Геометрия компактного метрического пространства в терминах расстояний Громова–Хаусдорфа до правильных симплексов

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

21 июля 2016 г.

Аннотация

В данной работе изучаются геометрические характеристики компактных метрических пространств, допускающие описание в терминах расстояний Громова–Хаусдорфа до так называемых симплексов, т.е. конечных метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния равны между собой. Оказывается, при вычислении этих расстояний важную роль играют как аналоги длин ребер минимального остовного дерева, которые определяются для произвольного компактного метрического пространства в терминах его конечных разбиений, так и некоторые другие геометрические характеристики таких разбиений. В качестве следствия, мы построили неожиданный пример континуального семейства, состоящего из попарно неизометричных конечных метрических пространств, имеющих одни и те же расстояния до всех симплексов.

Библиография: 7 названий.

Введение

В данной работе изучаются геометрические характеристики компактных метрических пространств, допускающие описание в терминах расстояний Громова–Хаусдорфа до так называемых симплексов, т.е. конечных метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния равны между собой. В работе [5] для произвольного конечного метрического пространства в этих терминах были вычислены длины ребер минимального остовного дерева, построенного на этом пространстве. Здесь мы обобщаем результаты [5] на случай произвольных компактных метрических пространств. Оказывается, при вычислении расстояний Громова–Хаусдорфа до симплексов важную роль играют как аналоги длин ребер минимального остовного дерева, которые, как мы показываем, можно определить для произвольного компактного метрического пространства в терминах его конечных разбиений, так и некоторые другие геометрические характеристики таких разбиений. В работе вычислены расстояния Громова–Хаусдорфа от произвольного компактного метрического пространства до произвольного симплекса достаточно большого и достаточно малого диаметра, см. теоремы 4.10, 4.14, 4.15. Для конечного n-точечного метрического пространства найдены расстояния до произвольного симплекса, состоящего не менее чем из $n-1$ точки (теоремы 4.8, 4.1, 4.16). Однако общая задача вычисления расстояния от произвольного компактного метрического пространства до произвольного симплекса остается нерешенной. Нетривиальность этой задачи демонстрируется на нескольких примерах, разобранных в конце работы. В частности, показывается, что набор расстояний до всевозможных симплексов не является метрическим инвариантом, т.е. эти наборы могут совпадать даже для неизометричных конечных пространств. Более того, один и тот же набор расстояний может быть у бесконечного (континуального) множества попарно неизометричных конечных метрических пространств.

В работе используется и развивается техника так называемых неприводимых оптимальных соответствий [1, 3, 4]. Показано, что при вычислении расстояний Громова–Хаусдорфа от компактного метрического пространства X до n-точечного симплекса, где n не превосходит мощности X, можно ограничиться лишь теми соответствиями, которые порождают разбиения пространства X на n непустых непересекающихся подмножеств, теорема 4.2. Этот результат позволил существенно продвинуться в конкретных вычислениях расстояний Громова–Хаусдорфа.

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество. Через $\#X$ будем обозначать *мощность* множества X.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Если $A, B \subset X$ — непустые подмножества, то положим $|AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A, b \in B\bigr\}$. Если $A = \{a\}$, то вместо $|\{a\}B| = |B\{a\}|$ будем писать $|aB| = |Ba|$.

Для каждой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \cup_{a\in A} U_r(a)$.

1.1 Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

Для непустых A, $B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B) \;\&\; B \subset U_r(A)\bigr\} = \max\{\sup_{a\in A}|aB|, \sup_{b\in B}|Ab|\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Хорошо известно [2], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X, является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием $d_{GH}(X,Y)$ по Громову–Хаусдорфу между X и Y* назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$. Хорошо известно [2], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой.

Для вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа удобно воспользоваться техникой соответствий.

Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех **непустых** отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X,Y)$. Будем смотреть на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X. Тогда, по аналогии с тем, как это принято для отображений, для каждого $x \in X$ и каждого $A \subset X$ определены их образы $\sigma(x)$ и $\sigma(A)$, а для каждого $y \in Y$ и каждого $B \subset Y$ — их прообразы $\sigma^{-1}(y)$ и $\sigma^{-1}(B)$.

Отношение $R \in \mathcal{P}(X,Y)$ называется *соответствием*, если ограничения на R канонических проекций $\pi_X\colon (x,y)\mapsto x$ и $\pi_Y\colon (x,y)\mapsto y$ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Пусть X и Y — произвольные метрические пространства. *Искажением* $\operatorname{dis}\sigma$ *отношения* $\sigma \in \mathcal{P}(X,Y)$ назовем число

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'|-|yy'|\big| : (x,y),(x',y')\in\sigma\Big\}.$$

Предложение 1.1 ([2]). *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis}R : R\in\mathcal{R}(X,Y)\big\}.$$

Если X и Y — конечные метрические пространства, то множество $\mathcal{R}(X,Y)$ конечно, поэтому существует $R\in\mathcal{R}(X,Y)$, для которого $d_{GH}(X,Y)=\frac12\operatorname{dis}R$. Каждое такое соответствие R назовем *оптимальным*. Отметим, что оптимальные соответствия существуют и для любых метрических компактов X и Y, см. [3]. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)$. Таким образом, для компактных метрических пространств X и Y имеем $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)\neq\emptyset$.

Отношение включения задает на $\mathcal{R}(X,Y)$ частичный порядок: $R_1\le R_2$, если и только если $R_1\subset R_2$. Минимальные в этом порядке соответствия назовем *неприводимыми*, а все остальные — *приводимыми*. В [4] доказано, что для компактных метрических пространств X и Y всегда существует неприводимое оптимальное соответствие R. Множество неприводимых оптимальных соответствий обозначим через $\mathcal{R}^0_{\mathrm{opt}}(X,Y)$. В силу сказанного выше, имеем $\mathcal{R}^0_{\mathrm{opt}}(X,Y)\neq\emptyset$.

Используя соответствия, легко доказываются следующие хорошо известные факты. Для произвольного метрического пространства X и числа $\lambda>0$ через λX обозначим метрическое пространство, которое отличается от X умножением всех расстояний на λ.

Предложение 1.2 ([2]). *Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда*

(1) *если X — одноточечное метрическое пространство, то $d_{GH}(X,Y)=\frac12\operatorname{diam}Y$;*

(2) *если $\operatorname{diam}X<\infty$, то*
$$d_{GH}(X,Y)\ge\frac12|\operatorname{diam}X-\operatorname{diam}Y|;$$

(3) $d_{GH}(X,Y)\le\frac12\max\{\operatorname{diam}X,\operatorname{diam}Y\}$, *в частности, для ограниченных X и Y имеем $d_{GH}(X,Y)<\infty$;*

(4) *для любых $X,Y\in\mathcal{M}$ и любого $\lambda>0$ имеем $d_{GH}(\lambda X,\lambda Y)=\lambda d_{GH}(X,Y)$. Более того, при $\lambda\neq1$ единственным пространством, которое при такой операции не меняется, является одноточечное пространство. Иными словами, операция умножения метрики на число $\lambda>0$ является гомотетией пространства $\mathcal{M}$ с центром в одноточечном метрическом пространстве.*

1.2 Несколько элементарных соотношений

Для конкретных вычислений расстояний Громова–Хаусдорфа нам будут полезны следующие тривиальные соотношения между функциями, содержащими модули.

Предложение 1.3. *Для любых неотрицательных a и b выполнено неравенство*

$$\max\bigl\{a,|b-a|\bigr\}\le\max\{a,b\}.$$

Доказательство. Действительно, если $b\ge a$, то $|b-a|=b-a\le b$. Если же $b\le a$, то $|b-a|=a-b\le a$. $\square$

Предложение 1.4. *Пусть $A\subset\mathbb{R}$ — непустое ограниченное подмножество вещественной прямой, и пусть $t\in\mathbb{R}$. Тогда*

$$\sup_{a\in A}|t-a|=\max\{t-\inf A,\sup A-t\}=\Bigl|t-\frac{\inf A+\sup A}{2}\Bigr|+\frac{\sup A-\inf A}{2}.$$

Доказательство. Рассмотрим отрезок $[\inf A,\sup A]$. Если t лежит левее середины этого отрезка, т.е. $t\le(\inf A+\sup A)/2$, то величина $\sup_{a\in A}|t-a|$ достигается на правом конце отрезка, т.е. равна $\sup A-t$; при этом, $t-\inf A\le|t-\inf A|\le\sup A-t$. Следовательно, при таких t предложение имеет место. Аналогичное рассматривается случай $t\ge(\inf A+\sup A)/2$. $\square$

Предложение 1.5. *Пусть $A\subset\mathbb{R}$ — непустое ограниченное подмножество вещественной прямой,* $\inf A\ge 0$*, и пусть $t\in\mathbb{R}$. Тогда*

$$\sup_{a\in A}\bigl\{t,|t-a|\bigr\}=\max\{t,\sup A-t\}.$$

Доказательство. Пусть $A'=\{0\}\cup A$, тогда $\sup_{a\in A'}|a-t|=\sup_{a\in A}|a-t|$. По предложению 1.4, имеем

$$\sup_{a\in A'}|a-t|=\max\{t,\sup A-t\},$$

что и требовалось. $\square$

2 Минимальные остовные деревья

Оказывается, для вычисления расстояний Громова–Хаусдорфа между конечными метрическими пространствами важную роль играют минимальные и максимальные остовные деревья. При этом, как оказывается, длины ребер этих деревьев тесно связаны с геометрическими характеристиками различных разбиений объемлющего пространства.

Пусть $G=(V,E)$ — произвольный (простой) граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Если V — метрическое пространство, то определены *длины* $|e|$ *ребер* $e=vw$ *графа* G как расстояния $|vw|$ между концами v и w этих ребер, а также *длина* $|G|$ *графа* G как сумма длин всех его ребер.

Пусть M — конечное метрическое пространство. Определим число $\operatorname{mst}(M)$, положив его равным длине кратчайшего дерева среди деревьев вида (M,E). Полученная величина называется *длиной минимального остовного дерева на* M; дерево $G=(M,E)$, для которого $|G|=\operatorname{mst}(M)$, называется *минимальным остовным деревом на* M. Заметим, что для любого M на нем всегда существует минимальное остовное дерево. Множество всех минимальных остовных деревьев на M обозначим через $\operatorname{MST}(M)$.

2.1 mst-спектр конечного метрического пространства

Отметим, что минимальное остовное дерево, вообще говоря, определено неоднозначно. Для $G \in \mathrm{MST}(M)$ через $\sigma(G, M)$ обозначим вектор длин ребер дерева G, упорядоченных по убыванию. Если из контекста понятно, про какую метрику идет речь, что вместо $\sigma(G, M)$ писать $\sigma(G)$. Хорошо известен следующий результат.

Предложение 2.1. *Для любых $G_1, G_2 \in \mathrm{MST}(M)$ имеем $\sigma(G_1) = \sigma(G_2)$.*

Предложение 2.1 обосновывает следующее определение.

Определение 2.2. Для любого конечного метрического пространства M через $\sigma(M)$ обозначим вектор $\sigma(G, M)$ для произвольного $G \in \mathrm{MST}(M)$ и назовем этот вектор mst-*спектром пространства M*.

Конструкция 2.3. Для множества M через $\mathcal{D}_k(M)$ обозначим семейство всевозможных разбиений множества M на k его непустых подмножеств. Пусть теперь M — метрическое пространство и $D = \{M_1, \dots, M_k\} \in \mathcal{D}_k(M)$. Положим $\alpha(D) = \min\bigl\{|M_i M_j| : i \neq j\bigr\}$.

В [5] доказан следующий результат.

Предложение 2.4. *Пусть M — конечное метрическое пространство и $\sigma(M) = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$. Тогда*

$$\sigma_k = \max\bigl\{\alpha(D) : D \in \mathcal{D}_{k+1}(M)\bigr\}.$$

2.2 mst-спектр произвольного метрического пространства

Обобщим понятие mst-спектра, воспользовавшись предложением 2.4.

Определение 2.5. Для произвольного метрического пространства X и $k \in \mathbb{N}$ положим $\sigma_k = \sup\{\alpha(D) : D \in \mathcal{D}_{k+1}(X)\}$, если $\mathcal{D}_{k+1}(X) \neq \emptyset$, и $\sigma_k = 0$ в противном случае. Множество $\sigma(X) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots\}$ назовем mst-*спектром метрического пространства X*.

Замечание 2.6. Если $\#X = n$, то $\sigma_k = 0$ при $k \geq n$.

В работе [6] для метрических пространств, допускающих соединение деревом конечной длины (определения см. в [7]), получено необходимое условие существования минимальных остовных деревьев. Из результатов [6, Теорема 1] вытекает, что если метрическое пространство X соединяется минимальным остовным деревом G конечной длины, то все ребра этого дерева являются точными, в том смысле, что длина каждого ребра e дерева G равна расстоянию между подмножествами X_1 и X_2 множества X, являющимися множествами вершин деревьев, формирующих лес $G \setminus e$.

Более того, для дерева G, описанного выше, и каждого $\delta > 0$ существует лишь конечное число ребер из G, длины которых больше или равны δ. Отсюда вытекает, что корректно определен линейный порядок этих ребер, при котором их длины монотонно убывают. Пусть $\{e_1, e_2, \dots\}$ — такой порядок, и $r_i = |e_i|$.

Лемма 2.7. *Для любого натурального k рассмотрим разбиение $D = \{X_1, \dots, X_{k+1}\}$ множества X на множества вершин компонент леса $G \setminus \{e_1, \dots, e_k\}$. Тогда $\alpha(D) = |e_k|$.*

Доказательство. Произвольные $p_i \in X_i$ и $p_j \in X_j$, $i \neq j$, соединены конечным путем в дереве G, который содержит хотя бы одно из ребер e_p, $p \leq k$. Из минимальности дерева G следует, что $|p_ip_j| \geq |e_p| \geq |e_k|$, поэтому $|X_iX_j| \geq |e_k|$ и, значит, $\alpha(D) \geq |e_k|$. С другой стороны, если выбрать X_i и X_j так, чтобы ребро e_k соединяло именно их, то $\alpha(D) \leq |X_iX_j| = |e_k|$, так как ребро e_k — точное. □

Лемма 2.8. *Пусть $D' = \{X'_1, \ldots, X'_{k+1}\}$ — произвольное разбиение множества X, тогда $\alpha(D) \leq \alpha(D')$.*

Доказательство. Обозначим через E' множество тех ребер дерева G, которые соединяют разные элементы разбиения D'. Множество E' содержит не менее чем k ребер (иначе граф G — несвязен), поэтому $\min\{e \in E'\}|e| \leq |e_k|$. Пусть $e' \in E$ такое, что $|e'| = \min\{e \in E'\}|e|$, а X'_i и X'_j — те элементы разбиения D', которые соединяются e'. Тогда $\alpha(D') = |X'_iX'_j| = |e'| \leq |e_k| = \alpha(D)$. □

Из лемм 2.7 и 2.8 вытекает следующий результат.

Следствие 2.9. *Если существует минимальное остовное дерево, соединяющее метрическое пространство X, и $\{e_1, e_2, \ldots\}$ — его ребра, упорядоченные в соответствие с убыванием длины, то $\sigma_k = |e_k|$.*

3 Максимальные остовные деревья

Пусть M — конечное метрическое пространство. *Максимальным остовным деревом G на M* назовем дерево, имеющее наибольшую длину среди деревьев вида (M, E). Длину максимального остовного дерева на M обозначим через $\mathrm{xst}(M)$, а множество всех максимальных остовных деревьев на M обозначим через $\mathrm{XST}(M)$.

Чтобы установить связь между минимальными и максимальными остовными деревьями, нам понадобится следующая конструкция.

Пусть X — произвольное неодноточечное ограниченное метрическое пространство. Выберем произвольное $d \geq 2\operatorname{diam} X$. Определим на X новую функцию расстояния, положив $\rho(x, y) = d - |xy|$ для каждых $x \neq y$, и $\rho(x, x) = 0$ для каждого x.

Лемма 3.1. *Функция ρ является метрикой на X.*

Доказательство. Действительно, положительная определенность и симметричность очевидны. Проверим неравенство треугольника. Выберем произвольные попарно различные точки $x, y, z \in X$, тогда

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) - \rho(x, z) = d - |xy| + d - |yz| - d + |xz| \geq d - 2\operatorname{diam} X \geq 0.$$

Если две из трех точек совпадают, скажем, если $y = z \neq x$, то $|xy| = |xz|$ и $\rho(z, y) = 0$, поэтому

$$\big|\rho(x, z) - \rho(z, y)\big| = \big|d - |xz| - 0\big| = d - |xz| = d - |xy| = \rho(x, y) = d - |xz| + 0 = \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

□

Множество X с определенной выше метрикой ρ будем обозначать через $d - X$.

Пусть M — конечное метрическое пространство, $\#M = n$ и $N = n(n-1)/2$. Через $\rho(M) = (\rho_1, \ldots, \rho_N)$ обозначим вектор, составленный из ненулевых расстояний пространства M, упорядоченных по убыванию.

Замечание 3.2. Если M — конечное метрическое пространство и $\rho(M) = (\rho_1, \ldots, \rho_N)$, то $\rho(d-M) = (d-\rho_N, \ldots, d-\rho_1)$.

3.1 Двойственность

В следующем предложении говорится о двойственности между минимальными и максимальными остовными деревьями.

Предложение 3.3. *Пусть M — конечное метрическое пространство и $n = \#M$. Тогда дерево $G = (M, E)$ является минимальным остовным на пространстве M, если и только если оно является максимальным остовным на пространстве $d - M$.*

Доказательство. Обозначим через ρ функцию расстояния на $d-M$. Тогда $\rho(G) = \sum_{e\in E}\rho(e) = d(n-1) - |G|$, откуда и вытекает требуемое. $\square$

Для $G \in \mathrm{XST}(M)$ через $\Sigma(G, M)$ обозначим вектор длин ребер дерева G, упорядоченных по возрастанию. Если из контекста понятно, про какую метрику идет речь, то вместо $\Sigma(G, M)$ будем писать $\Sigma(G)$.

Из предложения 3.3 вытекает следующий результат.

Следствие 3.4. *Пусть M — конечное метрическое пространство, $\#M = n$, $d \ge 2\,\mathrm{diam}\,M$ и $G \in \mathrm{MST}(M)$. Вектор длины $n-1$, все компоненты которого равны d, будем обозначать той же буквой. Тогда $G \in \mathrm{XST}(d-M)$ и $\Sigma(G, d-M) + \sigma(G, M) = d$.*

Из следствия 3.4 вытекает аналог предложения 2.1.

Предложение 3.5. *Для любых $G_1, G_2 \in \mathrm{XST}(M)$ имеем $\Sigma(G_1) = \Sigma(G_2)$.*

Предложение 3.5 обосновывает следующее определение.

Определение 3.6. Для любого конечного метрического пространства M через $\Sigma(M)$ обозначим $\Sigma(G, M)$ для произвольного $G \in \mathrm{XST}(M)$ и назовем xst-*спектром пространства M*.

Пусть X — произвольное метрическое пространство, и $A, B \subset X$ — его непустые подмножества. Положим
$$|AB|' = \sup\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}.$$
Если метрика на X обозначается также через ρ, то положим $|AB|' = \rho(A, B)'$.

Конструкция 3.7. Для множества M через $\mathcal{C}_k(M)$ обозначим семейство всевозможных покрытий множества M, каждое из которых состоит из k его непустых подмножеств. Пусть теперь M — метрическое пространство и $C = \{M_1, \ldots, M_k\} \in \mathcal{C}_k(M)$. Положим $\beta(C, M) = \max\bigl\{|M_iM_j|' : i \ne j\bigr\}$. Если понятно, о какой метрике идет речь, то вместо $\beta(C, M)$ будем писать $\beta(C)$.

Лемма 3.8. *Пусть $A, B \subset X$ — непустые подмножества ограниченного метрического пространства и ρ — метрика пространства $d - X$. Тогда $|AB|' = d - \rho(A, B)$.*

Доказательство. Действительно,
$$|AB|' = \sup\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\} = \sup\bigl\{d - \rho(a, b) : a \in A,\, b \in B\bigr\} = \\ = d - \inf\bigl\{\rho(a, b) : a \in A,\, b \in B\bigr\} = d - \rho(A, B).$$
$\square$

Лемма 3.9. *Для произвольного* $D = \{M_1, \dots, M_k\} \in \mathcal{D}_k(M)$ *имеем* $\beta(D, M) = d - \alpha(D, d - M)$.

Доказательство. Действительно, обозначим через ρ метрику пространства $d - M$. Тогда, в силу леммы 3.8, имеем

$$\beta(D, M) = \max\bigl\{|M_iM_j|' : i \ne j\bigr\} = \max\bigl\{d - \rho(M_i, M_j) : i \ne j\bigr\} = \\ = d - \min\bigl\{\rho(M_i, M_j) : i \ne j\bigr\} = d - \alpha(D, d - M).$$

□

До конца этого раздела M обозначает конечное метрическое пространство, состоящее из n точек, и $\Sigma(M) = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1})$.

Следующий результат является аналогом предложения 2.4.

Предложение 3.10. *Имеем* $\Sigma_k = \min\bigl\{\beta(D, M) : D \in \mathcal{D}_{k+1}(M)\bigr\}$.

Доказательство. Выберем произвольное $d \ge 2 \operatorname{diam} M$, тогда $\sigma(d - M) = d - \Sigma(M)$. Положим $\sigma(d - M) = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ и $\Sigma(M) = (\Sigma_1, \dots, \Sigma_{n-1})$. По предложению 2.4 и лемме 3.9, имеем

$$\Sigma_k = d - \sigma_k = d - \max\bigl\{\alpha(D, d - M) : D \in \mathcal{D}_{k+1}(d - M)\bigr\} = \\ = \min\bigl\{d - \alpha(D, d - M) : D \in \mathcal{D}_{k+1}(d - M)\bigr\} = \min\bigl\{\beta(D, M) : D \in \mathcal{D}_{k+1}(d - M)\bigr\}.$$

□

Замечание 3.11. Во введенных выше обозначениях, имеем $\operatorname{diam} M = \Sigma_{n-1}$.

В следующих двух предложениях мы используем $G = (M, E) \in \mathrm{XST}(M)$, причем ребра $e_i \in E$ считаем упорядоченными так, что $|e_i| = \Sigma_i$. Кроме того, для удобства изложения положим $|e_0| = \Sigma_0 = 0$.

Предложение 3.12. *Пусть* $\{M_1, \dots, M_{k+1}\} \in \mathcal{D}_{k+1}(M)$ *— разбиение на множества вершин деревьев леса* $F = G \setminus \{e_{n-k}, \dots, e_{n-1}\}$. *Тогда при каждом* i *имеем* $\operatorname{diam} M_i \le |e_{n-k-1}| = \Sigma_{n-k-1}$.

Доказательство. Выберем произвольные $x, y \in M_i$. Если $xy \in E$, то $|xy| \le |e_{n-k-1}|$ в силу выбранного порядка на E. Если же $xy \notin E$, то рассмотрим единственный путь γ в G, соединяющий x и y. Так как M_i — множество вершин одного из деревьев леса F, то для каждого ребра e_j этого пути выполняется $j \le n - k - 1$ и, поэтому, $|e_j| \le |e_{n-k-1}|$. Так как дерево G максимально, то $|xy| \le |e_j|$ для некоторого $j \le n - k - 1$, откуда $\operatorname{diam} M_i \le |e_{n-k-1}|$. □

Предложение 3.13. *Пусть* $\{M_1, \dots, M_{k+1}\} \in \mathcal{D}_{k+1}(M)$ *— разбиение на множества вершин деревьев леса* $F = G \setminus \{e_1, \dots, e_k\}$. *Тогда при каждых* $i \ne j$ *имеем* $|M_iM_j|' \le |e_k| = \Sigma_k$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим произвольные M_i, M_j, $i \ne j$, и пусть $P_i \in M_i$, $P_j \in M_j$ — произвольные точки. Рассмотрим единственный путь γ в дереве G, соединяющий P_i и P_j. Этот путь необходимо содержит хотя бы одно из выброшенных ребер. Пусть это ребро e_p. Если P_iP_j не является ребром из G, то $G \cup P_iP_j$ содержит единственный цикл $\gamma \cup P_iP_j$, причем из максимальности дерева G следует, что каждое ребро пути γ не короче, чем P_iP_j. В частности, $|e_k| \ge |e_p| \ge |P_iP_j|$. Если же P_iP_j — ребро дерева G, то оно совпадает с одним из выброшенных ребер, скажем, с e_p, и снова $|e_k| \ge |e_p| = |P_iP_j|$. Таким образом, $|M_iM_j|' = \max |P_iP_j| \le |e_k|$. □

3.2 xst-спектр произвольного метрического пространства

По аналогии с тем, что мы проделали в разделе 2.2, обобщим понятие xst-спектра, воспользовавшись предложением 3.10.

Определение 3.14. Для произвольного метрического пространства X и $k \in \mathbb{N}$ положим $\Sigma_k = \inf\{\beta(D) : D \in \mathcal{D}_{k+1}(X)\}$, если $\mathcal{D}_{k+1}(X) \neq \emptyset$, и $\Sigma_k = \infty$ в противном случае. Множество $\Sigma(X) = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots\}$ назовем xst-спектром метрического пространства X.

Замечание 3.15. Если $\#X = n$, то $\Sigma_k = \infty$ при $k \geq n$.

4 Вычисление расстояний между компактным метрическим пространством и конечным симплексом

Метрическое пространство X назовем *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Заметим, что симплекс X компактен, если и только если он конечен. Симплекс, имеющий n вершин, расстояния между которыми равны λ, обозначим через $\lambda\Delta_n$. При $\lambda = 1$ пространство $\lambda\Delta_n$ будем для краткости обозначать через Δ_n.

4.1 Расстояние от конечного метрического пространства до симплексов с бóльшим числом точек

Теорема 4.1. *Пусть M — конечное метрическое пространство, $n = \#M$. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$, $m > n$, и $\lambda > 0$ имеем*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, M) = \max\{\lambda, \operatorname{diam} M - \lambda\}.$$

Доказательство. Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_m, M)$. Так как $m > n$, существует $x \in M$ такое, что $\#R^{-1}(x) \geq 2$, поэтому $\operatorname{dis} R \geq \lambda$ и, значит, $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, M) \geq \lambda$.

Положим $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и выберем теперь в качестве R соответствие $\big\{(i, x_i)\big\}_{i=1}^{n-1} \cup \{n, \ldots, m\} \times \{x_n\}$. Тогда

$$\operatorname{dis} R = \max\Big[\lambda, \max_{i\neq j}\Big\{\big||x_ix_j| - \lambda\big|\Big\}\Big] = \max\{\lambda, \operatorname{diam} M - \lambda\},$$

где второе равенство вытекает из предложения 1.5. Отсюда следует, что $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, M) \leq \max\{\lambda, \operatorname{diam} M - \lambda\}$.

Если $\operatorname{diam} M \leq 2\lambda$, то $\max\{\lambda, \operatorname{diam} M - \lambda\} = \lambda$, откуда $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, M) = \lambda$, что и требовалось.

Если же $\operatorname{diam} M > 2\lambda$, то $\max\{\lambda, \operatorname{diam} M - \lambda\} = \operatorname{diam} M - \lambda$. Выберем пару $x, y \in M$, для которой $\operatorname{diam} M = |xy|$. Возьмем произвольное $R \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_m, M)$. Тогда выполняется одно из следующих двух условий:

(1) существует $i \in \lambda\Delta_m$ такой, что $(i, x), (i, y) \in R$, но тогда $\operatorname{dis} R \geq \operatorname{diam} M > \operatorname{diam} M - \lambda$;

(2) существуют такие $i \neq j$, что $(i, x), (j, y) \in R$, и тогда $\operatorname{dis} R \geq \operatorname{diam} M - \lambda$.

Таким образом, для любого $R \in \mathcal{R}(\lambda\Delta_m, M)$ имеем $\operatorname{dis} R \geq \operatorname{diam} M - \lambda$, следовательно, в рассматриваемом случае выполняется $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, M) = \operatorname{diam} M - \lambda$. $\square$

4.2 Расстояние от компактного метрического пространства до симплексов с не бо́льшим числом точек

Теорема 4.2. *Пусть X — компактное метрическое пространство. Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$, $m \le \#X$, и $\lambda > 0$ найдется $R \in \mathcal{R}^0_{\mathrm{opt}}(\lambda\Delta_m, X)$ такое, что семейство $\bigl\{R(i)\bigr\}$ — разбиение множества X. В частности, если $m = \#X$, то в качестве оптимального соответствия R можно выбрать некоторую биекцию.*

Доказательство. Пусть $R \in \mathcal{R}(\Delta_m, X)$ — произвольное неприводимое соответствие. Из неприводимости следует, что если $R(j) \cap R(k) \ne \emptyset$ для некоторых $j \ne k$, то $R(j) = R(k) = \{x\}$ для некоторого $x \in X$. В частности, если $\#R(i) > 1$ для некоторого i, то $R(i)$ не пересекается ни с каким $R(p)$, $p \ne i$. Введем следующее обозначение: для $\sigma \in \mathcal{P}(\Delta_m, X)$ положим $\mathrm{np}(\sigma)$ равным числу пар $\{j,k\}$ таких, что $j \ne k$ и $\sigma(j) \cap \sigma(k) \ne \emptyset$. Ясно, что для $\sigma \in \mathcal{R}(\Delta_m, X)$ условие $\mathrm{np}(\sigma) = 0$ равносильно тому, что семейство $\bigl\{\sigma(i)\bigr\}$ является разбиением X.

Предположим, что семейство $\bigl\{R(i)\bigr\}$ не является разбиением. Мы покажем, что в этом случае всегда можно перестроить соответствие R так, что полученное отношение $\tilde R$ снова будет неприводимым соответствием, причем $\operatorname{dis}\tilde R \le \operatorname{dis} R$ и $\mathrm{np}(\tilde R) < \mathrm{np}(R)$. Если $\mathrm{np}(\tilde R) > 0$, то положим $R = \tilde R$ и повторим эту процедуру. За конечное число шагов мы придем к соответствию $\tilde R$, для которого $\mathrm{np}(\tilde R) = 0$ и $\operatorname{dis}\tilde R \le \operatorname{dis} R$, что и завершит доказательство.

Итак, пусть для некоторых $j \ne k$ выполняется $R(j) = R(k) = \{x\}$. Так как $m \le \#X$, то существует такое i, что $\#R(i) > 1$ и, значит, $i \notin \{j,k\}$, а $R(i)$ не пересекается с другими $R(p)$. Выберем произвольную точку $x_i \in R(i)$ и построим новое соответствие $\tilde R$, которое совпадает с R на всех элементах симплекса, кроме i, j, k, и

$$\tilde R(i) = R(i) \setminus \{x_i\}, \quad \tilde R(j) = \{x_i\}, \quad \tilde R(k) = \{x\}.$$

Ясно, что $\tilde R \in \mathcal{R}(\Delta_m, X)$, так как R определено на всех элементах симплекса, и в каждый элемент из X переходит по крайней мере один элемент симплекса. Кроме того, соответствие $\tilde R$ по-прежнему является неприводимым, что проверяется непосредственно.

Далее, для оценки $\mathrm{np}(\tilde R)$ заметим, что единственными изменившимися $R(p)$ являются $R(i)$ и $R(j)$, поэтому достаточно изучить, как изменились пересечения с этими двумя множествами. Так как $R(i)$ не пересекался с остальными $R(p)$, а $\tilde R(i) \sqcup \tilde R(j) = R(i)$, то $\tilde R(i)$ и $\tilde R(j)$ не пересекают остальные $\tilde R(p)$. Кроме того, $\tilde R(i) \cap \tilde R(j) = \emptyset$. Таким образом, число пересечений с $R(i)$ остальных $R(p)$ такое же, как число пересечений $\tilde R(i)$ с остальными $\tilde R(p)$ (и равно нулю). Что касается $R(j)$, то имелось непустое пересечение $R(j) \cap R(k)$ (и, возможно, некоторые другие). Однако теперь $\tilde R(j)$ не пересекает ни один из оставшихся $\tilde R(p)$, тем самым, $\mathrm{np}(\tilde R) < \mathrm{np}(R)$.

Докажем теперь, что $\operatorname{dis}\tilde R \le \operatorname{dis} R$.

Положим

$$M(R,p,q) = \max\Bigl\{\bigl||x_p x_q| - 1\bigr| : x_p \in R(p),\, x_q \in R(q),\, p \ne q\Bigr\}.$$

Напомним, что

$$\operatorname{dis} R = \max\bigl\{\delta_R = 1,\, \max_p \operatorname{diam} R(p),\, \max_{p\ne q} M(R,p,q)\bigr\},$$

и

$$\operatorname{dis}\tilde R = \max\bigl\{\delta_{\tilde R},\, \max_p \operatorname{diam}\tilde R(p),\, \max_{p\ne q} M(\tilde R,p,q)\bigr\}.$$

Ясно, что $\delta_{\tilde R} \le 1 \le \operatorname{dis} R$ и $\operatorname{diam} \tilde R(p) \le \operatorname{diam} R(p) \le \operatorname{dis} R$ для всех p. Для завершения доказательства, осталось показать, что для любых p и q выполнено неравенство $M(\tilde R, p, q) \le \operatorname{dis} R$.

Если p и q не входят в $\{i,j,k\}$, то $M(\tilde R, p, q) = M(R, p, q) \le \operatorname{dis} R$.

Пусть теперь один из индексов p и q, для определенности p, не входит в $\{i,j,k\}$, а другой — входит. В этом случае

$M(\tilde R, p, k) = M(R, p, k) \le \operatorname{dis} R$, так как $\tilde R(p) = R(p)$ и $\tilde R(k) = R(k)$;

$M(\tilde R, p, i) \le M(R, p, i) \le \operatorname{dis} R$, так как $\tilde R(i) \subset R(i)$;

$M(\tilde R, p, j) \le M(R, p, i) \le \operatorname{dis} R$, так как $\tilde R(j) \subset R(i)$.

Наконец, рассмотрим ситуацию, когда $\{p,q\} \subset \{i,j,k\}$. Имеем

$M(\tilde R, i, k) \le M(R, i, k) \le \operatorname{dis} R$, так как $\tilde R(i) \subset R(i)$ и $\tilde R(k) = R(k)$;

$M(\tilde R, j, k) \le M(R, i, k) \le \operatorname{dis} R$, так как $\tilde R(j) \subset R(i)$ и $\tilde R(k) = R(k)$;

$$M(\tilde R, i, j) = \max\Big\{\big||x_i'x_i| - 1\big| : x_i' \in \tilde R(i) = R(i) \setminus \{x_i\}\Big\} \le$$
$$\le \max\Big\{1, \big||x_i'x_i| - 1\big| : x_i' \in \tilde R(i)\Big\} \le \max\Big\{1, \max\big\{|x_i'x_i| : x_i' \in \tilde R(i)\big\}\Big\} \le$$
$$\le \max\big\{1, \operatorname{diam} R(i)\big\} \le \operatorname{dis} R,$$

где второе неравенство справедливо в силу предложению 1.3.

Таким образом, все величины из выражения для $\operatorname{dis} \tilde R$ не превосходят $\operatorname{dis} R$, откуда $\operatorname{dis} \tilde R \le \operatorname{dis} R$, что и требовалось. $\square$

Теорема 4.2 позволяет получить полезную формулу для расстояния Громова–Хаусдорфа между компактным метрическим пространством X и конечным симплексом, число точек в котором меньше или равно числа точек в X.

Конструкция 4.3. Для **произвольного** метрического пространства X, $m \le \#X$, и $D = \{X_1, \ldots, X_m\} \in \mathcal{D}_m(X)$ положим $R_D = \sqcup\big(\{i\} \times X_i\big)$. Отметим, что если $D' \in \mathcal{D}_m(X)$ отличается от D на перенумерацию элементов разбиения, то $\operatorname{dis} R_D = \operatorname{dis} R_{D'}$.

Обозначение 4.4. Для $D = \{X_1, \ldots, X_m\} \in \mathcal{D}_m(X)$ положим

$$\operatorname{diam} D = \max\{\operatorname{diam} X_1, \ldots, \operatorname{diam} X_m\}.$$

Предложение 4.5. *Пусть X — произвольное метрическое пространство и $m \in \mathbb{N}$, $m \le \#X$. Тогда для любых $\lambda > 0$ и $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем*

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \beta(D) - \lambda\}.$$

Доказательство. Действительно, пусть $D = \{X_1, \ldots, X_m\}$. Из определения искажения заключаем, что

$$\operatorname{dis} R_D = \sup\{\operatorname{diam} D,\, \big|\lambda - |xy|\big| : x \in X_p,\, y \in X_q,\, 1 \le p < q \le m\}.$$

По предложению 1.4, имеем

$$\sup\{\bigl|\lambda-|xy|\bigr| : x\in X_p,\, y\in X_q,\, 1\le p<q\le m\}=\max\bigl\{\lambda-\alpha(D),\, \beta(D)-\lambda\bigr\}.$$

□

Предложение 4.6. *Пусть X — компактное метрическое пространство. Тогда для каждого $m\in\mathbb{N}$, $m\le\#X$, и $\lambda>0$ имеем*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X)=\inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)}\operatorname{dis}R_D.$$

Доказательство. В силу теоремы 4.2, существует $R\in\mathcal{R}^0_{\mathrm{opt}}(\lambda\Delta_m, X)$ такое, что семейство $\bigl\{R(i)\bigr\}$ — разбиение множества X. Таким образом, $d_{GH}(\lambda\Delta_m, X)$ достигается на некотором R_D, $D\in\mathcal{D}_m(X)$. □

Следствие 4.7. *Пусть X — компактное метрическое пространство и $m\in\mathbb{N}$, $m\le\#X$. Тогда для любого $\lambda>0$ имеем*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X)=\inf\Bigl\{\max\bigl(\operatorname{diam}D,\, \lambda-\alpha(D),\, \beta(D)-\lambda\bigr) : D\in\mathcal{D}_m(X)\Bigr\}.$$

4.3 Расстояние от конечного метрического пространства до симплексов с тем же числом точек

Для произвольного метрического пространства X положим

$$\varepsilon(X)=\inf\bigl\{|xy| : x,y\in X,\, x\ne y\bigr\}.$$

Отметим, что $\varepsilon(X)\le\operatorname{diam}X$, причем равенство достигается, если и только если X является симплексом. Кроме того, если M — конечное метрическое пространство, состоящее из n точек, и $\sigma(M)=(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$, то $\varepsilon(M)=\sigma_{n-1}$.

Теорема 4.8. *Пусть M — конечное метрическое пространство, $\#M=n$, $\sigma(M)=(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$, $\Sigma(M)=(\Sigma_1,\dots,\Sigma_{n-1})$, $\lambda>0$. Тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_n, M)=\max\{\lambda-\sigma_{n-1},\, \Sigma_{n-1}-\lambda\}=\max\bigl\{\lambda-\varepsilon(M),\, \operatorname{diam}M-\lambda\bigr\}.$$

Более точно, если $\sigma_{n-1}+\Sigma_{n-1}\le 2\lambda$, то $2d_{GH}(\lambda\Delta_n, M)=\lambda-\sigma_{n-1}$, иначе $2d_{GH}(\lambda\Delta_n, M)=\Sigma_{n-1}-\lambda$.

Доказательство. Для каждого $D\in\mathcal{D}_n(X)$ имеем $\operatorname{diam}D=0$. Кроме того, для всех таких D выполняется $\alpha(D)=\sigma_{n-1}$ и $\beta(D)=\Sigma_{n-1}$. Осталось воспользоваться следствием 4.7. □

4.4 Расстояние от компактного метрического пространства до симплексов с не бо́льшим числом точек

В [5] был доказан следующий результат.

Предложение 4.9 ([5]). *Пусть X — конечное метрическое пространство, $\lambda\ge 2\operatorname{diam}X$ и $\sigma(X)=(\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1})$. Тогда $2d_{GH}(\lambda\Delta_{k+1}, X)=\lambda-\sigma_k$ при всех $k=1,\dots,n-1$.*

Следующая теорема не только обобщает предложение 4.9 на произвольные компактные метрические пространства, но и ослабляет ограничение на λ.

Теорема 4.10. *Пусть X — компактное метрическое пространство, $\sigma(X) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$ — mst-спектр X, и $\lambda \geq \operatorname{diam} X + \sigma_k$. Тогда $2d_{GH}(\lambda\Delta_{k+1}, X) = \lambda - \sigma_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$, $k+1 \leq \#X$.*

Доказательство. Положим $m = k + 1$ и выберем произвольное разбиение $D \in \mathcal{D}_m(X)$. По предложению 4.5, имеем

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \beta(D) - \lambda\}.$$

Заметим, что $\operatorname{diam} D \leq \operatorname{diam} X$ и $\beta(D) - \lambda \leq \operatorname{diam} X - \lambda < \operatorname{diam} X$. Далее, так как $\lambda \geq \operatorname{diam} X + \sigma_k$, то $\lambda - \alpha(D) \geq \lambda - \sigma_k \geq \operatorname{diam} X$, откуда $\operatorname{dis} R_D = \lambda - \alpha(D)$ и, по предложению 4.6, имеем $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \lambda - \sigma_k$. □

Обозначение 4.11. Пусть X — произвольное метрическое пространство. Положим $d_m(X) = \inf\bigl\{\operatorname{diam} D : D \in \mathcal{D}_m(X)\bigr\}$, если $\mathcal{D}_m(X) \neq \emptyset$, и $d_m(X) = \infty$ в противном случае.

Замечание 4.12. Если X — конечное метрическое пространство и $n = \#X$, то $d_n(X) = 0$.

Напомним, что *кликой* в простом графе называется каждый подграф, являющийся полным графом. Назовем граф *m-кликовым*, если он содержит остовный подграф, представляющий собой дизъюнктное объединение m клик. Отметим, что каждый граф, имеющий n вершин, является n-кликовым.

Пусть X — произвольное метрическое пространство и $\delta \geq 0$. Через $G_\delta(X)$ обозначим (вообще говоря, бесконечный) граф, множество вершин которого равно X, а $v, w \in X$, $v \neq w$, соединены ребром в $G_\delta(X)$ тогда и только тогда, когда $|vw| \leq \delta$. Определим число $\delta_m(X)$, положив его точной нижней грани тех $\delta \geq 0$, для которых $G_\delta(X)$ является m-кликовым. Если таких δ не существует, то положим $\delta_m(X) = \infty$.

Предложение 4.13. *Для произвольного метрического пространства X имеем $d_m(X) = \delta_m(X)$.*

Доказательство. Действительно, $\mathcal{D}_m(X) = \emptyset$, если и только если $\#X < m$, а последнее равносильно тому, что не существует m-кликового графа с множеством вершин X. Таким образом, в рассматриваемом случае искомое равенство имеет место.

Пусть теперь $\#X \geq m$. Условие $d_m(X) = \infty$ равносильно тому, что в любом разбиении $D = \{X_i\} \in \mathcal{D}(X)$ для некоторого i имеем $\operatorname{diam} X_i = \infty$; это последнее условие равносильно тому, что в полном графе с множеством вершин X не существует m-кликового подграфа, все ребра которого не превосходят некоторого числа δ. Таким образом, и в этом случае имеет место равенство.

Пусть теперь $d_m(X) < \infty$. Рассмотрим семейство разбиений $D_i \in \mathcal{D}_m(X)$ таких, что $d_i = \operatorname{diam} D_i \to d_m(X)$. Тогда в графе G_{d_i} имеется m-кликовый подграф, в котором каждое D_i лежит в некоторой клике. Отсюда заключаем, что $\delta_m(X) \leq d_m(X)$.

Обратно, пусть δ_i — убывающая последовательность, для которой $\delta_i \to \delta_m(X)$. Обозначим через G_i некоторый m-кликовый подграф в G_{δ_i}, и пусть H_i — подграф в G_i, равный дизъюнктному объединению m клик. Обозначим через X_i^p множества вершин клик графа H_i, тогда $\operatorname{diam} X_i^p \leq \delta_i$. Положив $D_i = \{X_i^p\}$, получим, что $D_i \in \mathcal{D}_m(X)$ и $\operatorname{diam} D_i \leq \delta_i$, откуда $d_m(X) \leq \delta_m(X)$. □

Теорема 4.14. *Пусть X — компактное метрическое пространство, $\sigma(X) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$ — mst-спектр X, и $\lambda < \operatorname{diam} X + \sigma_k$. Предположим, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $k+1 \le \#X$, выполняется $d_{k+1}(X) = \operatorname{diam} X$. Тогда $2d_{GH}(\lambda\Delta_{k+1}, X) = \operatorname{diam} X$.*

Доказательство. Положим $m = k+1$. Напомним, что в силу предложения 4.5, для каждого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ выполняется

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \beta(D) - \lambda\}.$$

Кроме того, $\operatorname{diam} D \le \operatorname{diam} X$ и $\beta(D) - \lambda \le \operatorname{diam} X - \lambda < \operatorname{diam} X$. Так как $\lambda < \operatorname{diam} X + \sigma_k$, то существует $D \in \mathcal{D}_m(X)$, для которого $\lambda - \operatorname{diam} X < \alpha(D)$, так что для такого D имеем $\lambda - \alpha(D) < \operatorname{diam} X$. Собирая вместе все упомянутые неравенства, заключаем, что для такого D выполняется $\operatorname{dis} R_D \le \operatorname{diam} X$. Таким образом, в силу предложения 4.6, имеем $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) \le \operatorname{diam} X$.

С другой стороны, так как $d_m(X) = \operatorname{diam} X$, то для каждого $R_D \in \mathcal{R}^0_{\mathrm{opt}}(\lambda\Delta_m, X)$ имеем

$$\operatorname{diam} X \ge 2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \operatorname{dis} R_D \ge \operatorname{diam} D \ge d_m(X) = \operatorname{diam} X,$$

откуда $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \operatorname{diam} X$. □

Теорема 4.15. *Пусть X — компактное метрическое пространство. Тогда для произвольного $m \in \mathbb{N}$, $m \le \#X$, и $0 < \lambda \le (\operatorname{diam} X)/2$ имеем $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \max\{d_m(X), \operatorname{diam} X - \lambda\}$.*

Доказательство. Выберем произвольное разбиение $D = \{X_i\} \in \mathcal{D}_m(X)$. По предложению 4.5, имеем

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \beta(D) - \lambda\}.$$

Заметим, что $\operatorname{diam} D \le \operatorname{diam} X$, $\lambda - \alpha(D) \le \lambda < \operatorname{diam} X$ и $\beta(D) - \lambda \le \operatorname{diam} X - \lambda < \operatorname{diam} X$, поэтому $\operatorname{dis} R_D \le \operatorname{diam} X$, причем если $\operatorname{diam} D < \operatorname{diam} X$, то $\operatorname{dis} R_D < \operatorname{diam} X$, в частности, в этом случае $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) < \operatorname{diam} X$.

Пусть сначала $d_m(X) = \operatorname{diam} X$, тогда

$$\operatorname{diam} X \ge \operatorname{dis} R_D \ge \operatorname{diam} D \ge d_m(X) = \operatorname{diam} X,$$

откуда $\operatorname{dis} R_D = \operatorname{diam} X$ для всех $D \in \mathcal{D}_m$ и, значит, в силу предложения 4.6, имеем

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \operatorname{dis} R_D = \operatorname{diam} X = \max\bigl\{d_m(X), \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}.$$

Пусть теперь $d_m(X) < \operatorname{diam} X$. Тогда, по определению точной нижней грани, существует $D' \in \mathcal{D}_m(X)$, для которого $\operatorname{diam} D' < \operatorname{diam} X$. Как было отмечено выше, тогда $\operatorname{dis} R_{D'} < \operatorname{diam} X$, откуда $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) < \operatorname{diam} X$. С другой стороны, по теореме 4.2 существует такое $D \in \mathcal{D}_m(X)$, что $R_D \in \mathcal{R}^0_{\mathrm{opt}}(\lambda\Delta_m, X)$. Но тогда $\operatorname{dis} R_D \le \operatorname{dis} R_{D'} < \operatorname{diam} X$ и $\operatorname{diam} D < \operatorname{diam} X$.

Заметим также, что из неравенства $\operatorname{diam} D < \operatorname{diam} X$ следует равенство $\beta(D) = \operatorname{diam} X$. Кроме того, так как в этом случае

$$\beta(D) + \alpha(D) = \operatorname{diam} X + \alpha(D) \ge \operatorname{diam} X,$$

то из предположения $\lambda \le (\operatorname{diam} X)/2$ следует, что $\beta(D) + \alpha(D) \ge 2\lambda$, откуда $\beta(D) - \lambda \ge \lambda - \alpha(D)$, и

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\, \beta(D) - \lambda\}.$$

Итак, $D \in \mathcal{D}_m(X)$, $R_D \in \mathcal{R}^0_{\rm opt}(\lambda\Delta_m, X)$ и $\operatorname{diam} D < \operatorname{diam} X$. Тогда, если $\operatorname{diam} D \le \operatorname{diam} X - \lambda$, то $\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D, \operatorname{diam} X - \lambda\} = \operatorname{diam} X - \lambda = \max\bigl\{d_m(X), \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}$.

Если же $\operatorname{diam} D \ge \operatorname{diam} X - \lambda$, то

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D, \operatorname{diam} X - \lambda\} = \operatorname{diam} D \ge \max\{d_m(X), \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Получим обратное неравенство. Для этого рассмотрим последовательность $D_i \in \mathcal{D}_m(X)$, для которой $\operatorname{diam} X > \operatorname{diam} D_i \to d_m(X)$. Для каждого i имеем $\beta(D_i) = \operatorname{diam} X$ и $\lambda - \alpha(D_i) \le \beta(D_i) - \lambda$, откуда

$$\operatorname{dis} R_{D_i} = \max\{\operatorname{diam} D_i, \operatorname{diam} X - \lambda\} \to \max\bigl\{d_m(X), \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}.$$

Но $R_D \in \mathcal{R}^0_{\rm opt}(\lambda\Delta_m, X)$, поэтому $\operatorname{dis} R_D \le \operatorname{dis} R_{D_i}$ для любого i, откуда, переходя к пределу, заключаем, что $\operatorname{dis} R_D \le \max\bigl\{d_m(X), \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}$, что и требовалось. $\square$

Применим теорему 4.2 для вычисления расстояния между конечным метрическим пространством и симплексом, в котором на одну точку меньше.

Теорема 4.16. *Пусть X — конечное метрическое пространство, $\#X = n \ge 2$, $\lambda > 0$. Тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_{n-1}, X) = \max\{\sigma_{n-1}, \lambda - \sigma_{n-2}, \Sigma_{n-1} - \lambda\}.$$

Более того, оптимальным является соответствие, которое отправляет один из элементов симплекса в пару самых близких точек пространства X, а между оставшимися элементами устанавливает биекцию.

Доказательство. Снова воспользуемся следствием 4.7, согласно которому искомое расстояние равно минимуму искажений соответствий R_D, порожденных разбиениями D пространства X на $n-1$ подмножество. Так как $\#X = n$, то все такие разбиения устроены так: $n-2$ элемента разбиения являются одноточечными, и один элемент разбиения состоит из двух точек; пусть этот элемент равен $\{x_i, x_j\}$. Тогда

$$\operatorname{dis} R_D = \max\bigl\{|x_ix_j|, \lambda - \alpha(D), \beta(D) - \lambda\bigr\},$$

причем $\alpha(D) = \min\bigl\{|x_px_q| : p \ne q, \{p,q\} \ne \{i,j\}\bigr\}$ и $\beta(D) = \max\bigl\{|x_px_q| : p \ne q, \{p,q\} \ne \{i,j\}\bigr\}$, т.е., минимум и максимум берутся по всем расстояниям в X, кроме одного. Заметим, что если упорядочить все ненулевые расстояния в метрическом пространстве по возрастанию, то полученная числовая последовательность будет иметь вид $\{\sigma_{n-1}, \sigma_{n-2}, \ldots, \Sigma_{n-2}, \Sigma_{n-1}\}$. Поэтому

$$\operatorname{dis} R_D = \begin{cases} \max\{\sigma_{n-1}, \lambda - \sigma_{n-2}, \Sigma_{n-1} - \lambda\}, & \text{если } |x_ix_j| = \sigma_{n-1},\\ \max\{\Sigma_{n-1}, \lambda - \sigma_{n-1}, \Sigma_{n-2} - \lambda\}, & \text{если } |x_ix_j| = \Sigma_{n-1},\\ \max\bigl\{|x_ix_j|, \lambda - \sigma_{n-1}, \Sigma_{n-1} - \lambda\bigr\}, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как Σ_{n-1} — максимальное расстояние в X, а σ_{n-1} — минимальное, то

$$\max\{\Sigma_{n-1}, \lambda - \sigma_{n-1}, \Sigma_{n-2} - \lambda\} = \max\{\Sigma_{n-1}, \lambda - \sigma_{n-1}\} \ge \max\{\sigma_{n-1}, \lambda - \sigma_{n-2}, \Sigma_{n-1} - \lambda\}.$$

Далее, $\max\bigl\{|x_ix_j|, \lambda - \sigma_{n-1}, \Sigma_{n-1} - \lambda\bigr\} \ge \max\{\sigma_{n-1}, \lambda - \sigma_{n-2}, \Sigma_{n-1} - \lambda\}$, так как $\sigma_{n-1} \le |x_ix_j|$ для любых i и j. Поэтому,

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_{n-1}, X) = \min_D \operatorname{dis} R_D = \max\{\sigma_{n-1}, \lambda - \sigma_{n-2}, \Sigma_{n-1} - \lambda\}.$$

Более того, правая часть последнего равенства равна искажению соответствия, которое отправляет один из элементов симплекса в пару самых близких точек пространства X, а между оставшимися элементами устанавливает биекцию. $\square$

4.5 Примеры

В общем случае, однако, вычисление расстояния до симплекса остается сложной задачей. Разберем пример вычисления расстояния по Громову–Хаусдорфу между симплексом $t\Delta_2$ и четырехточечным метрическим пространством $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ с матрицей расстояний

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b & d \\ a & 0 & c & e \\ b & c & 0 & f \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 4.2 и следствию 4.7, для вычисления расстояния достаточно рассмотреть только неприводимые соответствия $R_D \in \mathcal{R}(t\Delta_2, X)$, порожденные разбиениями $D = \{X_1, X_2\}$ множества X на непустые подмножества. Таких разбиений, очевидно, семь: четыре на одноэлементное и трехэлементное подмножества, и три на два двухэлементных. Если такое соответствие фиксировано, то его искажение, в силу предложения 4.5, имеет вид

$$\operatorname{dis} R_D = \max\bigl\{\operatorname{diam} D,\, t - \alpha(D),\, \beta(D) - t\bigr\}.$$

Если при этом $X_1 = \{x_1\}$, $X_2 = \{x_2, x_3, x_4\}$, то

$$\operatorname{dis} R_D = \max\bigl\{\max\{c, e, f\},\, t - \min\{a, b, d\},\, \max\{a, b, d\} - t\bigr\},$$

а если $X_1 = \{x_1, x_2\}$, $X_2 = \{x_3, x_4\}$, то

$$\operatorname{dis} R_D = \max\bigl\{\max\{a, f\},\, t - \min\{b, c, d, e\},\, \max\{b, c, d, e\} - t\bigr\}.$$

4.5.1 Функция расстояния устроена сложно, но выражается через спектры

Предположим, что расстояния упорядочены следующим образом: $a < e < b < c < f < d$. В этом случае спектры имеют вид $\sigma = \{b, e, a\}$ и $\Sigma = \{c, f, d\}$. В соответствии с вышесказанным, расстояние вычисляется как минимум из семи максимумов, а именно:

$$(1)\quad 2d_{GH}(t\Delta_2, X) = \min\Bigl\{\max\bigl\{f, t-a, d-t\bigr\}, \max\bigl\{d, t-a, c-t\bigr\}, \max\bigl\{d, t-b, f-t\bigr\},$$
$$\max\bigl\{c, t-e, d-t\bigr\}, \max\bigl\{f, t-e, d-t\bigr\}, \max\bigl\{b, t-a, d-t\bigr\}, \max\bigl\{d, t-a, f-t\bigr\}\Bigr\}.$$

Рассмотрим третий, четвертый и шестой максимумы в правой части формулы (1) и заметим, что каждый из оставшихся максимумов не меньше одного из этих трех. Проверяется это непосредственно. Например, $\max\bigl\{d, t-a, c-t\bigr\} \ge \max\bigl\{b, t-a, d-t\bigr\}$, так как $d \ge b$ и $d \ge d-t$. Таким образом,

$$(2)\qquad 2d_{GH}(t\Delta_2, X) = \min\Bigl\{\max\bigl\{d, t-b, f-t\bigr\}, \max\bigl\{c, t-e, d-t\bigr\}, \max\bigl\{b, t-a, d-t\bigr\}\Bigr\}.$$

Лемма 4.17. *При $t \in [0, a+c]$ имеем $2d_{GH}(t\Delta_2, X) = \max\bigl\{b, t-a, d-t\bigr\}$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что первые два максимума в формуле (2) не меньше третьего на выбранном участке.

Сравним первый и третий максимумы. Имеем: $d > b$ при всех t; так как $t \le a+c$, то $t - a \le c < d$; наконец, $d - t \le d$.

Сравним второй и третий максимумы. Имеем: $c > b$ при всех t; так как $t \le a+c$, то $t - a \le c$. □

Лемма 4.18. *При* $t \in [a+c, e+d]$ *имеем* $2d_{GH}(t\Delta_2, X) = \max\{c, t-e, d-t\}$.

Доказательство. Достаточно проверить, что первый и третий максимумы в формуле (2) не меньше второго на выбранном участке.

Сравним первый и второй максимумы. Имеем: $d > c$ при всех t; так как $t \le e+d$, то $t-e < d$; наконец, $d-t \le d$.

Сравним третий и второй максимумы. Имеем: $t-a > t-e$ при всех t; так как $t \ge a+c$, то $t-a \ge c$. □

Лемма 4.19. *При* $t \in [e+d, \infty]$ *имеем* $2d_{GH}(t\Delta_2, X) = \max\{d, t-b, f-t\}$.

Доказательство. Достаточно проверить, что второй и третий максимумы в формуле (2) не меньше первого на выбранном участке.

Сравним второй и первый максимумы. Имеем: $t-e > t-b$, а также $d-t > f-t$ при всех t; так как $t \ge e+d$, то $t-e \ge d$.

Сравним третий и первый максимумы. Имеем: $t-a > t-b$, а также $d-t > f-t$ при всех t; так как $t \ge e+d$, то $t-a > t-e \ge d$. □

Для иллюстрации, фиксируем следующие значения расстояний: $a=3$, $b=4$, $c=5$, $d=6.5$, $e=3.5$, $f=6$ (неравенства треугольника проверяются непосредственно). График функции $f(t) = 2d_{GH}(t\Delta_2, X)$ показан на рис. 1.

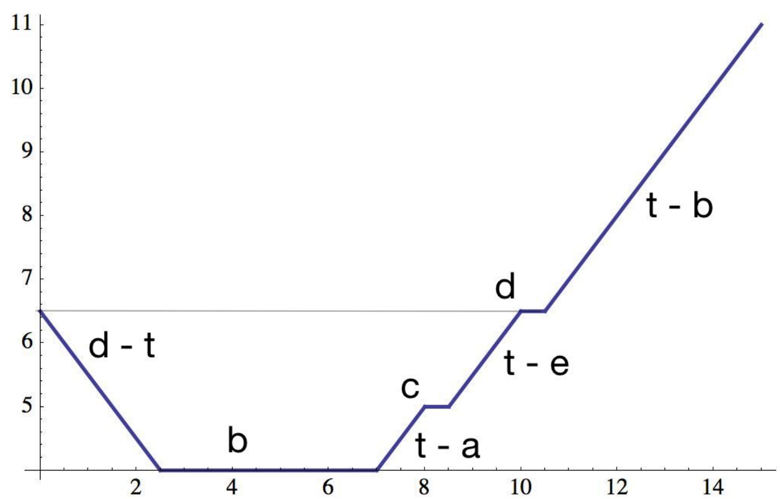

Рис. 1: График функции $f(t) = 2d_{GH}(t\Delta_2, X)$ при $a=3$, $e=3.5$, $b=4$, $c=5$, $f=6$, $d=6.5$.

Отметим, что так как в рассматриваемом случае все шесть расстояний входят в один из двух спектров, функция $f(t)$ может быть выражена через эти спектры (в рассматриваемом случае оказываются задействованы все элементы спектра σ, а также Σ_1 и Σ_3). Однако это не всегда так.

4.5.2 Функция расстояния устроена проще, но не выражается через спектры

Предположим теперь, что расстояния упорядочены следующим образом: $a < b < c < d < e < f$. В этом случае спектры имеют вид $\sigma = \{d, b, a\}$ и $\Sigma = \{d, e, f\}$, величина c не входит в спектр, так как соответствующее ребро не входит в минимальное остовное дерево (оно образует цикл с двумя ребрами наименьшей длины). На сей раз, расстояние между симплексом и X выражается слегка по другой формуле:

$$(3) \quad 2d_{GH}(t\Delta_2, X) = \min\Big\{\max\big\{f, t-a, d-t\big\}, \max\big\{f, t-a, e-t\big\}, \max\big\{e, t-b, f-t\big\}, \\ \max\big\{c, t-d, f-t\big\}, \max\big\{f, t-b, e-t\big\}, \max\big\{e, t-a, f-t\big\}, \max\big\{d, t-a, f-t\big\}\Big\}.$$

Заметим, что, в силу выбранного порядка, все максимумы в правой части формулы (3) не меньше четвертого максимума $\max\big\{c, t-d, f-t\big\}$, откуда

$$2d_{GH}(t\Delta_2, X) = \max\big\{c, t-d, f-t\big\}.$$

В качестве иллюстрации, изобразим на рис. 2 график функции $g(t) = 2d_{GH}(t\Delta_2, X)$ для некоторых конкретных значений.

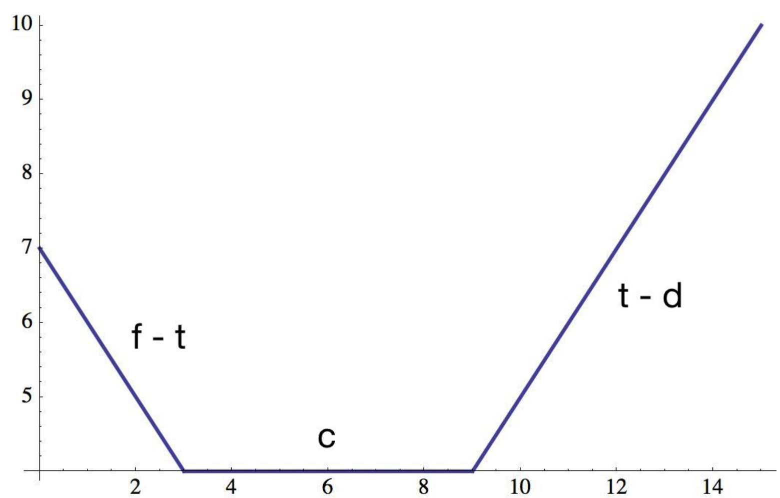

Рис. 2: График функции $g(t) = 2d_{GH}(t\Delta_2, X)$ при $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $d = 5$, $e = 6$, $f = 7$.

Несмотря на то, что функция g устроена проще, чем f, она не выражается через спектры, так как c не принадлежит ни одному из спектров. Отметим также, что c в данном случае равняется $\delta_2(X)$ (т.е. соответствующему числу 2-кликовости).

4.5.3 Расстояния до симплексов не различают неизометричные пространства

Хорошо известно, что множество попарных расстояний не определяет полностью метрическое пространство. Один из простых примеров получается так. Рассмотрим на множестве

$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ следующие две матрицы расстояний, отличающиеся перестановкой значений расстояний $|x_1x_4|$ и $|x_3x_4|$:

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & d \\ a & 0 & c & e \\ b & c & 0 & f \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix}, \qquad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & a & b & f \\ a & 0 & c & e \\ b & c & 0 & d \\ f & e & d & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если попарные расстояния мало отличаются друг от друга, то неравенства треугольника будут выполнены для обеих матриц.

Предположим, что $a < b < c < d < f < e$, и обозначим через X_i пространство с матрицей расстояний S_i, $i = 1,\ 2$. Хотя множества попарных расстояний у этих пространств одинаковы, сами пространства не изометричны. Например, в X_1 единственное минимальное остовное дерево — это звезда с вершиной в точке x_1, а в X_2 — путь $x_2x_1x_3x_4$. Тем не менее, спектры σ, максимальные деревья и спектры Σ у этих пространств одинаковы.

Утверждение 4.20. *В сделанных предположениях, расстояния по Громову–Хаусдорфу от любого симплекса до пространств X_i совпадают.*

Доказательство. По теореме 4.1, расстояния от X_i до симплексов с пятью и более вершинами одинаковы, так как $\operatorname{diam} X_1 = \operatorname{diam} X_2 = e$. Расстояния до симплексов $t\Delta_4$ совпадают по теореме 4.8, так как одинаковы наибольшее и наименьшее расстояния между точками пространств X_i. Далее, расстояния до симплексов $t\Delta_3$ одинаковы по теореме 4.16, так как у пространств X_i одинаковые спектры σ и Σ. Расстояния до одноточечного симплекса совпадают по пункту (1) предложения 1.2, так как у пространств X_i равные диаметры. Остается вычислить расстояние до двухточечных симплексов. Это делается по аналогии с предыдущими двумя примерами.

Для пространства X_1 расстояние вычисляется так:

$$(4)\quad 2d_{GH}(t\Delta_2, X_1) = \min\Big\{\max\big\{e, t-a, d-t\big\}, \max\big\{f, t-a, e-t\big\}, \max\big\{e, t-b, f-t\big\},$$
$$\max\big\{c, t-d, e-t\big\}, \max\big\{f, t-b, e-t\big\}, \max\big\{e, t-a, f-t\big\}, \max\big\{d, t-a, e-t\big\}\Big\};$$

для пространства X_2 расстояние вычисляется так:

$$(5)\quad 2d_{GH}(t\Delta_2, X_2) = \min\Big\{\max\big\{e, t-a, f-t\big\}, \max\big\{f, t-a, e-t\big\}, \max\big\{e, t-b, d-t\big\},$$
$$\max\big\{c, t-d, e-t\big\}, \max\big\{d, t-b, e-t\big\}, \max\big\{e, t-a, f-t\big\}, \max\big\{f, t-a, e-t\big\}\Big\}.$$

Заметим, что, в силу выбранного порядка, все максимумы в правых частях формул (4) и (5) не меньше четвертого максимума $\max\big\{c, t-d, e-t\big\}$, откуда

$$2d_{GH}(t\Delta_2, X_1) = \max\big\{c, t-d, e-t\big\} = 2d_{GH}(t\Delta_2, X_2).$$

$\square$

Следствие 4.21. *В пространстве четырехточечных метрических пространств существует открытое множество U такое, что для каждого $X \in U$ можно найти неизометричное ему четырехточечное пространство X', для которого $d_{GH}(X, t\Delta_m) = d_{GH}(X', t\Delta_m)$ при всех $t > 0$ и $m \in \mathbb{N}$.*

Замечание 4.22. Отметим, что расстояния до симплексов от пространств X_i не зависит от f, поэтому, в действительности, мы нашли бесконечно много (континуум) попарно неизометричных конечных метрических пространств, для которых расстояние от них до всех симплексов одно и то же. Возникает естественная задача описания всех таких семейств метрических пространств. В частности, можно ли построить аналогичные примеры для бесконечных пространств.

Список литературы

[1] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic.* ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.

[2] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.

[4] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings.* ArXiv e-prints, 1604.06116, 2016.

[5] Tuzhilin A.A. *Calculation of Minimum Spanning Tree Edges Lengths using Gromov–Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, arXiv:1605.01566, 2016.

[6] Иванов А.О., Тужилин А.А., “Минимальные остовные деревья на бесконечных множествах,” Фундаментальная и прикладная математика, **20** (2), 89–103 (2015).

[7] Иванов А.О., Никонов И.М., Тужилин А.А., “Множества, допускающие соединение графами конечной длины,” Математический сборник, **196** (6), 71–110 (2005).