}(M, X)} : M \subset X, 2 \leq \#M < \infty \right\}.$$

Резюмируя, приходим к следующему заключению.

Следствие 3.8. Для семейства $\{A^1, A^2, A^3\} \subset \mathcal{M}$, где A^i — трехточечное метрическое пространство, в котором расстояния задаются по формулам (*), минимальное дерево Штейнера в $\mathcal{M}$ существует и отлично от минимального заполнения. Поэтому $\text{ssr}(\mathcal{M}) < 1$.

Замечание 3.9. Проведенный нами вычислительный эксперимент показывает, что, в действительности, $\text{ssr}(\mathcal{M}) < 0.857$. Было бы интересно вычислить суботношение Штейнера для пространства Громова–Хаусдорфа.

Список литературы

- [1] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Теория экстремальных сетей*, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
- [2] Hwang F.K., Richards D.S., Winter P. *The Steiner Tree Problem*. Annals of Discrete Mathematics 53, North-Holland: Elsevier, 1992. ISBN 0-444-89098-X.
- [3] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении*, Матем. сб., 2012, т. 203, N 5, сс. 65-118.
- [4] Беднов Б.Б., Бородин П.А. *Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения*, Матем. сб., 2014, т. 205, N 4, сс. 3–20.
- [5] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии*. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.
- [6] Ivanov A.O., Pliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance*. ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.
- [7] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *Steiner Problem in Gromov-Hausdorff Space: the case of finite metric spaces*. ArXiv e-prints, arXiv:1604.02170, 2016.
- [8] Овсянников З.Н., Курсовая работа, Мех-мат МГУ, Москва, 2010.
- [9] Дэй М.М., *Нормированные линейные пространства*, Издательство иностранной литературы, 1961.