Хаусдорфова реализация линейных геодезических пространства Громова–Хаусдорфа.

Иванов А.О., Тужилин А.А.

18 апреля 2019 г.

Аннотация

Построена реализация “прямолинейной” геодезической (в смысле работы [1]), лежащей в пространстве Громова–Хаусдорфа, в виде кратчайшей геодезической относительно расстояния Хаусдорфа в некотором объемлющем метрическом пространстве.

Библиография: 5 названий.

Введение

В работе [2] было показано, что пространство классов изометрии компактных метрических пространств, наделенное метрикой Громова–Хаусдорфа, является геодезическим. Доказательство состояло из двух шагов: сначала показывалось, как на оптимальном соответствии R между конечными метрическими пространствами X и Y можно задать однопараметрическое семейство метрик, являющееся фактически кратчайшей геодезической R_t, $t \in [0,1]$, соединяющей X с Y, причем длина этой геодезической равна расстоянию Громова–Хаусдорфа между X и Y. На втором шаге использовался критерий Громова предкомпактности семейства метрических компактов и доказывалось, что для произвольных метрических компактов можно построить метрический компакт, являющийся их серединой. Несколько позже, в [3] и независимо в [4] было показано, что компактное оптимальное соответствие существует и между любыми компактными метрическими пространствами, причем если на таком соответствии задать однопараметрическое семейство метрик так же, как это было сделано в [2], то снова получится кратчайшая геодезическая с описанными выше свойствами. В работе [1] такие геодезические были названы *прямолинейными* (имеются еще и другие кратчайшие геодезические, которые в [1] называются *девиантными*).

В данной работе мы покажем, что по каждой паре X, Y компактных метрических пространств и каждому компактному оптимальному соответствию R между ними, на компакте $R \times [0,1]$ можно так ввести метрику, чтобы при каждом t ограничение метрики на $R \times \{t\}$ совпадало с метрикой компакта R_t, и чтобы расстояние Хаусдорфа между $R \times \{t\}$ и $R \times \{s\}$ равнялось расстоянию Громова–Хаусдорфа между R_t и R_s. Иными словами, мы строим реализацию геодезической R_t в виде кратчайшей геодезической относительно расстояния Хаусдорфа, заданном на подмножествах пространства $R \times [0,1]$ с введенной специальным образом метрикой.

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками x, $y \in X$ будем обозначать через $|xy|$.

Пусть $\mathcal{P}(X)$ — множество всех **непустых** подмножеств пространства X. Для каждых A, $B \in \mathcal{P}(X)$ и $x \in X$ положим

$$|xA| = |Ax| = \inf\bigl\{|xa| : a \in A\bigr\},\ |AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\},$$
$$d_H(A,B) = \max\{\sup_{a\in A}|aB|, \sup_{b\in B}|Ab|\} = \max\bigl\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}|ab|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}|ba|\bigr\}.$$

Определение 1.1. Функция $d_H\colon \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)\to\mathbb{R}$ называется *расстоянием Хаусдорфа.*

Обозначим через $\mathcal{H}(X)$ семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства X.

Теорема 1.2 ([5])**.** *Функция d_H является метрикой на $\mathcal{H}(X)$.*

Теорема 1.3 ([5])**.** *Пространство $\mathcal{H}(X)$ компактно тогда и только тогда, когда X компактно.*

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X,Y). *Расстоянием $d_{GH}(X,Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y* назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X,Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$.

Теорема 1.4 ([5])**.** *Расстояние Громова-Хаусдорфа задает метрику на множестве классов изометрии компактных метрических пространств.*

Определение 1.5. Множество классов изометрии всех метрических компактов, наделенное метрикой Громова–Хаусдорфа, будем называть *пространством Громова–Хаусдорфа* и обозначать через $\mathcal{M}$.

Нам будет полезно еще одно (эквивалентное) определение расстояния Громова–Хаусдорфа. Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X\times Y$. Множество всех **непустых** отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X,Y)$.

Определение 1.6. Если X и Y — метрические пространства, то *искажением* $\operatorname{dis}\sigma$ *отношения* $\sigma\in\mathcal{P}(X,Y)$ назовем число

$$\operatorname{dis}\sigma=\sup\Big\{\big||xx'|-|yy'|\big|:(x,y),\,(x',y')\in\sigma\Big\}.$$

Отношение $R\subset X\times Y$ между множествами X и Y называется *соответствием*, если ограничения на R канонических проекций $\pi_X\colon(x,y)\mapsto x$ и $\pi_Y\colon(x,y)\mapsto y$ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Теорема 1.7 ([5])**.** *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis}R:R\in\mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Для топологических пространств X и Y будем рассматривать $X\times Y$ как топологическое пространство со стандартной топологией декартова произведения. Тогда имеет смысл говорить о *замкнутых отношениях и соответствиях.* Множество всех замкнутых соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}^c(X,Y)$.

Следствие 1.8 ([4])**.** *Для метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis}R:R\in\mathcal{R}^c(X,Y)\big\}.$$

Определение 1.9. Соответствие $R\in\mathcal{R}(X,Y)$ назовем *оптимальным*, если $d_{GH}(X,Y)=\frac12\operatorname{dis}R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$. Подмножество в $\mathcal{R}_{\rm opt}(X,Y)$, состоящее из всех замкнутых оптимальных соответствий, обозначим через $\mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y)$.

Теорема 1.10 ([4])**.** *Для любых $X,\,Y\in\mathcal{M}$ имеем $\mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y)\ne\emptyset$.*

Теорема 1.11 ([3], [4])**.** *Для любых $X,\,Y\in\mathcal{M}$ и каждого $R\in\mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y)$ семейство R_t, $t\in[0,1]$, компактных метрических пространств такое, что $R_0=X$, $R_1=Y$, а при $t\in(0,1)$ пространство R_t — это множество R с метрикой*

$$\big|(x,y),(x',y')\big|_t=(1-t)|xx'|+t\,|yy'|,$$

является кратчайшей кривой в $\mathcal{M}$, соединяющей X и Y, причем длина этой кривой равна $d_{GH}(X,Y)$.

Следуя работе [1], кривую вида R_t будем называть *прямолинейной геодезической*, соответствующей $R\in\mathcal{R}^c_{\rm opt}(X,Y)$. В этой же работе отмечалось, что в пространстве Громова–Хаусдорфа имеются и не прямолинейные геодезические.

Основной результат настоящей работы вытекает из более общей теоремы, описывающей некоторую специальную конструкцию метрики на декартовом произведении метрического пространства и отрезка евклидовой прямой.

2 Специальное продолжение метрики на декартово произведение

Пусть Z — произвольное множество, на котором задано однопараметрическое семейство метрик ρ_t, $t \in [a,b]$. Для удобства изложения, положим $|zz'|_t = \rho_t(z,z')$ и $Z_t = Z \times \{t\}$. Фиксируем некоторое $c > 0$ и определим на $Z \times [a,b]$ функцию расстояния, положив

$$\bigl|(z_1,t_1)(z_2,t_2)\bigr| = \inf_{z\in Z}\bigl(|z_1z|_{t_1} + |zz_2|_{t_2}\bigr) + c|t_1 - t_2|. \tag{1}$$

Ясно, что определенная только что функция неотрицательна и симметрична, т.е. действительно является расстоянием, причем ограничение этой функции на каждое сечение $Z \times \{t\}$ совпадает с ρ_t, а на каждое сечение $\{z\} \times [a,b]$ — с евклидовым расстоянием $c|t-s|$, $t,s \in [a,b]$, которое, заметим, не зависит от выбора z; при этом $|Z_tZ_s| = c|t-s|$.

Чтобы добиться выполнения неравенства треугольника, нам понадобится ввести еще два дополнительных условия.

Теорема 2.1. *Во введенных выше обозначениях, предположим, что выполняются следующие условия*:

(1) *для любых* $z, z' \in Z$ *функция* $f(t) = |zz'|_t$, $t \in [a,b]$, *монотонна*;

(2) *для любых* (z,t), $(z',s) \in Z \times [a,b]$ *имеем*

$$|zz'|_t \le c|t-s| + |zz'|_s + c|t-s|.$$

Тогда определенная в формуле (1) *функция расстояния удовлетворяет неравенству треугольника, т.е. является метрикой, причем для любых* $t, s \in [a,b]$ *имеем* $d_H(Z_t, Z_s) = |Z_tZ_s| = c|t-s|$, *где* d_H *— расстояние Хаусдорфа в* $\mathcal{H}\bigl(Z \times [a,b]\bigr)$.

Доказательство. Доказательство проиллюстрировано на рисунке 1.

Для проверки неравенства треугольника мы выбираем произвольные три произвольные точки (z_i,t_i), $i = 1,2,3$, и показываем, что

$$\bigl|(z_1,t_1)(z_2,t_2)\bigr| + \bigl|(z_2,t_2)(z_3,t_3)\bigr| \ge \bigl|(z_1,t_1)(z_3,t_3)\bigr|.$$

Доказательство зависит от того, в каком порядке расположены числа t_i (на рисунке t_i соответствуют высоте, на которой изображены сечения Z_{t_i} в виде прямоугольников): с точностью до симметрии и вырождения, т.е. когда некоторые t_i равны друг другу, имеется ровно три случая, каждый из которых мы сейчас разберем аналитически. Отметим, что сплошные ломаные линии, соединяющие z_i и z_j, естественным образом кодируют расстояние между точками (z_i,t_i) и (z_j,t_j), а пунктирные линии показывают, как можно сократить величину, равную $\bigl|(z_1,t_1)(z_2,t_2)\bigr| + \bigl|(z_2,t_2)(z_3,t_3)\bigr|$, чтобы получить значение, больше или равное $\bigl|(z_1,t_1)(z_3,t_3)\bigr|$.

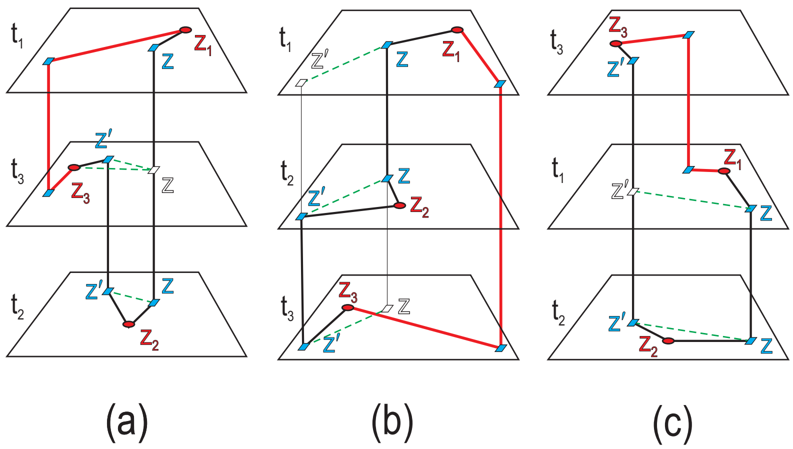

Рис. 1: Проверка неравенства треугольника.

Во всех трех случаях начальный шаг оценки одинаков и получается из неравенства треугольника $|zz_2|_{t_2} + |z_2z'|_{t_2} \ge |zz'|_{t_2}$:

$$
\begin{aligned}
&\bigl|(z_1,t_1)(z_2,t_2)\bigr| + \bigl|(z_2,t_2)(z_3,t_3)\bigr| = \\
&= \inf_{z\in Z}\bigl(|z_1z|_{t_1} + |zz_2|_{t_2}\bigr) + c|t_1-t_2| + \inf_{z'\in Z}\bigl(|z_2z'|_{t_2} + |z'z_3|_{t_3}\bigr) + c|t_3-t_2| \ge \\
&\qquad \ge \inf_{z,z'\in Z}\bigl(|z_1z|_{t_1} + |zz'|_{t_2} + |z'z_3|_{t_3}\bigr) + c|t_1-t_2| + c|t_3-t_2|.
\end{aligned}
$$

Затем начинаются отличия.

(a) Имеем

$$
\begin{aligned}
&\inf_{z,z'\in Z}\bigl(|z_1z|_{t_1} + |zz'|_{t_2} + |z'z_3|_{t_3}\bigr) + c|t_1-t_2| + c|t_3-t_2| = \\
&= \inf_{z,z'\in Z}\bigl(|z_1z|_{t_1} + |zz'|_{t_2} + |z'z_3|_{t_3}\bigr) + c|t_1-t_3| + c|t_3-t_2| + c|t_3-t_2| \ge \\
&\qquad \ge \inf_{z,z'\in Z}\bigl(|z_1z|_{t_1} + |zz'|_{t_3} + |z'z_3|_{t_3}\bigr) + c|t_1-t_3| \ge \\
&\qquad\qquad \ge \inf_{z\in Z}\bigl(|z_1z|_{t_1} + |zz_3|_{t_3}\bigr) + c|t_1-t_3| = \bigl|(z_1,t_1)(z_3,t_3)\bigr|,
\end{aligned}
$$

где первое равенство, в силу выбранного порядка между числами t_i, получается из соотношения $c|t_1-t_2| = c|t_1-t_3| + c|t_3-t_2|$; первое неравенство вытекает из условия (2) доказываемой теоремы, дающее $c|t_3-t_2| + |zz'|_{t_2} + c|t_3-t_2| \ge |zz'|_{t_3}$; последнее неравенство следует из неравенства треугольника $|zz'|_{t_3} + |z'z_3|_{t_3} \ge |zz_3|_{t_3}$.

(b) В этом случае мы воспользуемся условием (1) доказываемой теоремы, в силу которой $|zz'|_{t_2}$ больше либо равен одного из $|zz'|_{t_1}$ и $|zz'|_{t_3}$. Без ограничения общности, предположим, что $|zz'|_{t_2} \ge |zz'|_{t_1}$, тогда

$$\begin{aligned}\inf_{z,z'\in Z}\bigl(|z_1z|_{t_1}+|zz'|_{t_2}+|z'z_3|_{t_3}\bigr)+c|t_1-t_2|+c|t_3-t_2| \ge \\ \ge \inf_{z,z'\in Z}\bigl(|z_1z|_{t_1}+|zz'|_{t_1}+|z'z_3|_{t_3}\bigr)+c|t_1-t_3| \ge \\ \ge \inf_{z'\in Z}\bigl(|z_1z'|_{t_1}+|z'z_3|_{t_3}\bigr)+c|t_1-t_3| = \bigl|(z_1,t_1)(z_3,t_3)\bigr|,\end{aligned}$$

где первое неравенство получается из $|zz'|_{t_2} \ge |zz'|_{t_1}$, а также, в силу выбранного порядка между числами t_i, из $c|t_1-t_3| = c|t_1-t_2|+c|t_3-t_2|$; второе неравенство вытекает из неравенства треугольника $|z_1z|_{t_1}+|zz'|_{t_1} \ge |z_1z'|_{t_1}$.

(c) Имеем

$$\begin{aligned}\inf_{z,z'\in Z}\bigl(|z_1z|_{t_1}+|zz'|_{t_2}+|z'z_3|_{t_3}\bigr)+c|t_1-t_2|+c|t_3-t_2| = \\ = \inf_{z,z'\in Z}\bigl(|z_1z|_{t_1}+|zz'|_{t_2}+|z'z_3|_{t_3}\bigr)+c|t_1-t_2|+c|t_1-t_2|+c|t_3-t_1| \ge \\ \ge \inf_{z,z'\in Z}\bigl(|z_1z|_{t_1}+|zz'|_{t_1}+|z'z_3|_{t_3}\bigr)+c|t_3-t_1| \ge \\ \ge \inf_{z'\in Z}\bigl(|z_1z'|_{t_1}+|z'z_3|_{t_3}\bigr)+c|t_1-t_3| = \bigl|(z_1,t_1)(z_3,t_3)\bigr|,\end{aligned}$$

где первое равенство, в силу выбранного порядка между числами t_i, получается из соотношения $c|t_3-t_2| = c|t_3-t_1|+c|t_1-t_2|$; первое неравенство вытекает из условия (2) доказываемой теоремы, дающее $c|t_1-t_2|+|zz'|_{t_2}+c|t_1-t_2| \ge |zz'|_{t_1}$; последнее неравенство следует из неравенства треугольника $|z_1z|_{t_1}+|zz'|_{t_1} \ge |z_1z'|_{t_1}$. □

В качестве следствия из теоремы 2.1, построим реализацию прямолинейной геодезической из пространства Громова–Хаусдорфа в виде кратчайшей геодезической в смысле метрики Хаусдорфа.

3 Реализация прямолинейных геодезических

Выберем произвольные $X,Y \in \mathcal{M}$, $R \in \mathcal{R}^c_{\mathrm{opt}}(X,Y)$ и построим соответствующую R прямолинейную геодезическую R_t, $t\in[0,1]$. Для удобства изложения, расстояние в R_t между точками (x,y) и (x',y') обозначим через $\bigl|(x,y),(x',y')\bigr|_t$. Положим $c=\frac12\operatorname{dis}R$ и зададим на $R\times[0,1]$ расстояние по формуле (1).

Следствие 3.1. *Для неизометричных X и Y определенная выше функция расстояния на $R\times[0,1]$ является метрикой, для которой $d_H(R_t,R_s) = d_{GH}(X,Y)|t-s|$, так что R_t, рассматриваемое как кривая в пространстве $\mathcal{H}\bigl(R\times[0,1]\bigr)$, является кратчайшей геодезической.*

Доказательство. Достаточно проверить, что в рассматриваемом случае выполняются условия теоремы 2.1.

Так как X и Y неизометричны, то $\operatorname{dis}R>0$ и, значит, $c>0$.

Далее, для произвольных (x, y) и (x', y') из R функция $f(t)$ из пункта (1) равна $(1-t)|xx'| + t|yy'|$, так что она линейна по t и, значит, условие пункта (1) выполняется.

Наконец, проверим выполнение условия пункта (2). Для этого выберем произвольные $(x, y), (x', y') \in R$, а также любые $t, s \in [0, 1]$, тогда

$$\begin{aligned}\big|(x,y),(x',y')\big|_t - \big|(x,y),(x',y')\big|_s &= \\ &= (1-t)|xx'| + t|yy'| - (1-s)|xx'| - s|yy'| = \\ &= (t-s)\big(|yy'| - |xx'|\big) \le |t-s| \operatorname{dis} R = 2c|t-s|,\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Список литературы

[1] Chowdhury S., Memoli F. *Explicit Geodesics in Gromov-Hausdorff Space.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.02385, 2018.

[2] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic.* ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.

[3] Chowdhury S., Memoli F. *Constructing Geodesics on the Space of Compact Metric Spaces.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.02385, 2016.

[4] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.

[5] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.