Мера Хаусдорфа: трудности перевода

А.А.Тужилин

Аннотация

В настоящей статье мы опишем, как можно определить меру Хаусдорфа, разрешив пустые элементы в покрытиях и ограничившись лишь бесконечными счетными покрытиями. Кроме того, мы расскажем о том, как различное толкование понятия "countable set", принятое как к классической, так и в современной математике, а также его русский перевод "счетное множество" могут приводить к противоречиям.

Внешняя m-мерная мера Хаусдорфа является одним из базовых понятий геометрической теории меры. При ее определении приходится договариваться, чему положить равным 0^0. Также возникает искушение, как и в общей теории меры, разрешить пустому множеству входить в покрытия. Однако тогда, в случае $m = 0$, мы сталкиваемся со следующей проблемой: диаметры пустого и одноточечного множеств равны друг другу и равны нулю, хотя они должны давать разный вклад в определение нульмерной меры Хаусдорфа. А именно, пустое множество не должно влиять на величину меры, а одноточечное давать вклад, равный 1. Это несоответствие одним лишь соглашением 0^0 преодолеть не удается. Наиболее распространенный подход следует знаменитой монографии Федерера "Геометрическая теория меры" [1], в которой пустые множества в покрытия не входят, а самим покрытиям разрешается быть не только бесконечными (счетными), но и конечными. В частности, разрешено покрытие, состоящее из пустого числа элементов. В настоящей статье мы опишем, как можно определить меру Хаусдорфа, разрешив пустые элементы в покрытиях и ограничившись лишь бесконечными счетными покрытиями. Кроме того, мы расскажем о том, как различное толкование понятия "countable set", принятое в математике, а также его русский перевод "счетное множество" могут приводить к противоречиям.

Начнем с напоминания того, что такое внешняя мера Хаусдорфа. Мы дадим слегка подправленное определение из [1], стр. 169–171. Цель нашего изменения — побыстрее добраться до главного, минуя несущественные для наших целей ответвления, которые порождены большой общностью изложения в [1].

1 Определение внешней меры Хаусдорфа

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Через $|xy|$ будем обозначать расстояние между точками $x, y \in X$. Пусть A — произвольное **непустое** подмножество X. Тогда *диаметром* A называется величина

$$\operatorname{diam} A = \sup\bigl\{|xy| : x, y \in A\bigr\}. \tag{1}$$

Выберем

(1) произвольное семейство $\mathcal{F}$ подмножеств X;

(2) произвольную функцию $\zeta\colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$.

Для каждого $A \subset X$ и $\delta \in (0,\infty]$ подсемейство $G \subset \mathcal{F}$ назовем *δ-покрытием* A, если $A \subset \cup_{S\in G} S$ и $\operatorname{diam} S < \delta$ для всех $S \in G$.* Положим

$$\phi_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{S\in G}\zeta(S) : G \text{ является } \textbf{счетным } \delta\text{-покрытием } A\Big\}. \qquad (2)$$

Так как для $0 < \delta < \sigma \le \infty$ выполняется $\phi_\delta \ge \phi_\sigma$, то для каждого $A \subset X$ имеем

$$\psi(A) := \sup_{\delta>0}\phi_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0+}\phi_\delta(A). \qquad (3)$$

Приведенное построение функции $\psi\colon 2^X \to [0,\infty]$ называется *конструкцией Каратеодори.*

Для каждого $m \in [0,\infty)$ строится *m-мерная внешняя мера Хаусдорфа* как частный случай конструкции Каратеодори: в качестве $\mathcal{F}$ выбирается семейство всех **непустых** множеств $S \subset X$; функция ζ определяется так:

$$\alpha(m) = \frac{\Gamma(1/2)^m}{\Gamma(1+m/2)}, \quad \zeta(S) = \frac{\alpha(m)}{2^m}(\operatorname{diam} S)^m,$$

где Γ обозначает стандартную гамма-функцию:

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx.$$

В случае m-мерной внешней меры Хаусдорфа вместо ϕ_δ и ψ пишут соответственно H^m_δ и H^m.

Затем в [1] утверждается, что H^0 — это считающая мера (сопоставляющая каждому конечному множеству число его элементов, а бесконечному — символ ∞). Отметим, что в [1] не обсуждается, чем равна величина $(\operatorname{diam} S)^0$ для одноточечного S.

2 Что такое countable?

Гугл-переводчик отождествляет понятия “счетный” и “countable”. Это не вызывает удивления потому, что именно так нас и учили.

Тем не менее, если посмотреть в Википедии определения счетного множества и countable set, окажется, что это — **разные объекты**! В русской версии Википедии [2] написано

*В [1] вместо условия $\operatorname{diam} S < \delta$ приводится $\operatorname{diam} S \le \delta$. Для определения внешней меры Хаусдорфа это не существенно, так как эта мера не зависит от множеств бесконечного диаметра. Тем не менее, если оставить условие из [1], то придется договариваться, чему равно ∞^0.

> В теории множеств, *счётное множество* есть бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами.

Впрочем, в следующем абзаце говорится: "Иногда счетными называются множества равномощные любому подмножеству множества натуральных чисел, то есть все конечные множества тоже считаются счетными".

Обратимся к английской Википедии [3].

> In mathematics, a *countable set* is a set with the same cardinality (number of elements) as some subset of the set of natural numbers.

Здесь также имеется замечательное добавление: "Some authors use countable set to mean countably infinite alone. To avoid this ambiguity, the term at most countable may be used when finite sets are included and countably infinite, enumerable, or denumerable otherwise."

Посмотрим, что пишут на эту тему популярные учебники и знаменитые монографии. Вот, скажем, учебник Колмогорова и Фомина [4], стр. 23:

> Назовем *счетным множеством* всякое множество, элементы которого можно биективно сопоставить со всеми натуральными числами.

Или учебник Рудина [5], стр. 25:

> A is *countable* if $A \sim J$.

Здесь под $\sim$ понимается наличие биективного соответствия, а под J — множество всех положительных целых чисел.

Хаусдорф [6], стр. 29:

> Sets of this [т.е. $\aleph_0$] cardinality ... are all countable (or enumerable or denumerable).

В примечании на той же странице сказано: "Sets that are finite (including the null set) or countable will be called at most countable".

Куратовский и Мостовский [7], стр. 174:

> A set is said to be countable (or denumerable) if it is either finite or equipollent with the set of all natural numbers.

В дальнейшем, чтобы строго разделить два смысла термина "счетный", множества, биективные натуральному ряду, будем называть *бесконечными счетными*, а множества, биективные подмножеству натурального ряда — *не более чем счетными*.

3 Недоразумения

Описанная выше неоднозначность приводит к недоразумениям. Если мы предположим, что счетный или countable означает бесконечный счетный, то определение меры Хаусдорфа из [1] мгновенно приведет к противоречию.

Пусть X — непустое конечное метрическое пространство, состоящее из n точек. Мы интересуемся считающей мерой H^0. Выберем $\delta > 0$ меньшим наименьшего расстояния между разными точками в X. Тогда каждое δ-покрытие G представляет собой семейство одноточечных подмножеств. Каждое одноточечное множество $S \in G$ дает вклад в определении H^0_δ, равный $(\operatorname{diam} S)^0$. С другой стороны, по определению, G должно быть бесконечным счетным, поэтому H^0_δ равно сумме бесконечного числа одинаковых неотрицательных величин. Таким образом, $H^0(X)$ равно или 0, или ∞, поэтому H^0 не является считающей мерой.

В результате, мы приходим к выводу, что *требования бесконечной счетности семейства G, а также непустоты всех элементов из $\mathcal{F}$, приводят к противоречию.*

Попробуем отказаться от непустоты множеств из $\mathcal{F}$, сохранив при этом требование бесконечной счетности семейств G. Но тогда нам нужно будет определить, чему равен диаметр пустого множества. Имеется хорошо известный способ это сделать.

А именно, распространим стандартные определения $\inf R$ и $\sup R$, где R — непустое подмножество $[0,\infty]$, на случай $R = \emptyset$, положив

$$\inf \emptyset = \infty \text{ и } \sup \emptyset = 0.$$

Тогда формула (1) имеет смысл и когда A — пустое: $\operatorname{diam} \emptyset = 0$.

Пусть A — пустое подмножество непустого конечного метрического пространства X, а $\delta > 0$ меньше наименьшего расстояния между разными точками в X. Тогда каждое покрытие G, участвующее в определении $H^0_\delta(A)$, состоит из одноточечных множеств вида $\{x\} \subset X$ и пустых множеств $\emptyset \subset X$. Так как $(\operatorname{diam} \emptyset)^0 = \big(\operatorname{diam}\{x\}\big)^0 = 0^0$, то снова получаем сумму бесконечного числа одинаковых неотрицательных слагаемых, что опять приводит к противоречию.

Таким образом, мы показали, что *отказ от непустоты множеств из $\mathcal{F}$ с сохранением бесконечной счетности покрытий G вновь приводит к противоречию.*

Итак, мы видим, что попытка интерпретировать понятие счетности как бесконечной счетности приводят к противоречиям. Чтобы спасти положение, под счетностью в этом контексте будем понимать “не более чем счетность”. Тогда определение Федерера [1] меры Хаусдорфа оказывается корректным. Напомним, что Федерер запрещает пустые множества в покрытиях G, разрешает быть покрытиям не более чем счетными, в частности, пустыми, и полагает (неявно) $0^0 = 1$, что используется при определении нульмерной меры Хаусдорфа.

4 Не только мы

Похоже, описываемые здесь проблемы беспокоили не только нас. Так, например, Халмош в [8], стр. 53 определяет формулами (2) и (3) только те H^m, для которых $m > 0$. При таком подходе, функцию H^0 можно положить равной считающей мере **по определению**.

Другая попытка обойти разные противоречия (при “неправильном” толковании термина countable) была предпринята Эйленбергом и Гаррольдом в [9]. Они написали: *величину* $(\operatorname{diam} A)^0$ *положим по определению равной* 0 *или* 1 *в зависимости* *от того, пустое A или нет.* Конечно, если смотреть на $\operatorname{diam} A$ как на величину из промежутка $[0,\infty]$, то такое определение выглядит не совсем корректным. Хотя в нем дается явный намек на то, как избежать противоречия аккуратным путем, сохранив бесконечность покрытий G и разрешив в них пустые множества.

В следующем разделе мы приведем наше определение меры Хаусдорфа, индуцированное [9]. По нашему мнению, необходимость рассматривать отдельно конечные и бесконечные покрытия часто приводит к утяжелению доказательств, так что, возможно, предлагаемый нами подход может оказаться полезным.

5 Наше определение меры Хаусдорфа

Прежде всего, подправим конструкцию Каратеодори. А именно, мы откажемся от того, чтобы каждое $S \in \mathcal{F}$ было непустым, и вместо этого положим $\mathcal{F} = 2^X$. Также заменим $\zeta\colon \mathcal{F} \to [0,\infty]$ на функцию $\zeta\colon 2^X \times [0,\infty) \to [0,\infty]$, удовлетворяющую следующим условиям:

(1) $\zeta(\emptyset, m) = 0$ для любого $m \in [0,\infty)$;

(2) $\zeta\big(\{x\}, 0\big) = 1$ для любого $x \in X$;

(3) $\zeta\big(\{x\}, m\big) = 0$ для любого $x \in X$ и любого $m \in (0,\infty)$;

(4) $\zeta\big(S, m\big) = (\alpha_m/2^m)(\operatorname{diam} S)^m$ для любого непустого неодноточечного $S \subset X$ и любого $m \in [0,\infty)$.

Для каждого $A \subset X$ и $\delta \in (0,\infty]$ семейство G произвольных (возможно, и пустых) подмножеств пространства X назовем *δ-покрытием* A, если $A \subset \cup_{S\in G} S$ и $\operatorname{diam} S < \delta$ для всех $S \in G$.

Теперь применение модифицированной конструкции Каратеодори дает желаемый результат. А именно, полагаем

$$H^m_\delta(A) = \inf\Big\{\sum_{S\in G} \zeta(S,m) : G - \textbf{бесконечное счетное } \delta\text{-покрытие } A\Big\}, \tag{4}$$

$$H^m(A) = \sup_{\delta>0} H^m_\delta(A) = \lim_{\delta\to 0+} H^m_\delta(A). \tag{5}$$

При таком определении мы сохранили бесконечность покрытий G и свойство H^0 быть считающей мерой. Пустое множество можно теперь покрыть бесконечным семейством пустых множеств, а это, в силу условия $\zeta(\emptyset, m) = 0$, даст нам $H^m(\emptyset) = 0$ при всех $m \in [0,\infty)$.

Замечание 1. Так как для $S = \emptyset$ выполняется $\zeta(S,m) = 0$, то сумма в правой части формулы (4) не поменяется, если такие S исключить из суммирования. Последнее приводит к тому, что при определении H^m_δ можно рассматривать не только бесконечные счетные, но и конечные δ-покрытия. Также, учитывая, что для любой функции $f\colon G \to [0,\infty]$ при пустом G имеем $\sum_G f = 0$, мы может рассматривать и пустые δ-покрытия G (для пустого множества A).

Таким образом, получаем эквивалентное определение меры Хаусдорфа: для каждых $\delta \in (0, \infty]$, $m \in [0, \infty)$ и $A \subset X$ положим

$$H_\delta^m(A) = \inf\Big\{\sum_{S\in G}\zeta(S,m) : G \text{ — } \textbf{не более чем счетное } \delta\text{-покрытие } A\Big\},$$
$$H^m(A) = \sup_{\delta>0} H_\delta^m(A) = \lim_{\delta\to 0+} H_\delta^m(A).$$

Замечание 2. Функция $\zeta(A, m)$ на наш взгляд выглядит несколько искусственно. Было бы хорошо придать ей какую-нибудь естественную интерпретацию.

Замечание 3. Легко видеть, что при $m > 0$ наше определение эквивалентно

$$H_\delta^m(A) = \inf\Big\{\frac{\alpha_m}{2^m}\sum_{S\in G}(\operatorname{diam} S)^m : G \text{ — бесконечное счетное } \delta\text{-покрытие } A\Big\},$$
$$H^m(A) = \lim_{\delta\to 0+} H_\delta^m(A) = \sup_{\delta>0} H_\delta^m(A),$$

или, с учетом замечания 1,

$$H_\delta^m(A) = \inf\Big\{\frac{\alpha_m}{2^m}\sum_{S\in G}(\operatorname{diam} S)^m : G \text{ — не более чем счетное } \delta\text{-покрытие } A\Big\},$$
$$H^m(A) = \lim_{\delta\to 0+} H_\delta^m(A) = \sup_{\delta>0} H_\delta^m(A).$$

Здесь нам не нужно использовать функцию ζ, а единственным необходимым соглашением является условие $\operatorname{diam}\emptyset = 0$, требуемое нам для того, чтобы определить δ-покрытия, в которые могут входить пустые множества. Если мы интересуемся только H^m для $m > 0$, то этот вариант (фактически, совпадающий с вариантом Халмоша, см. выше) кажется наиболее удобным.

Благодарности: Автор благодарит Хонг Ван Ле и Джованни Альберти за интерес к работе и плодотворные обсуждения.

Список литературы

[1] Federer H. *Geometric Measure Theory.* Springer-Verlag Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

[2] https://ru.wikipedia.org/wiki/Счётное_множество

[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Countable_set#cite_note-Rudin-1

[4] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* Изд-вл “Наука”, Москва, 1976.

[5] Rudin W. *Principles of Mathematical Analysis*, Third Edition, 1976.

[6] Hausdorff F. *Set Theory.* Chelsea, New York, 1957.

[7] Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory.* English translation of XL 649(4) by Maczynski M.. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, and North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.

[8] Halmos P.R. *Measure Theory.* Springer-Verlag New York-Heidelberg-Berlin, 1950.

[9] Eilenberg S., Harrold O.G.Jr. *Continua of finite linear measure I*, Amer. J. Math., 1943, v. 65, pp. 137–146.