Реализация расстояния Громова–Хаусдорфа.

А. О. Иванов, С. Илиадис, А. А. Тужилин

25 марта 2016 г.

Аннотация

Показано, что для любых двух метрических компактов существует “оптимальное” соответствие между ними, на котором достигается расстояние по Громову–Хаусдорфу. При этом каждое оптимальное соответствие порождает как изометрическое вложение компактов в некоторое метрическое пространство, при котором расстояние Громова–Хаусдорфа равно расстоянию Хаусдорфа между образами, так и кратчайшую кривую в пространстве Громова–Хаусдорфа. Все приводимые доказательства элементарны и используют лишь соображения компактности.

Библиография: 4 названия.

Введение

Расстояние Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами играет важную роль в современной математике, см. [2]. Ограничение этого расстояния на классы изометрии компактных метрических пространств является метрикой и порождает пространство Громова–Хаусдорфа. Хорошо известно, что пространство Громова–Хаусдорфа — польское (полное сепарабельное), линейно связное и, как было показано недавно в [1], его метрика — строго внутренняя. При доказательстве последнего свойства авторы пользовались техникой соответствий и тем очевидным фактом, что между конечными метрическими пространствами существует соответствие, на котором реализуется расстояние Громова–Хаусдорфа. В настоящей статье мы покажем, что такие “оптимальные” соответствия существуют между любыми метрическими компактами. Последнее, с помощью стандартной конструкции, позволяет построить метрическое пространство и изометрические вложения в него исходных пространств так, чтобы расстояние по Громову–Хаусдорфу между исходными пространствами оказалось равным расстоянию Хаусдорфа между их образами. Возможность построения такой “реализации” пары метрических компактов с помощью конструкции ультрапроизведений была отмечена в блоге [3].

Существование оптимальных соответствий позволит нам, с помощью конструкции из [1], соединить произвольную пару метрических компактов кратчайшей кривой в пространстве Громова–Хаусдорфа. При этом каждое оптимальное соответствие порождает свою кратчайшую кривую.

Когда настоящая статья была готова для публикации, мы обнаружили работу [4], в которой независимо получен ряд наших результатов. Тем не менее, мы решили опубликовать нашу статью “как есть”, так как она несколько шире чем [4] и в ней приводится ряд других технических результатов, которые могут именно в таком виде оказаться полезными для дальнейшего исследования геометрии пространства Громова–Хаусдорфа.

1 Основные определения и предварительные результаты

Всюду ниже X и Y обозначают произвольные непустые множества.

Пусть X — метрическое пространство. Расстояние между точками x, $y \in X$ будем обозначать через $\rho(x,y) = |xy|$.

Пусть $\mathcal{P}(X)$ — множество всех **непустых** подмножеств пространства X. Для каждых A, $B \in \mathcal{P}(X)$ и $x \in X$ положим

$$
\begin{aligned}
&|xA| = |Ax| = \inf\bigl\{|xa| : a \in A\bigr\},\\
&d(A,B) = \sup\bigl\{|aB| : a \in A\bigr\} = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|ab|,\\
&d_H(A,B) = \max\{d(A,B), d(B,A)\} = \max\bigl\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|ab|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|ba|\bigr\}.
\end{aligned}
$$

Определение 1.1. Функция d_H называется *расстоянием Хаусдорфа.*

Замечание 1.2. Расстояние Хаусдорфа в общем случае не является метрикой, так как может равняться нулю между различными подмножествами. Например, это имеет место для отрезка $A = [a,b]$ и полуинтервала $B = [a,b)$, рассматриваемых как подмножества числовой прямой со стандартной функцией расстояния. Кроме того, расстояние Хаусдорфа может быть бесконечным, как, например, между точкой и прямой.

Обозначим через $\mathcal{H}(X)$ семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X.

Теорема 1.3 ([2])**.** *Функция d_H является метрикой на $\mathcal{H}(X)$.*

В дальнейшем нам понадобится следующее важное свойство пространства $\mathcal{H}(X)$, наделенного метрикой Хаусдорфа.

Теорема 1.4 ([2])**.** *Пространство $\mathcal{H}(X)$ компактно тогда и только тогда, когда X компактно.*

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X,Y).

Расстоянием $d_{GH}(X,Y)$ *по Громову–Хаусдорфу между* X *и* Y назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X',Y',Z) пары (X,Y) такая, что $d_H(X',Y') \le r$.

Оказывается, при определении расстояния Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами X и Y можно ограничиться рассмотрением достаточно небольшого множества реализаций пары (X,Y). Обозначим через $\mathcal{D}(X,Y)$ множество всех псевдометрик ρ на $X \sqcup Y$, ограничения которых на X и Y совпадают с исходными метриками этих пространств. Пусть $(X \sqcup Y)/\rho$ обозначает метрическое пространство, получающееся из $X \sqcup Y$ отождествлением точек, находящихся на нулевом ρ-расстоянии. Заметим, что ограничения канонической проекции $\pi\colon X \sqcup Y \to (X \sqcup Y)/\rho$ на X и Y являются изометрическими вложениями, и положим $d_H(X,Y,\rho) = d_H\big(\pi(X),\pi(Y)\big)$.

Теорема 1.5 ([2])**.** *В сделанных выше обозначениях, имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \inf_{\rho\in\mathcal{D}(X,Y)} d_H(X,Y,\rho).$$

Теорема 1.6 ([2])**.** *Расстояние Громова-Хаусдорфа задает метрику на множестве классов изометрии компактных метрических пространств.*

Определение 1.7. Множество классов изометрии всех метрических компактов, наделенное метрикой Громова–Хаусдорфа, будем называть *пространством Громова–Хаусдорфа* и обозначать через $\mathcal{M}$.

Опишем один удобный способ вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа. Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех **непустых** отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X,Y)$.

Определение 1.8. Отношение $R \subset X \times Y$ между множествами X и Y называется *соответствием*, если ограничения на R канонических проекций $\pi_X\colon (x,y) \mapsto x$ и $\pi_Y\colon (x,y)\mapsto y$ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Отметим, что для любого $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ такого, что существует $R \in \mathcal{R}(X,Y)$, $R \subset \sigma$, имеем $\sigma \in \mathcal{R}(X,Y)$; в частности, если X и Y — топологические пространства, то замыкание $\bar{R}$ соответствия $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ также является соответствием.

Пусть теперь σ — непустое отношение между псевдометрическими пространствами X и Y.

Определение 1.9. *Искажением* $\operatorname{dis}\sigma$ *отношения* σ назовем следующее число

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x,y)\in\sigma,\ (x',y')\in\sigma\Big\}.$$

Легко видеть, что если $\emptyset \ne \sigma_1 \subset \sigma_2 \in \mathcal{P}(X,Y)$, то $\operatorname{dis}\sigma_1 \le \operatorname{dis}\sigma_2$.

Предложение 1.10. *Если $\bar\sigma$, как и выше, обозначает замыкание отношения $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$, то $\operatorname{dis}\bar\sigma = \operatorname{dis}\sigma$.*

Доказательство. Так как $\operatorname{dis}\sigma \le \operatorname{dis}\bar\sigma$, достаточно проверить обратное неравенство. Предположим противное, т.е. что $\operatorname{dis}\sigma < \operatorname{dis}\bar\sigma$. Заметим, что это предположение влечет $\operatorname{dis}\sigma < \infty$.

По определению, для любого $\varepsilon > 0$ и любых $(\bar x, \bar y)$, $(\bar x', \bar y') \in \bar\sigma$ существуют такие (x,y), $(x',y') \in \sigma$, что $\big||\bar x\bar x'| - |xx'|\big| < \varepsilon/3$, $\big||\bar y\bar y'| - |yy'|\big| < \varepsilon/3$ и, значит,

$$\big||\bar x\bar x'| - |\bar y\bar y'|\big| < \big||xx'| - |yy'|\big| + 2\varepsilon/3 \le \operatorname{dis}\sigma + 2\varepsilon/3.$$

Переходя к супремуму, заключаем, что $\operatorname{dis}\bar\sigma < \operatorname{dis}\sigma + 2\varepsilon/3$. Так как ε произвольно, имеем $\operatorname{dis}\bar\sigma \le \operatorname{dis}\sigma$, противоречие. □

Множество всех замкнутых непустых отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}_c(X,Y)$; аналогично, через $\mathcal{R}_c(X,Y)$ будем обозначать множество всех замкнутых соответствий между X и Y.

Теорема 1.11 ([2])**.** *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis}R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Из 1.10 и 1.11 мгновенно получается следующий результат.

Следствие 1.12. *Для любых X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis}R : R \in \mathcal{R}_c(X,Y)\big\}.$$

Следующая конструкция нам пригодится для доказательства основного результата статьи.

Конструкция 1.13. Рассмотрим произвольные метрические пространства X и Y, а также произвольное соответствие $R \in \mathcal{R}(X,Y)$. Предположим, что $\operatorname{dis}R < \infty$. Продолжим метрики пространств X и Y до симметричной функции ρ_R пар точек из $X \sqcup Y$, задав ее на $x \in X$ и $y \in Y$ следующим образом:

$$\rho_R(x,y) = \rho_R(y,x) = \inf\big\{|xx'| + |yy'| + \frac{1}{2}\operatorname{dis}R : (x',y') \in R\big\}.$$

Теорема 1.14. *Определенная выше функция ρ_R является псевдометрикой, причем $d_H(X,Y,\rho_R) = \frac{1}{2}\operatorname{dis}R$.*

2 Реализация расстояния Громова–Хаусдорфа

Пусть X и Y — произвольные метрические пространства.

Соглашение 2.1. В дальнейшем, говоря про метрическое пространство $X \times Y$, мы всегда будем считать, что на нем задано расстояние

$$\bigl|(x,y)(x',y')\bigr| = \max\bigl\{|xx'|,\, |yy'|\bigr\},$$

которое, в частности, порождает расстояние Хаусдорфа на $\mathcal{P}(X \times Y)$. Тем самым, пространство $\mathcal{P}(X,Y) = \mathcal{P}(X\times Y)$ и все его подпространства (например, $\mathcal{R}(X,Y)$) будут рассматриваться с функциями расстояния из $\mathcal{P}(X\times Y)$.

Замечание 2.2. Если $X,\, Y \in \mathcal{M}$, то $X \times Y \in \mathcal{M}$, $\mathcal{P}_c(X,Y) = \mathcal{H}(X \times Y)$ и, в силу 1.4, выполняется $\mathcal{P}_c(X,Y) \in \mathcal{M}$.

Предложение 2.3. *Для $X,\, Y \in \mathcal{M}$ множество $\mathcal{R}_c(X,Y)$ замкнуто в $\mathcal{P}_c(X,Y)$ и, значит, $\mathcal{R}_c(X,Y) \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого $\sigma \in \mathcal{P}_c(X,Y) \setminus \mathcal{R}_c(X,Y)$ существует окрестность U, не пересекающая $\mathcal{R}_c(X,Y)$. Так как $\sigma \notin \mathcal{R}(X,Y)$, то или $\pi_X(\sigma) \ne X$, или $\pi_Y(\sigma) \ne Y$, где π_X и π_Y — канонические проекции. Пусть, для определенности, выполняется первое условие, т.е. существует $x \in X \setminus \pi_X(\sigma)$. Так как множество σ замкнуто в компакте $X \times Y$, оно является компактом, поэтому $\pi_X(\sigma)$ компактно в X и, значит, замкнуто в нем. Следовательно, существует открытый шар $U_\varepsilon(x)$ такой, что $U_\varepsilon(x) \cap \pi_X(\sigma) = \emptyset$. И сказанного вытекает, что в качестве U можно взять $U_\varepsilon(x) \times Y$. $\square$

Определим функцию $f\colon (X\times Y)\times(X\times Y) \to \mathbb{R}$, положив $f(x,y,x',y') = \bigl||xx'| - |yy'|\bigr|$. Ясно, что f непрерывна. Отметим, что для каждого $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ имеем

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\bigl\{f(x,y,x',y') : (x,y),\, (x',y') \in \sigma\bigr\} = \sup f|_{\sigma\times\sigma}.$$

Предложение 2.4. *Если $X,\, Y \in \mathcal{M}$, то функция* $\operatorname{dis}\colon \mathcal{P}_c(X,Y) \to \mathbb{R}$ *непрерывна.*

Доказательство. Так как $(X \times Y) \times (X \times Y)$ — компакт, то определенная выше функция f равномерно непрерывна, поэтому для любого $\sigma \in \mathcal{P}_c(X,Y)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для открытого шара $U = U_\delta^{X\times Y}(\sigma) \subset X \times Y$ радиуса δ с центром в σ выполняется

$$\sup f|_{U\times U} \le \sup f|_{\sigma\times\sigma} + \varepsilon.$$

Обозначим через V открытый шар $U_\delta^{\mathcal{P}_c(X,Y)}(\sigma) \subset \mathcal{P}_c(X,Y)$ радиуса δ с центром в σ. Так как для любого $\sigma' \in V$ выполняется $\sigma' \subset U$, то из сказанного выше вытекает, что

$$\operatorname{dis}\sigma' = \sup f|_{\sigma'\times\sigma'} \le \sup f|_{U\times U} \le \sup f|_{\sigma\times\sigma} + \varepsilon = \operatorname{dis}\sigma + \varepsilon.$$

Меняя местами σ и σ', получаем, что $|\operatorname{dis}\sigma - \operatorname{dis}\sigma'| \le \varepsilon$, а это означает непрерывность отображения dis. $\square$

Определение 2.5. Соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \operatorname{dis} R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$.

Теорема 2.6. *Для любых X, $Y \in \mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y) \cap \mathcal{R}_c(X, Y) \neq \emptyset$.*

Доказательство. По 2.4, функция $\operatorname{dis}\colon \mathcal{R}_c(X, Y) \to \mathbb{R}$ непрерывна, а по 2.3 пространство $\mathcal{R}_c(X, Y)$ компактно, поэтому dis достигает своего наименьшего значения, половина которого, в силу 1.12, равна $d_{GH}(X, Y)$. Следовательно, соответствие R, на котором это наименьшее значение достигается, — оптимальное. □

Из 2.6 и 1.14 мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 2.7. *Для каждых X, $Y \in \mathcal{M}$ существует*

(1) *соответствие $R \in \mathcal{R}_c(X, Y)$, для которого $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \operatorname{dis} R$;*

(2) *псевдометрика ρ на $X \sqcup Y$ такая, что $d_{GH}(X, Y) = d_H(X, Y, \rho)$;*

(3) *метрическое пространство, в которое X и Y изометрично вкладываются так, что расстояние Хаусдорфа между их образами равно $d_{GH}(X, Y)$.*

3 Оптимальные соответствия и кратчайшие кривые

В [1] мы для каждой пары конечных метрических пространств, используя оптимальное соответствие, существующее между ними в силу очевидных соображений, построили соединяющую их в $\mathcal{M}$ кратчайшую кривую. Чтобы доказать существование кратчайших кривых для любых метрических компактов, мы делали предельный переход с использованием критерия предкомпактности Громова. Теперь же 2.7 дает нам возможность построить кратчайшую кривую непосредственно по оптимальному соответствию. Дословно повторяя доказательство основного результата из [1], получим следующую теорему.

Теорема 3.1. *Для любых X, $Y \in \mathcal{M}$ и каждого $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y) \cap \mathcal{R}_c(X, Y)$ семейство R_t, $t \in [0, 1]$, компактных метрических пространств такое, что $R_0 = X$, $R_1 = Y$, а при $t \in (0, 1)$ пространство R_t — это (R, ρ_t), где*

$$\rho_t\big((x, y), (x', y')\big) = (1 - t)|xx'| + t\,|yy'|,$$

является кратчайшей кривой в $\mathcal{M}$, соединяющей X и Y.

Список литературы

[1] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic*. ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.

[2] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии*. Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] `http://mathoverflow.net/questions/135184/for-which-metric-spaces-is-gromov-hausdorff-distance-actually-achieved?rq=1`

[4] Chowdhury S., Memoli F. *Constructing Geodesics on the Space of Compact Metric Spaces*. ArXiv e-prints, arXiv:1603.02385, 2016.