Продолжаемость метрических сегментов относительно расстояния Громова–Хаусдорфа.

С.И. Борзов, А.О. Иванов, А.А. Тужилин

26 августа 2020 г.

Аннотация

В настоящей статье изучается геометрия расстояния Громова—Хаусдорфа на классе всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. Определяются непрерывные кривые в этом классе, их длины, и показывается, что расстояние Громова–Хаусдорфа является внутренним. Кроме того, рассматриваются метрические сегменты, а именно, классы точек, лежащих между двумя заданными, и изучается проблема продолжения таких сегментов за их концы.

Ключевые слова: Расстояние Громова–Хаусдорфа, класс всех метрических пространств, аксиомы фон Неймана–Бернайса–Гёделя, внутренняя функция расстояния, метрический сегмент, продолжение за концы.

Библиография: 9 названий.

Введение

Работа посвящена изучению свойств класса всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, наделенного расстоянием Громова–Хаусдорфа. Напомним, что это расстояние определяется для каждой пары метрических пространств и измеряет “метрическую непохожесть”. Фактически, оно равно (с точность до умножению на 2) наименьшему возможному искажению метрики по всем выборам соответствий между точками этих пространств. Как и всякое расстояние, оно определяет сходимость последовательностей метрических пространств, и эти сходимость и расстояние активно используются в самого разного рода приложениях, например, при изучении скорости роста групп или в распознавании образов.

Если ограничиться компактными метрическими пространствами, то расстояние Громова–Хаусдорфа будет удовлетворять всем свойствам метрики. Полученное пространство $\mathcal{M}$ называется пространством Громова–Хаусдорфа, и многие его свойства хорошо изучены. Так например, известно, что это пространство является линейно связным, польским (полным сепарабельным) и геодезическим. Также имеется критерий Громова, дающий необходимое и достаточное условие того, что подмножество пространства Громова–Хаусдорфа предкомпактно.

Если расширить это пространство даже самым минимальным образом до семейства ограниченно-компактных пространств, то сразу возникнут новые эффекты. Во-первых, расстояние между разными пространствами может стать бесконечным. Во-вторых, неизометричность пространств уже не гарантирует, что расстояние Громова–Хаусдорфа между ними будет отлично от нуля. Тем не менее, как оказывается, неравенство треугольника для расстояния Громова–Хаусдорфа имеет место всегда, не зависимо от того, какие пространства мы рассматриваем.

Традиционно в некомпактном случае изучают не расстояние Громова–Хаусдорфа, а некоторую модифицированную, пунктированную сходимость, а именно, пространства пунктируют, т.е. выбирают к каждом из них по точке, и сходимость сводят к сходимости шаров одинакового радиуса с центрами в этих точках. С помощью такой сходимости определяют, например, касательный и асимптотический конусы с вершиной в данной точке пространства. Отметим также, что в некоторых современных работах, например в [2], были предложены функции расстояния, которые задают пунктированную сходимость. Более того, на классе пунктированных ограниченно компактных пространств такие расстояния оказываются метриками.

В настоящей работе мы будем изучать расстояние Громова–Хаусдорфа в исходном определении, заданное на классе $\mathcal{GH}$ всех метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. Для работы с такими "пространствами–монстрами" мы будем использовать систему аксиом фон Неймана–Бернайса–Гёделя, в соответствии с которой расстояние корректно определяется даже на таком собственном классе. Тем не менее, топологию, как это всегда стандартным образом делается, на этом классе породить нельзя (см. ниже). Мы предложим, как обойти эту проблему с помощью фильтрации по мощностям. В результате, мы определим непрерывные кривые на $\mathcal{GH}$ и покажем, что расстояние Громова–Хаусдорфа является внутренней обобщенной полуметрикой, т.е. расстояние между точками равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих эти точки.

Второй сюжет будем посвящен геометрии метрических сегментов в $\mathcal{GH}$, под которыми мы понимаем классы, составленные из всех точек, расположенных между данными двумя. Мы покажем, что метрические сегменты также могут быть классами, а не множествами (гипотеза: это всегда так). Кроме того, мы будем изучать возможность продолжить метрический сегмент (до метрического сегмента) за его конец. Эта задача оказалась очень нетривиальной, и полного решения, даже в пространстве Громова–Хаусдорфа $\mathcal{M}$, до сих пор нет. Ключевым результатом является теорема 3.19 (см. ниже), в которой приводится некоторое достаточное условие непродолжимости метрического сегмента за один из его концов. Заключительный раздел 4 посвящен многочисленным примерам. Отметим любопытный пример 4.16, основанный на теореме Хадвигера, решающей проблему

Борсука в частном случае. В завершение этого раздела мы покажем, что ни один метрический сегмент, концы которого — ограниченные метрические пространства, не может быть продолжен до бесконечности в обе стороны.

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество. Через $\#X$ будем обозначать мощность X, а через $\mathcal{P}_0(X)$ — множество всех **непустых** подмножеств X. *Функцией расстояния на множестве* X будем называть каждое симметричное отображение $d\colon X \times X \to [0, \infty]$, равное нулю на парах одинаковых элементов. Если d удовлетворяет неравенству треугольника, то d называется *обобщенной полуметрикой*. Если, кроме того, $d(x, y) > 0$ для всех $x \neq y$, то d называется *обобщенной метрикой*. Если $d(x, y) < \infty$ для всех $x, y \in X$, то такую функцию расстояния называют *метрикой*, а иногда, чтобы подчеркнуть ее отличие от обобщенной метрики, — *конечной метрикой*. Множество X, на котором задана (обобщенная) (полу-)метрика, называется (*обобщенным*) (*полу-*)*метрическим пространством*.

Если X — пространство с некоторой функцией расстояния, то, как правило, это расстояние между точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Если γ — кривая X, то через $|\gamma|$ обозначим ее длину. Далее, пусть $x, y \in X$ и $|xy| < \infty$, тогда говорят, что $z \in X$ *лежит между x и y*, если $|xz| + |zy| = |xy|$. Если при этом $|xz| > 0$ и $|zy| > 0$, то говорят, что *z лежит строго между x и y*. Множество всех z, лежащих между x и y, назовем *метрическим сегментом* и обозначим через $[x, y]$. Метрический сегмент назовем *невырожденным*, если $|xy| > 0$.

Определение 1.1. Будем говорить, что метрический сегмент $[x, y]$ *продолжается за точку y*, если существует точка $z \in X$ такая, что $[x, z]$ содержит y и $|yz| > 0$.

Замечание 1.2. Если $|xy| = 0$, то любая точка z, для которой $|zx| > 0$, а значит и $|zy| = |zx| > 0$, продолжает метрический сегмент и за x, и за y. Нас в основном будет интересовать продолжаемость невырожденных метрических сегментов.

Пусть X — метрическое пространство. Для каждых $A, B \in \mathcal{P}_0(X)$ и $x \in X$ положим

$$\begin{gathered}|xA| = |Ax| = \inf\bigl\{|xa| : a \in A\bigr\}, \quad |AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\},\\ d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} |aB|, \sup_{b \in B} |Ab|\} = \max\bigl\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} |ab|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} |ba|\bigr\}.\end{gathered}$$

Функция $d_H\colon \mathcal{P}_0(X) \times \mathcal{P}_0(X) \to [0, \infty]$ называется *расстоянием Хаусдорфа*. Хорошо известно [1], что d_H является метрикой на подсемействе $\mathcal{H}(X) \subset \mathcal{P}_0(X)$ всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *по Громову–Хаусдорфу между* X *и* Y назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$.

Отметим, что расстояние Громова–Хаусдорфа может принимать как конечные, так и бесконечные значения, а также всегда удовлетворяет неравенству треугольника, см. [1]. Кроме того, это расстояние равно нулю на каждой паре изометричных пространств, поэтому, в силу неравенства треугольника, расстояние Громова–Хаусдорфа корректно определено на классах изометрии метрических пространств: оно не зависит от выбора представителей этих классов. Имеются примеры неизометричных метрических пространств, между которыми расстояние Громова–Хаусдорфа зануляется, см. [4].

Так как на каждом множестве можно определить некоторую метрику, например, положив все расстояния между разными точками равными 1, классов изометрии метрических пространств "столько же", сколько и всех возможных множеств, т.е. все эти классы не образуют множество, а образуют класс, который, вместе с расстоянием Громова–Хаусдорфа, мы обозначим через $\mathcal{GH}$. Здесь мы используем понятие *класс* в смысле системы аксиом фон Неймана–Бернайса–Гёделя (NBG) теории множеств. Напомним некоторые положения этой системы.

В NBG все объекты, аналоги обычных множеств, называются *классами*. Классы бывают двух типов: *множества* и *собственные классы*. Пример собственного класса — класс всех множеств. В соответствии с конструкцией Гёделя, отличить множество от собственного класса можно так: для множества всегда существует класс, содержащий это множество в качестве элемента. Для собственного класса такого класса не существует. Таким образом, элементы каждого класса — это множества. Для классов определены многие стандартные операции, например, пересечение, дополнение (для каждого класса существует класс, состоящий в точности из тех элементов, которые не входят в первый), произведения, отображения и др. Теорема фон Неймана утверждает, что класс является собственным, если и только если его можно отобразить сюръективно на класс всех множеств.

Отметим, что такие понятия как *функция расстояния,* (*обобщенная*) *полуметрика* и (*обобщенная*) *метрика* определяются для каждого класса, как являющегося множеством, так и собственного, так как произведения и отображения определены для всех классов. Однако с определением других структур на собственных классах могут возникнуть сложности. Так например, если пытаться определить топологию на некотором собственном классе $\mathfrak{C}$ обычным образом, то, с одной стороны, класс $\mathfrak{C}$ должен быть элементом топологии, но тогда, с другой стороны, $\mathfrak{C}$ обязан быть множеством.

Чтобы обойти эту проблему, мы, для каждого класса $\mathfrak{C}$, будем рассматривать "фильтрацию" на подклассы $\mathfrak{C}_n$, каждый из которых состоит из всех элементов $\mathfrak{C}$, имеющих мощность не большую, чем n, где n — кардинальное число. Напомним, что элементами класса являются множества и, значит, для них определено понятие мощности. Основными примерами классов будут для нас определенный выше класс $\mathcal{GH}$, а также класс $\mathcal{B}$, состоящий из всех ограниченных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии. Отметим, что $\mathcal{GH}_n$ и $\mathcal{B}_n$ являются множествами для любого кардинального числа n. Действительно, семейство всех кардиналов, не превосходящих данного, представляет собой множество, а для каждого кардинала n, семейство всех классов изометричности метрических пространств мощности n "не больше", чем множество всех подмножеств в $X \times X \times \mathbb{R}$, где X — произвольное множество мощности n. Класс $\mathfrak{C}$, для которого все подклассы $\mathfrak{C}_n$ являются множествами, назовем *фильтрующимся множествами*. Очевидно, если класс $\mathfrak{C}$ является множеством, то он фильтруется множествами.

Итак, пусть $\mathfrak{C}$ — класс, фильтрующийся множествами. Говоря, что этот класс удовлетворяет тем или иным свойствам, мы будем иметь в виду следующее: каждое из этих свойств имеет место в каждом множестве $\mathfrak{C}_n$. Приведем некоторые примеры.

- Пусть на $\mathfrak{C}$ задана функция расстояния, тогда она индуцирует "обычную" функцию расстояния на каждом множестве $\mathfrak{C}_n$. Таким образом, на каждом $\mathfrak{C}_n$ определены и являются множествами все соответствующие понятия метрической геометрии (см. выше), например, открытые шары. Последнее позволяет задать на $\mathfrak{C}_n$ "метрическую топологию" τ_n, взяв эти шары в качестве базы. Ясно, что если $n \le m$, то τ_n — топология, индуцированная из τ_m.

- Более общо, под *топологией* на $\mathfrak{C}$ будем понимать такое сопоставление каждому $\mathfrak{C}_n$ некоторой топологии τ_n, для которого выполняется *условие согласования*: если $n \le m$, то τ_n — топология, индуцированная из τ_m.

- Наличие топологии на классе $\mathfrak{C}$ позволяет определить, например, непрерывные отображения из некоторого топологического пространства Z в класс $\mathfrak{C}$. Заметим, что, в соответствии с аксиомами NBG, для произвольного отображения $f\colon Z \to \mathfrak{C}$ из множества Z в класс $\mathfrak{C}$ образ $f(Z)$ является множеством, все элементы из $f(Z)$ — также множества, их объединение $\cup f(Z)$ — множество некоторой мощности n, поэтому каждый элемент из $f(Z)$ имеет мощность не большую, чем n и, потому, $f(Z) \subset \mathfrak{C}_n$. Отображение f назовем *непрерывным*, если f непрерывно как отображение из Z в $\mathfrak{C}_n$. Из условия согласования вытекает, что для каждого $m \ge n$ отображение f также является непрерывным отображением из Z в $\mathfrak{C}_m$, а также для каждого $k \le n$ такого, что $f(Z) \subset \mathfrak{C}_k$, отображение $f|_{\mathfrak{C}_k}$ непрерывно.

- Предыдущие рассмотрения позволяют определить *непрерывные кривые в классе* $\mathfrak{C}$, наделенном некоторой топологией.

- Пусть на классе $\mathfrak{C}$ задана функция расстояния и соответствующая ей топология. Будем говорить, что эта функция расстояния *внутренняя*, если она удовлетворяет неравенству треугольника, и для любых элементов из $\mathfrak{C}$, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, это расстояние равно точной нижней грани длин кривых, соединяющих эти элементы. Ниже мы покажем, что расстояние Громова–Хаусдорфа как на классе $\mathcal{GH}$, так и на классе $\mathcal{B}$, является внутренним.

Наиболее хорошо изученным подмножеством в $\mathcal{GH}$ является множество классов изометрии компактных метрических пространств, которое называется *пространством Громова–Хаусдорфа* и часто обозначается через $\mathcal{M}$. Хорошо известно [1, 6], что ограничение расстояния Громова–Хаусдорфа на $\mathcal{M}$ является метрикой, а само пространство $\mathcal{M}$ — польским и геодезическим.

Отметим, что для упрощения обозначений, удобно не различать классы изометрии метрических пространств и конкретных их представителей. Выше мы уже пользовались таким соглашением, определяя $\mathcal{B}$ как класс ограниченных метрических пространств, *рассматриваемых с точностью до изометрии*. Ниже мы неоднократно будем использовать это отождествление и будем, например, писать $X \in \mathcal{GH}$, а понимать под X конкретное метрическое пространство.

Как правило, вычислить расстояние Громова–Хаусдорфа между конкретными метрическими пространствами очень тяжело, и к настоящему времени оно известно лишь для немногих пар пространств, см. например [8]. Наиболее полезным для конкретных вычислений является другое (эквивалентное) определение расстояния Громова–Хаусдорфа, которое мы сейчас приведем. Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Таким образом, $\mathcal{P}_0(X \times Y)$ — это множество всех непустых отношений между X и Y.

Определение 1.3. Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ и $\sigma \in \mathcal{P}_0(X \times Y)$ назовем *искажением* $\operatorname{dis}\sigma$ *отношения* σ величину

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x, y),\, (x', y') \in \sigma\Big\}.$$

Отношение $R \subset X \times Y$ между множествами X и Y называется *соответствием*, если ограничения на R канонических проекций $\pi_X : (x, y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Теорема 1.4 ([1])**.** *Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis}R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\big\}.$$

Нам также понадобятся следующие оценки, которые легко проверить с помощью теоремы 1.4. Обозначим через Δ_1 одноточечное метрическое пространство.

Утверждение 1.5. *Для любых $X, Y \in \mathcal{GH}$ выполняется*

- $2d_{GH}(\Delta_1, X) = \operatorname{diam} X$;
- $2d_{GH}(X, Y) \le \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$;
- *если диаметр X или Y конечен, то* $\bigl|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y\bigr| \le 2d_{GH}(X, Y)$.

Следствие 1.6. *Если $X, Y \in \mathcal{B}$, то $[X, Y]$ определен, и $[X, Y] \subset \mathcal{B}$.*

Для топологических пространств X и Y будем рассматривать $X \times Y$ как топологическое пространство со стандартной топологией декартова произведения. Тогда имеет смысл говорить о *замкнутых отношениях и соответствиях.*

Соответствие $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ назовем *оптимальным*, если $2d_{GH}(X, Y) = \operatorname{dis} R$. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$. Подмножество в $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X, Y)$, состоящее из всех замкнутых оптимальных соответствий, обозначим через $\mathcal{R}^c_{\mathrm{opt}}(X, Y)$.

Теорема 1.7 ([7, 3])**.** *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ существует замкнутое оптимальное соответствие, а также реализация (X', Y', Z) пары (X, Y), на которой достигается расстояние Громова–Хаусдорфа между X и Y.*

Теорема 1.8 ([7, 3])**.** *Для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и каждого $R \in \mathcal{R}^c_{\mathrm{opt}}(X, Y)$ семейство R_t, $t \in [0, 1]$, компактных метрических пространств такое, что $R_0 = X$, $R_1 = Y$, а при $t \in (0, 1)$ пространство R_t — это множество R с метрикой*

$$\bigl|(x, y), (x', y')\bigr|_t = (1 - t)|xx'| + t\,|yy'|,$$

является кратчайшей кривой в $\mathcal{M}$, соединяющей X и Y, причем длина этой кривой равна $d_{GH}(X, Y)$.

Нам также будут полезны следующие обозначения. Пусть X — произвольное множество и $1 < m \le \#X$ — кардинальное число. Через $\mathcal{C}_m(X)$ обозначим семейство всевозможных покрытий множества X его m непустыми подмножествами, а через $\mathcal{D}_m(X)$ — семейство всевозможных разбиений X на m непустых подмножеств. Очевидно, $\mathcal{D}_m(X) \subset \mathcal{C}_m(X)$. Если X — метрическое пространство, то для любого $D = \{X_i\}_{i \in I} \in \mathcal{C}_m(X)$ положим

$$\operatorname{diam} D = \sup_{i \in I} \operatorname{diam} X_i, \quad \alpha(D) = \inf\bigl\{|X_i X_j| : i \ne j\bigr\}$$

и определим величины

$$d_m(X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \operatorname{diam} D, \quad \alpha_m(X) = \sup_{D \in \mathcal{D}_m(X)} \alpha(D).$$

2 Расстояние Громова–Хаусдорфа является внутренним

Пусть $\mathfrak{C}$ — некоторый класс, фильтрующийся множествами, на котором задана функция расстояния, удовлетворяющая неравенству треугольника,

$x, y \in \mathfrak{C}$, $|xy| < \infty$, и γ — кривая в $\mathfrak{C}$, соединяющая x и y. Кривую γ назовем *ε-кратчайшей* для x и y, если $0 \le |\gamma| - |xy| \le \varepsilon$. Легко видеть, что функция расстояния на классе $\mathfrak{C}$, удовлетворяющая неравенству треугольника, является внутренней, если и только если для каждой пары элементов из $\mathfrak{C}$, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, и каждого $\varepsilon > 0$ найдется ε-кратчайшая для этой пары. Мы используем это соображение для доказательства следующей теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть X и Y — произвольные метрические пространства, для которых $d_{GH}(X,Y) < \infty$. Пусть $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ — произвольное соответствие такое, что*

$$\operatorname{dis} R - 2d_{GH}(X,Y) \le 2\varepsilon.$$

Тогда семейство R_t, $t \in [0,1]$, метрических пространств, где $R_0 = X$, $R_1 = Y$, а при $t \in (0,1)$ пространство R_t — это множество R с метрикой

$$\big|(x,y),(x',y')\big|_t = (1-t)|xx'| + t\,|yy'|,$$

является ε-кратчайшей кривой в $\mathcal{GH}$, соединяющей X и Y. Более того, если X и Y — ограниченные пространства, то все R_t — также ограниченные пространства, т.е. R_t — это ε-кратчайшая в $\mathcal{B}$.

Доказательство. Положим $n = \#R$ и рассмотрим соответствия $R_X \subset X \times R$ и $R_Y \subset R \times Y$ между X и R_t и между R_t и Y следующего вида

$$R_X = \big\{\big(x,(x,y)\big) : x \in X,\ (x,y) \in R\big\},\ \ R_Y = \big\{\big((x,y),y\big) : y \in Y,\ (x,y) \in R\big\}.$$

Тогда $\operatorname{dis} R_X = t \operatorname{dis} R$ и $\operatorname{dis} R_Y = (1-t)\operatorname{dis} R$. Далее, взяв тождественное соответствие между пространствами R_t и R_s, $s, t \in (0,1)$, получаем, что $2d_{GH}(R_t,R_s) \le |t-s| \operatorname{dis} R$. Положим $\gamma(t) = R_t$. Из сказанного выше вытекает, что γ — непрерывное отображение из $[0,1]$ в $\mathcal{GH}_n$, т.е. γ — непрерывная кривая в $\mathcal{GH}$. Кроме того, $2|\gamma| \le \operatorname{dis} R$, поэтому $|\gamma| \le d_{GH}(X,Y) + \varepsilon$, и, значит, γ является ε-кратчайшей, соединяющей X и Y. Осталось заметить, что $\operatorname{diam} R_t \le \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$, поэтому если X, $Y \in \mathcal{B}$, то и $R_t \in \mathcal{B}$ при всех t. $\square$

Следствие 2.2. *Расстояние Громова–Хаусдорфа на классе $\mathcal{GH}$ является внутренней обобщенной полуметрикой, а на классе $\mathcal{B}$ — внутренней конечной полуметрикой.*

Построенную в теореме 2.1 ε-кратчайшую кривую будем называть *линейной.*

Замечание 2.3. Из доказательства теоремы 2.1 вытекает, что линейная ε-кратчайшая кривая, соединяющая метрические пространства X и Y, находящиеся на конечном расстоянии Громова–Хаусдорфа, является липшицевой кривой в $\mathcal{GH}$, причем одна из ее констант Липшица равна $d_{GH}(X,Y)+\varepsilon$.

3 Метрические сегменты и их продолжаемость

Начнем с описания простейших свойств ε-кратчайших в обобщенном полуметрическом пространстве $\mathfrak{C}$, где $\mathfrak{C}$ — некоторый класс, фильтрующийся множествами.

Лемма 3.1. *Пусть $x, y \in \mathfrak{C}$, $|xy| < \infty$, γ — некоторая ε-кратчайшая, соединяющая x и y, а w — произвольная точка кривой γ. Тогда отрезки γ_{xw} и γ_{wy} кривой γ между точками x, w и w, y соответственно являются ε-кратчайшими для своих концевых точек, и выполнено неравенство $|xw| + |wy| - |xy| \le \varepsilon$.*

Доказательство. Действительно, по определению ε-кратчайшей, в силу аддитивности длины кривой и неравенства треугольника, имеем:

$$\varepsilon \ge |\gamma| - |xy| = |\gamma_{xw}| + |\gamma_{wy}| - |xy| \ge \big(|\gamma_{xw}| - |xw|\big) + \big(|\gamma_{wy}| - |wy|\big).$$

Заметим, что выражения в скобках неотрицательны, поэтому каждое из них не превосходит ε, тем самым γ_{xw} и γ_{wy} являются ε-кратчайшими. Далее,

$$|xw| + |wy| \le |\gamma_{xw}| + |\gamma_{wy}| = |\gamma_{xy}| \le |xy| + \varepsilon,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Объединение двух ε-кратчайших в общем случае, конечно, не является ε-кратчайшей. Однако имеет место следующий результат.

Лемма 3.2. *Пусть $x, y \in \mathfrak{C}$, $|xy| < \infty$, и точка $w \in \mathfrak{C}$ лежит между точками x и y. Тогда объединение ε-кратчайшей γ_{xw} для x, w и δ-кратчайшей γ_{wy} и w, y соответственно является $(\varepsilon + \delta)$-кратчайшей для x, y.*

Доказательство. Действительно, обозначим через γ_{xy} объединение кривых γ_{xw} и γ_{wy}. Тогда

$$|xy| = |xw| + |wy| \ge |\gamma_{xw}| - \varepsilon + |\gamma_{wy}| - \delta = |\gamma_{xy}| - (\varepsilon + \delta),$$

что и требовалось. □

Из лемм 3.1 и 3.2 получаем следующую оценку.

Следствие 3.3. *Пусть $x, y \in \mathfrak{C}$, $|xy| < \infty$, и точка $w \in \mathfrak{C}$ лежит между точками x и y. Пусть γ_{xw} и γ_{wy} — ε-кратчайшие кривые, соединяющие x, w и w, y соответственно. Тогда для любых точек p из γ_{xw} и q из γ_{wy} выполнено неравенство $|py| + |yq| - |pq| \le 2\varepsilon$.*

Перечислим некоторые свойства метрических сегментов.

Лемма 3.4. *Для любых $x, y, z \in \mathfrak{C}$ имеем*

- *если $y \in [x, z]$, то $[x, y] \subset [x, z]$ и $[y, z] \subset [x, z]$;*

- *если y лежит между x и z, то y лежит также между любыми точками $x' \in [x, y]$ и $z' \in [y, z]$.*

Замечание 3.5. Если пространство $\mathfrak{C}$ геодезическое, то продолжаемость метрического сегмента $[x, y]$ за y равносильна тому, что существует точка $z \in \mathfrak{C}$ такая, что каждая кратчайшая кривая, соединяющая x и y, содержится в некоторой кратчайшей, соединяющей x и z.

Замечание 3.6. Если $\mathfrak{C}$ — собственный класс, то метрический сегмент тоже может оказаться собственным классом. В качестве примера рассмотрим пространство $\mathcal{GH}$ и метрический сегмент $[\Delta_1, \Delta_n]$ в нем, где Δ_n — это метрическое пространство мощности n, все ненулевые расстояния в котором равны 1. Легко проверить, что кривая $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, где $\gamma(0) = \Delta_1$ и $\gamma(t) = t\,\Delta_n$ при остальных t, является кратчайшей кривой, соединяющей Δ_1 и Δ_n. Рассмотрим пространство $Z = \frac{1}{2}\Delta_n$ и заменим одну его точку $z \in Z$ непустым множеством A произвольной мощности. Фиксируем положительное $\varepsilon < 1/2$. На полученном множестве $Z' = \bigl(Z \setminus \{z\}\bigr) \sqcup A$ доопределим расстояние, положив $|aa'| = \varepsilon$ и $|az'| = |zz'| = 1/2$ для любых различных $a, a' \in A$ и любого $z' \in Z \setminus \{z\}$. Легко проверить, что $d_{GH}(Z', \Delta_1) = d_{GH}(Z, \Delta_1)$ и $d_{GH}(Z', \Delta_n) = d_{GH}(Z, \Delta_n)$, поэтому любое такое пространство Z' лежит между Δ_1 и Δ_n, т.е. принадлежит метрическому сегменту $[\Delta_1, \Delta_n]$. Так как мощность пространства Z' произвольна, то $[\Delta_1, \Delta_n]$ — это собственный класс.

Пусть $X \in \mathcal{B}$ и $C = \{X_i\}_{i \in I}$ — покрытие X непустыми подмножествами. Будем говорить, что $\{X_i\}_{i \in I}$ — покрытие множествами *меньшего чем X диаметра*, если $\operatorname{diam} C < \operatorname{diam} X$.

Лемма 3.7. *Пусть $X \in \mathcal{B}$ и $C_X = \{X_i\}_{i \in I}$ — покрытие X непустыми подмножествами меньшего чем X диаметра. Положим $\delta_X = \operatorname{diam} X - \operatorname{diam} C_X > 0$. Тогда любое $Y \in \mathcal{B}$ такое, что $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon = \delta_X/5$, имеет аналогичное представление, т.е. существует покрытие $C_Y = \{Y_i\}_{i \in I}$ пространства Y непустыми подмножествами меньшего диаметра, причем $\operatorname{diam} Y - \operatorname{diam} C_Y > \varepsilon$.*

Доказательство. Так как $d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$, существует $R \in \mathcal{R}(X, Y)$ такое, что $\operatorname{dis} R < 2\varepsilon$. Для каждого $i \in I$ положим $Y_i = R(X_i)$. Так как R — соответствие, то $Y_i \ne \emptyset$ при каждом $i \in I$ и $C_Y := \{Y_i\}_{i \in I}$ — покрытие Y непустыми множествами. Так как $\operatorname{dis} R < 2\varepsilon$, $\operatorname{diam} Y_i \le \operatorname{diam} X_i + \operatorname{dis} R$ и $\operatorname{diam} X \le \operatorname{diam} Y + \operatorname{dis} R$, то

$$\begin{aligned}\operatorname{diam} C_Y \le \operatorname{diam} C_X + \operatorname{dis} R < \operatorname{diam} C_X + 2\varepsilon = \operatorname{diam} X - \delta_X + 2\varepsilon = \\ = \operatorname{diam} X - 3\varepsilon \le \operatorname{diam} Y + \operatorname{dis} R - 3\varepsilon < \operatorname{diam} Y - \varepsilon,\end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Лемма 3.8. *Пусть $X \in \mathcal{GH}$ и $C_X = \{X_i\}_{i \in I}$ — покрытие X непустыми подмножествами конечного диаметра. Тогда любое $Y \in \mathcal{GH}$, находящееся* *от X на конечном расстоянии, имеет аналогичное представление, т.е. существует покрытие $C_Y = \{Y_i\}_{i\in I}$ пространства Y непустыми подмножествами конечного диаметра, причем* $\operatorname{diam} C_Y \le \operatorname{diam} C_X + 2d_{GH}(X,Y)$.

Доказательство. Пусть $d_{GH}(X,Y) < \varepsilon$, тогда существует $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ такое, что $\operatorname{dis} R < 2\varepsilon$. Для каждого $i \in I$ положим $Y_i = R(X_i)$. Так как R — соответствие, то $Y_i \ne \emptyset$ при каждом $i \in I$ и $C_Y := \{Y_i\}_{i\in I}$ — покрытие Y непустыми множествами. Так как $\operatorname{dis} R < 2\varepsilon$, то $\operatorname{diam} Y_i \le \operatorname{diam} X_i + \operatorname{dis} R$ и $\operatorname{diam} C_Y \le \operatorname{diam} C_X + 2\varepsilon$, откуда и вытекает требуемое. □

С помощью следующей стандартной конструкции можно перейти от покрытия к разбиению без увеличения мощности и диаметра.

Конструкция 3.9. Пусть $X \in \mathcal{GH}$ и $C = \{X_i\}_{i\in I}$ — покрытие X, причем $\operatorname{diam} C < \operatorname{diam} X$. По теореме Цермело, превратим множество индексов I во вполне упорядоченное и положим

$$X_i' = X_i \setminus \bigcup_{j:j<i} X_j, \quad i \in I.$$

Выбросив пустые X_i', получим разбиение D пространства X на $m \le \#I$ непустых подмножеств, причем $\operatorname{diam} D \le \operatorname{diam} C < \operatorname{diam} X$.

Лемма 3.10. *Пусть $X, Y \in \mathcal{B}$ такие, что*

(1) $d := \operatorname{diam} Y - \operatorname{diam} X > 0$;

(2) *существует разбиение $D_X = \{X_i\}_{i\in I}$ пространства X с $\alpha(D_X) > 0$;*

(3) *существует покрытие $C_Y = \{Y_j\}_{j\in J}$ пространства Y множествами меньшего диаметра, так что* $\delta_Y := \operatorname{diam} Y - \operatorname{diam} C_Y > 0$;

(4) $\#J \le \#I$.

Тогда $\operatorname{diam} Y - 2d_{GH}(X,Y) \ge \min\{d, \alpha(D_X), \delta_Y\} > 0$.

Доказательство. Воспользовавшись описанной выше конструкцией 3.9, перестроим покрытие $C_Y = \{Y_j\}$ пространства Y в разбиение $D_Y = \{Y_k'\}_{k\in K}$, $\#K \le \#J \le \#I$, $\operatorname{diam} D_Y \le \operatorname{diam} C_Y$. Пусть $\sigma\colon K \to I$ — произвольная инъекция. Рассмотрим соответствие

$$R = \Big(\bigcup_{k\in K\setminus\{k_0\}} (X_{\sigma(k)} \times Y_k')\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{i\in I\setminus\sigma(K)} (X_i \times Y_{k_0}')\Big),$$

где $k_0 \in K$ — любой фиксированный элемент. Оценим искажение соответствия R. Так как в R элементам из разных Y_k' всегда соответствуют элементы из разных X_i, то

$$\begin{aligned} 2d_{GH}(X,Y) \le \operatorname{dis} R &\le \max\big\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y - \alpha(D_X), \operatorname{diam} D_Y\big\} \le \\ &\le \max\big\{\operatorname{diam} Y - d, \operatorname{diam} Y - \alpha(D_X), \operatorname{diam} Y - \delta_Y\big\} \le \\ &\le \operatorname{diam} Y - \min\{d, \alpha(D), \delta_Y\}, \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Определение 3.11. Пусть $X, Y \in \mathcal{B}$ такие, что $d_{GH}(X,Y) \neq 0$. Будем называть Y *гиперэкстремальным по отношению к* X, если

$$2d_{GH}(X,Y) = \operatorname{diam} Y \geq \operatorname{diam} X,$$

и *субэкстремальным по отношению к* X, если

$$2d_{GH}(X,Y) = \operatorname{diam} Y - \operatorname{diam} X.$$

Замечание 3.12. Если Y гиперэкстремально по отношению к X, то, по утверждению 1.5, расстояние $d_{GH}(X,Y)$ между X и Y принимает наибольшее возможное значение для пространств с такими диаметрами. Обратно, если $2d_{GH}(X,Y) = \max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\} > 0$ и $\operatorname{diam} Y \geq \operatorname{diam} X$, то Y гиперэкстремально по отношению к X.

Замечание 3.13. Если Y субэкстремально по отношению к X, то $\operatorname{diam} Y > \operatorname{diam} X$ и, по утверждению 1.5, расстояние $d_{GH}(X,Y)$ принимает наименьшее возможное значение для пространств X и Y с такими диаметрами. Обратно, если $2d_{GH}(X,Y) = |\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y| > 0$, то пространство с большим диаметром субэкстремально по отношению к пространству с меньшим.

Замечание 3.14. По отношению к одноточечному пространству Δ_1 любое отличное от Δ_1 пространство $Y \in \mathcal{B}$ является одновременно субэкстремальным и гиперэкстремальным. Это — единственный такой случай: если Y одновременно субэкстремально и гиперэкстремально по отношению к X, то $2d_{GH}(X,Y) = \operatorname{diam} Y = \operatorname{diam} Y - \operatorname{diam} X$, откуда $\operatorname{diam} X = 0$, и, значит, $X = \Delta_1$.

Определение 3.15. Если

$$2d_{GH}(X,Y) = \operatorname{diam} Y = \operatorname{diam} X > 0,$$

то Y гиперэкстремально по отношению к X, и X гиперэкстремально по отношению к Y. В этом случае будем говорить, что пространства X и Y *взаимно гиперэкстремальны*, а метрический сегмент $[X,Y] \subset \mathcal{B}$ будем называть *экстремальным*.

Замечание 3.16. Из утверждения 1.5 следует, что пространства X и Y взаимно гиперэкстремальны, если и только если они — «диаметрально противоположные точки» сферы радиуса $\frac{1}{2}\operatorname{diam} X$ с центром в одноточечном пространстве Δ_1, т.е. максимально удаленные друг от друга точки этой сферы. Если же Y субэкстремально по отношению к X, то Y — ближайшая к X точка сферы радиуса $\frac{1}{2}\operatorname{diam} Y$ с центром в Δ_1, т.е. X и Y «лежат на одном радиальном луче».

Утверждение 3.17. *Пусть $X, Y \in \mathcal{B}$ и метрический сегмент $[X,Y]$ экстремален. Предположим, что $[X,Y]$ продолжается за Y до некоторого Z. Тогда $Z \in \mathcal{B}$, $\operatorname{diam} Z > \operatorname{diam} Y$, и пространство Z субэкстремально по отношению к пространству Y.*

Доказательство. Действительно, так как Y по предположению лежит между X и Z, то, по определению, $d_{GH}(X,Z)<\infty$, поэтому $Z\in\mathcal{B}$ в силу утверждения 1.5. Более того, $d_{GH}(X,Z)=d_{GH}(X,Y)+d_{GH}(Y,Z)$, и $d_{GH}(Y,Z)>0$ по определению продолжения, следовательно, $d_{GH}(X,Z)>d_{GH}(X,Y)$. С другой стороны, если $\operatorname{diam}Z\le\operatorname{diam}Y$, то, по утверждению 1.5, имеем

$$2d_{GH}(X,Z)\le\max\{\operatorname{diam}X,\operatorname{diam}Z\}=\operatorname{diam}X,$$

а $\operatorname{diam}X=2d_{GH}(X,Y)$ в силу экстремальности сегмента $[X,Y]$, откуда $d_{GH}(X,Y)=d_{GH}(X,Z)$, противоречие, поэтому $\operatorname{diam}Z>\operatorname{diam}Y$.

Далее, воспользовавшись тем, что Y лежит между X и Z, утверждением 1.5 и экстремальностью сегмента $[X,Y]$, имеем

$$\begin{aligned}\max\big\{\operatorname{diam}X,\operatorname{diam}Z\big\}&\ge 2d_{GH}(X,Z)=2d_{GH}(X,Y)+2d_{GH}(Y,Z)=\\&=\operatorname{diam}X+2d_{GH}(Y,Z)\ge\operatorname{diam}X+\big|\operatorname{diam}Y-\operatorname{diam}Z\big|.\end{aligned}$$

Но так как $\operatorname{diam}Z\ge\operatorname{diam}Y=\operatorname{diam}X$, то левая и правая части в этой цепочке равны $\operatorname{diam}Z$, откуда $2d_{GH}(Y,Z)=\operatorname{diam}Z-\operatorname{diam}Y>0$. □

Лемма 3.18. *Пусть $Y,Z\in\mathcal{B}$ и Z — субэкстремально по отношению к Y. Фиксируем произвольное ε из интервала $(0,\operatorname{diam}Z-\operatorname{diam}Y)$ и рассмотрим линейную ε-кратчайшую R_t. Тогда*

$$\operatorname{diam}R_t\ge(1-t)\operatorname{diam}Y+t\operatorname{diam}Z-4\varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $R\in\mathcal{R}(Y,Z)$ — произвольное соответствие такое, что $\operatorname{dis}R\le 2d_{GH}(Y,Z)+2\varepsilon$. Выберем $z,\,z'\in Z$ такие, что $|zz'|\ge\operatorname{diam}Z-\varepsilon$ и, значит, $|zz'|>\operatorname{diam}Y$. Тогда для любых $y\in R^{-1}(z)$ и $y'\in R^{-1}(z')$ имеем:

$$\big||zz'|-|yy'|\big|\le\operatorname{dis}R\le 2d_{GH}(Y,Z)+2\varepsilon=\operatorname{diam}Z-\operatorname{diam}Y+2\varepsilon,$$

где последнее равенство выполнено в силу субэкстремальности Z по отношению к Y. С другой стороны, $\big||zz'|-|yy'|\big|=|zz'|-|yy'|\ge\operatorname{diam}Z-\varepsilon-|yy'|$ в силу выбора $z,\,z'$ и ε, поэтому

$$\operatorname{diam}Z-\operatorname{diam}Y+2\varepsilon\ge\operatorname{diam}Z-\varepsilon-|yy'|,$$

откуда $\operatorname{diam}Y-|yy'|\le 3\varepsilon$. Таким образом,

$$\begin{aligned}\operatorname{diam}R_t&\ge\big|(y,z),(y',z')\big|_t=(1-t)\,|yy'|+t\,|zz'|\ge\\&\ge(1-t)(\operatorname{diam}Y-3\varepsilon)+t\,(\operatorname{diam}Z-\varepsilon)\ge\\&\ge(1-t)\operatorname{diam}Y+t\operatorname{diam}Z-4\varepsilon,\end{aligned}$$

что и требовалось. □

Теорема 3.19. *Пусть $X,Y\in\mathcal{B}$, m и n — кардинальные числа такие, что $1<n\le\#X$, $1<m\le\#Y$, и метрический сегмент $[X,Y]$ экстремален. Предположим, что выполнены следующие условия:*

(1) *существует разбиение* $D_X \in \mathcal{D}_n(X)$*, для которого* $\alpha(D_X) > 0$;

(2) *существует покрытие* $C_Y \in \mathcal{C}_m(Y)$*, для которого* $\operatorname{diam} C_Y < \operatorname{diam} Y$;

(3) $m \le n$.

Тогда метрический сегмент $[X, Y]$ *не продолжается за* Y.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть существует метрическое пространство Z такое, что Y лежит между X и Z. По утверждению 3.17 в этом случае $Z \in \mathcal{B}$ и Z — субэкстремально по отношению к Y. Следующая лемма очевидна.

Лемма 3.20. *Для любых* $\delta > 0$ *и* $d > 0$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что неравенство*

$$\frac{8\varepsilon}{d} < \frac{\delta}{10(d+\varepsilon)} \tag{1}$$

выполнено при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0)$.

В обозначениях леммы 3.20, найдем соответствующее ε_0 для $\delta = \operatorname{diam} Y - \operatorname{diam} C_Y$ и $d = d_{GH}(Y, Z) = \operatorname{diam} Z - \operatorname{diam} Y > 0$. Фиксируем произвольное

$$0 < \varepsilon < \min\left\{\varepsilon_0,\, \frac{d}{8},\, \frac{\delta}{20},\, \frac{\alpha(D_X)}{4}\right\},$$

тогда, по лемме 3.20, выполняется неравенство (1). Так как $\varepsilon < d/8$, то левая части неравенства (1) меньше 1, поэтому существует $s \in (0,1)$ такое, что

$$\frac{8\varepsilon}{d} < s < \frac{\delta}{10(d+\varepsilon)}.$$

Рассмотрим любое $R \in \mathcal{R}(Y, Z)$, для которого $\operatorname{dis} R \le 2d + 2\varepsilon$, и соответствующую линейную ε-кратчайшую R_t, $t \in [0,1]$, соединяющую Y и Z, где $R_0 = Y$, $R_1 = Z$. Для выбранного выше s рассмотрим R_s и, аналогично рассуждениям из доказательства теоремы 2.1, получим, что $2d_{GH}(Y, R_s) \le s \operatorname{dis} R$, откуда

$$d_{GH}(Y, R_s) \le s(2d + 2\varepsilon) < \frac{\delta}{10(d+\varepsilon)}(2d + 2\varepsilon) = \delta/5.$$

По лемме 3.7, существует покрытие C_R пространства R_s непустыми подмножествами меньшего диаметра, для которого $\#C_R = \#C_Y$ и $\operatorname{diam} R_s - \operatorname{diam} C_R > \delta/5$. Так как $\operatorname{diam} Y < \operatorname{diam} Z$ и $8\varepsilon < s\, d$, то, по лемме 3.18,

$$\operatorname{diam} R_s \ge \operatorname{diam} Y + s(\operatorname{diam} Z - \operatorname{diam} Y) - 4\varepsilon = \operatorname{diam} Y + s\, d - 4\varepsilon > \operatorname{diam} Y + 4\varepsilon,$$

откуда, в силу $\operatorname{diam} X = \operatorname{diam} Y$, имеем $\operatorname{diam} R_s - \operatorname{diam} X > 4\varepsilon > 0$. Отсюда и из приведенных выше формул вытекает, что что все условия леммы 3.10, примененной к паре X и R_s, выполнены, поэтому

$$2d_{GH}(X, R_s) \le$$
$$\le \operatorname{diam} R_s - \min\bigl\{\operatorname{diam} R_s - \operatorname{diam} X,\, \alpha(D),\, \operatorname{diam} R_s - \operatorname{diam} C_R\bigr\}.$$

Однако, каждое из трех выражений, входящих в минимум из предыдущей формулы, строго больше 4ε, значит, $2d_{GH}(X, R_s) < \operatorname{diam} R_s - 4\varepsilon$.

С другой стороны, $2d_{GH}(Y, R_s) \geq \bigl|\operatorname{diam} Y - \operatorname{diam} R_s\bigr| = \operatorname{diam} R_s - \operatorname{diam} Y$, откуда, с помощью следствия 3.3 и условия $2d_{GH}(X, Y) = \operatorname{diam} Y$, заключаем, что

$$\begin{aligned} 2d_{GH}(X, R_s) &\geq 2d_{GH}(X, Y) + 2d_{GH}(Y, R_s) - 4\varepsilon \geq \\ &\geq 2d_{GH}(X, Y) + \operatorname{diam} R_s - \operatorname{diam} Y - 4\varepsilon = \operatorname{diam} R_s - 4\varepsilon, \end{aligned}$$

противоречие. Теорема доказана. □

Замечание 3.21. Может возникнуть впечатление, что формулировку теоремы 3.19 можно ослабить, заменив условие взаимной гиперэкстремальности пространств X и Y на гиперэкстремальность Y по отношению X. Однако, если Y гиперэкстремально по отношению к X и выполнены условия (1)–(3) теоремы 3.19, то пространства X и Y взаимно гиперэкстремальны. Действительно, если $\operatorname{diam} Y > \operatorname{diam} X$, то из леммы 3.10 следует неравенство $2d_{GH}(X, Y) < \operatorname{diam} Y$, которое противоречит гиперэкстремальности Y по отношению к X, поэтому, возможен только случай $2d_{GH}(X, Y) = \operatorname{diam} Y = \operatorname{diam} X$, т.е. случай взаимной гиперэкстремальности.

Следствие 3.22. *Пусть X, $Y \in \mathcal{M}$, пространства X и Y взаимно гиперэкстремальны и выполнены условия* (1) – (3) *теоремы* 3.19*. Тогда никакая кратчайшая кривая в $\mathcal{M}$, соединяющая X и Y не продолжается за Y.*

4 Некоторые примеры

Выше через Δ_1 мы обозначили одноточечное метрическое пространство, а через Δ_n — метрическое пространство мощности n, все ненулевые расстояния в котором равны 1. Такие пространства называются *пространствами с одним расстоянием* или, для краткости, *симплексами.* В работе [8], которую мы уже упоминали, был получен ряд формул, позволяющих вычислять расстояния от симплексов до ограниченных метрических пространств. Мы используем эти результаты для построения примеров кратчайших, которые можно продолжить.

4.1 Продолжаемость за симплекс

Пусть X — метрическое пространство, и m — кардинальное число, не превосходящее $\#X$. Напомним, что выше мы определили характеристики возможных разбиений пространства X на m частей. В [8] получена следующая формула расстояния от X до симплекса.

Теорема 4.1. *Для $X \in \mathcal{B}$ и кардинального числа $1 < m \leq \#X$ выполняется*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \inf_{D \in \mathcal{D}_m} \max\bigl\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}.$$

Здесь нам понадобится частный случай этой формулы.

Следствие 4.2. *Для $X \in \mathcal{B}$, кардинального числа $1 < m \le \#X$, и $\lambda \ge \operatorname{diam} X + \alpha_m(X)$ имеем $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \lambda - \alpha_m(X)$.*

Доказательство. Действительно, если $\lambda \ge \operatorname{diam} X + \alpha_m(X)$, то $\lambda - \alpha(D) \ge \lambda - \alpha_m(X) \ge \operatorname{diam} X \ge \operatorname{diam} D$ и, тем более, $\lambda - \alpha(D) \ge \operatorname{diam} X - \lambda$. Поэтому при таких λ максимум в формуле из теоремы 4.1 равен $\lambda - \alpha(D)$, откуда $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \inf_D(\lambda - \alpha(D)) = \lambda - \sup_D \alpha(D) = \lambda - \alpha_m(X)$, что и требовалось. $\square$

Следствие 4.3. *Для $X \in \mathcal{B}$, кардинального числа $1 < m \le \#X$, и $\lambda \ge \operatorname{diam} X + \alpha_m(X)$ метрический сегмент $[X, \lambda\Delta_m]$ продолжается за $\lambda\Delta_m$ до любого симплекса $\lambda'\Delta_m$, где $\lambda' > \lambda$.*

Доказательство. Действительно, так как $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, \lambda'\Delta_m) = |\lambda - \lambda'|$ и по следствию 4.2 для любого $\lambda \ge \operatorname{diam} X + \alpha_m(X)$ выполнено $2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \lambda - \alpha_m(X)$, то симплекс $\lambda\Delta_m$ лежит между X и $\lambda'\Delta_m$, где $\lambda' > \lambda$, что и требовалось. $\square$

4.2 Продолжаемость за субэкстремальное пространство

Следующее утверждение формализует замечанием 3.16.

Утверждение 4.4. *Пусть $X, Y \in \mathcal{B}$ такие, что Y субэкстремально по отношению к X. Тогда X лежит между Δ_1 и Y.*

Доказательство. Действительно,

$$2d_{GH}(\Delta_1, Y) = \operatorname{diam} Y = \operatorname{diam} X + \big(\operatorname{diam} Y - \operatorname{diam} X\big) = \\ = 2d_{GH}(\Delta_1, X) + 2d_{GH}(X, Y),$$

что и требовалось. $\square$

Следствие 4.5. *Пусть $X, Y \in \mathcal{B}$ такие, что Y субэкстремально по отношению к X и $X \ne \Delta_1$. Тогда метрический сегмент $[X, Y]$ продолжается и за X, и за Y.*

Конструкция 4.6. Предположим, что в пространстве $Y \in \mathcal{B}$ существуют точки $y_1, y_2 \in Y$ такие, что $\operatorname{diam} Y = |y_1y_2|$. Для произвольных $r_1 \ge 0$ и $r_2 \ge 0$ построим *двухточечное расширение $Z_{r_1,r_2}(y_1, y_2)$ пространства Y* так. Положим $Z = Z_{r_1,r_2}(y_1, y_2) = Y \sqcup \{z_1, z_2\}$ и продолжим метрику с Y на Z по следующему правилу: $|z_1z_2| = r_1 + |y_1y_2| + r_2$, а для $y \in Y$ пусть $|yz_i| = r_i + |yy_i|$, $i = 1, 2$. При этом, если $r_i = 0$, то отождествим z_i и y_i. Легко проверить, что $Z_{r_1,r_2}(y_1, y_2)$ — метрическое пространство для любых $r_1 \ge 0$ и $r_2 \ge 0$, причем

$$\operatorname{diam} Z_{r_1,r_2}(y_1, y_2) = \operatorname{diam} Y + r_1 + r_2 = |z_1z_2|.$$

Пространства

$$Z_{r_1}(y_1) := Z_{r_1,0}(y_1, y_2) \qquad \text{и} \qquad Z_{r_2}(y_2) := Z_{0,r_2}(y_1, y_2)$$

назовем *одноточечными расширениями пространства* Y. Ясно, что

$$Z_{0,0}(y_1, y_2) = Z_0(y_1) = Z_0(y_2) = Y.$$

Лемма 4.7. *Предположим, что в пространстве $Y \in \mathcal{B}$ существуют точки $y_1, y_2 \in Y$ такие, что* $\operatorname{diam} Y = |y_1 y_2|$, *и пусть $Z_{r_1,r_2}(y_1, y_2)$ — построенное в конструкции* 4.6 *двухточечное расширение пространства Y. Тогда для кривой $\gamma(t) = Z_{r_1 t, r_2 t}(y_1, y_2)$, $t \in [0, 1]$, выполняется*

$$2d_{GH}\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big) = |t_1 - t_2|(r_1 + r_2)$$

при всех $t_1, t_2 \in [0, 1]$, поэтому γ является кратчайшей, соединяющей Y и $Z_{r_1,r_2}(y_1, y_2)$. В частности, полагая $r_2 = 0$ или $r_1 = 0$, получаем кратчайшую, соединяющую Y с соответствующим одноточечным расширением $Z_{r_1}(y_1)$ или $Z_{r_2}(y_2)$.

Доказательство. Рассмотрим соответствие $R \in \mathcal{R}\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big)$, тождественное на множестве $Y \cup \{z_1, z_2\}$. Тогда

$$\operatorname{dis} R = \max\big\{|t_1 - t_2| r_1,\ |t_1 - t_2| r_2,\ |t_1 - t_2|(r_1 + r_2)\big\} = |t_1 - t_2|(r_1 + r_2),$$

поэтому $2d_{GH}\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big) \le |t_1 - t_2|(r_1 + r_2)$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} &\big|\operatorname{diam} \gamma(t_1) - \operatorname{diam} \gamma(t_2)\big| = \\ &\qquad = \big|\operatorname{diam} Y + (r_1 + r_2)t_1 - \operatorname{diam} Y - (r_1 + r_2)t_2\big| = |t_1 - t_2|(r_1 + r_2), \end{aligned}$$

так что, в силу утверждения 1.5, имеем $2d_{GH}\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big) \ge |t_1 - t_2|(r_1 + r_2)$ и, значит,

$$2d_{GH}\big(\gamma(t_1), \gamma(t_2)\big) = |t_1 - t_2|(r_1 + r_2),$$

откуда и вытекает требуемое. □

Утверждение 4.8. *Пусть $X, Y \in \mathcal{B}$ такие, что Y субэкстремально по отношению к X. Предположим, что существуют $y_1, y_2 \in Y$, для которых* $\operatorname{diam} Y = |y_1 y_2|$. *Тогда метрический сегмент $[X, Y]$ продолжается за Y до любого двухточечного расширения $Z := Z_{r_1,r_2}(y_1, y_2)$ пространства Y.*

Доказательство. По лемме 4.7, имеем $2d_{GH}(Y, Z) = r_1 + r_2$.

Теперь оценим $d_{GH}(X, Z)$ с помощью утверждения 1.5 и неравенства треугольника:

$$\begin{aligned} &\operatorname{diam} Z - \operatorname{diam} X \le 2d_{GH}(X, Z) \le 2d_{GH}(X, Y) + 2d_{GH}(Y, Z) = \\ &\qquad\qquad = \operatorname{diam} Y - \operatorname{diam} X + r_1 + r_2 = \operatorname{diam} Z - \operatorname{diam} X, \end{aligned}$$

поэтому

$$2d_{GH}(X,Z) = \operatorname{diam} Z - \operatorname{diam} X = \\ = \big(\operatorname{diam} Z - \operatorname{diam} Y\big) + \big(\operatorname{diam} Y - \operatorname{diam} X\big) = \\ = 2d_{GH}(Y,Z) + 2d_{GH}(X,Y),$$

что и требовалось. $\square$

Замечание 4.9. В утверждении 4.8 метрический сегмент $[X,Y]$ может быть продолжен за Y разными способами: и до $Z_r(y_0)$, и до $Z_r(y_1)$, и до $Z_{r_1,r_2}(y_1,y_2)$. Поэтому, если, скажем, $X,Y \in \mathcal{M}$, где каждая пара точек соединяется кратчайшей, то каждая кратчайшая, соединяющая X и Y, в точке Y может ветвиться, по аналогии с тем, как это происходит в вершине конуса с полным углом большим 2π. В частности, это имеет место для $X = \Delta_1$ и стандартной радиальной кратчайшей вида $t \mapsto t\,Y$, $t \in [0,1]$.

Замечание 4.10. Если ограничится рассмотрением пространства $\mathcal{M}$ метрических компактов, то для каждых $X,Y \in \mathcal{M}$, удовлетворяющих условиям утверждения 4.8, и каждого $r > 0$, всякая кратчайшая, соединяющая X с Y, продолжается за Y до любого пространства Z из пересечения сферы $S_1(\Delta_1)$ с центром в Δ_1 и радиусом $1/2 \operatorname{diam} Y + r/2$ со сферой $S_2(Y)$ с центром в Y и радиусом $r/2$. В частности, в этом пересечении лежат все одноточечные расширения пространства Y с параметром r и все его двухточечные расширения с параметрами r_1, r_2, где $r_1 + r_2 = r$.

Доказательство следующей леммы получается тривиальной модификацией доказательства леммы 4.7.

Лемма 4.11. *Предположим, что в пространстве $Y \in \mathcal{B}$ существуют точки $y_1, y_2 \in Y$ такие, что $\operatorname{diam} Y = |y_1y_2|$, и пусть $Z_{r_1,r_2}(y_1,y_2)$ — построенное в конструкции 4.6 двухточечное расширение пространства Y. Тогда для любых $0 \le s_1 \le r_1$ и $0 \le s_2 \le r_2$ выполняется*

$$2d_{GH}\big(Z_{r_1,r_2}(y_1,y_2), Z_{s_1,s_2}(y_1,y_2)\big) = s_1 - r_1 + s_2 - r_2.$$

Из леммы 4.11 вытекает следующий результат.

Утверждение 4.12. *Пусть Y и $Z_{r_1,r_2}(y_1,y_2)$ — такие же, как в лемме 4.11, а $r(t)$ и $s(t)$ — неотрицательные монотонно возрастающие непрерывные функции от $t \in I$, где I — конечный или бесконечный промежуток. Тогда кривая $\gamma(t) = Z_{r(t),s(t)}(y_1,y_2)$ является кратчайшей.*

4.3 Примеры непродолжающихся сегментов

С помощью теоремы 3.19 можно построить примеры не продолжающихся метрических сегментов и кратчайших.

Пример 4.13. Пусть $X = \lambda\Delta_n$ и $Y = \lambda\Delta_m$ — пространства с одним расстоянием, причем $1 < m < n$. Тогда метрический сегмент $[X, Y]$ не может быть продолжена за Y.

Действительно, $2d_{GH}(X, Y) = \lambda = \operatorname{diam} X = \operatorname{diam} Y$, поэтому пространства X и Y экстремальны по отношению друг к другу. Далее, X и Y разбиваются на n и, соответственно, m одноточечных подмножества нулевого диаметра, поэтому при $m < n$ мы находимся в условиях теоремы 3.19.

Нам понадобится еще одно простое следствие из теоремы 4.1, см. [8].

Следствие 4.14. *Пусть X — ограниченное метрическое пространство, $1 < m \le \#X$, и $\alpha_m(X) = 0$. Тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta_m, X) = \max\bigl\{d_m(X),\, \lambda,\, \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}.$$

Пример 4.15. Пусть теперь $X = \Delta_2$ — пространство, состоящее из двух точек на расстоянии 1, а $Y = [0, 1]$ — отрезок длины 1. Тогда $\alpha_2(Y) = 0$, $d_2(Y) = 1/2$, поэтому $2d_{GH}(\Delta_2, Y) = 1$ по следствию 4.14. Как мы уже видели, см. следствие 4.3, метрический сегмент $[X, Y]$ продолжается за симплекс X. С другой стороны, пространства X и Y взаимно экстремальны. Представим симплекс X в виде объединения двух его точек, а отрезок Y в виде объединения двух отрезков $Y_1 = [0, 1/2]$ и $Y_2 = [1/2, 1]$. Из теоремы 3.19 следует, что $[X, Y]$ не продолжается за Y.

Пример 4.16. Пример 4.15 может быть обобщен следующим образом. Пусть теперь $X = \Delta_k$ — симплекс, состоящий из k, $1 < k < \infty$, элементов, а Y — замкнутое выпуклое тело диаметра 1 с гладкой границей в $(k-1)$-мерном пространстве. Тогда $\alpha_k(Y) = 0$ и метрический сегмент $[X, Y]$ продолжается за симплекс X. По теореме Хадвигера [9], пространство Y можно покрыть k подмножествами диаметра меньше 1, поэтому $d_k(Y) < 1$, откуда $2d_{GH}(\Delta_k, Y) = 1$ по следствию 4.14. Значит пространства X и Y взаимно экстремальны. Представим симплекс X в виде объединения его точек, а Y, как и выше, покроем k подмножествами диаметра меньше 1, тогда применима теорема 3.19, и $[X, Y]$ не продолжается за Y.

4.4 Непродолжаемость в обе стороны до бесконечности

В данном разделе мы покажем, что никакой метрический сегмент в пространстве $\mathcal{B}$ ограниченных метрических пространств не может быть продолжен до бесконечности в обе стороны. Начнем со следующей леммы.

Лемма 4.17. *Никакой метрический сегмент $[X_1, X_2] \subset \mathcal{GH}$ длины s не содержится внутри шара радиуса s с центром в одноточечном пространстве Δ_1.*

Доказательство. По утверждению 1.5 имеем $2s \le \max\{\operatorname{diam} X_1, \operatorname{diam} X_2\}$, и, так как $2d_{GH}(\Delta_1, X_i) = \operatorname{diam} X_i$, то расстояние от Δ_1 до одного из X_i не меньше чем s, что и требовалось. $\square$

Утверждение 4.18. *Пусть $Z \in \mathcal{B}$ — внутренняя точка ε-кратчайшей кривой γ. Тогда по крайней мере один из концов кривой γ содержится в шаре радиуса $R = \operatorname{diam} Z + \varepsilon$ с центром в одноточечном пространстве Δ_1.*

Доказательство. Пусть ε-кратчайшая γ соединяет точки X_1 и X_2, и обе эти точки лежат вне шара радиуса R с центром в Δ_1. Тогда на отрезке кривой γ между Z и X_i, $i = 1, 2$, найдется точка Y_i, лежащая на сфере S некоторого радиуса $R' > R$ с центром в Δ_1. Следовательно, $\operatorname{diam} Y_i = 2R'$, $i = 1, 2$, и $2d_{GH}(Y_i, Z) \geq \operatorname{diam} Y_i - \operatorname{diam} Z = 2R' - \operatorname{diam} Z$, $i = 1, 2$. Далее, отрезок γ между Y_1 и Y_2 тоже является ε-кратчайшей, поэтому, по лемме 3.1,

$$d_{GH}(Y_1, Y_2) \geq d_{GH}(Y_1, Z) + d_{GH}(Z, Y_2) - \varepsilon \geq 2R' - \operatorname{diam} Z - \varepsilon.$$

С другой стороны, $d_{GH}(Y_1, Y_2) \leq \frac{1}{2} \max\{\operatorname{diam} Y_1, \operatorname{diam} Y_2\} = R'$, откуда $R < R' \leq \operatorname{diam} Z + \varepsilon$, противоречие. □

Следствие 4.19. *Никакой метрический сегмент $[X_1, X_2] \subset \mathcal{B}$ не может быть продолжен до бесконечности за оба своих конца.*

Доказательство. Предположим противное, тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ и каждого $i = 1, 2$ существует продолжение Y_i некоторого метрического сегмента $[X_1, X_2]$ за конец X_i такое, что $d_{GH}(X_i, Y_i) > \max\{\operatorname{diam} X_1, \operatorname{diam} X_2\} + \varepsilon$. По определению продолжения, $Y_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2$. По следствию 2.2, существуют $(\varepsilon/3)$-кратчайшие кривые между Y_1 и X_1, между X_1 и X_2, и между X_2 и Y_2. По лемме 3.2, объединение этих трех кривых является ε-кратчайшей кривой между Y_1 и Y_2, внутри которой содержатся X_1 и X_2. По утверждению 4.18, один из концов этой кривой, т.е. одна из точек Y_i, скажем, Y_1, содержится в шаре радиуса $\max\{\operatorname{diam} X_1, \operatorname{diam} X_2\} + \varepsilon$ с центром в Δ_1, т.е. $\operatorname{diam} Y_1 \leq 2\max\{\operatorname{diam} X_1, \operatorname{diam} X_2\} + 2\varepsilon$. По утверждению 1.5,

$$d_{GH}(Y_1, X_1) \leq \frac{1}{2} \max\{\operatorname{diam} Y_1, \operatorname{diam} X_1\} \leq \max\{\operatorname{diam} X_1, \operatorname{diam} X_2\} + \varepsilon,$$

противоречие. □

Список литературы

[1] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[2] Herron D.A. *Gromov–Hausdorff Distance for Pointed Metric Spaces*, J. Anal., 2016, v. 24, N 1, pp 1–38.

[3] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, `arXiv:1603.08850`, 2016.

[4] Ghanaat P. *Gromov-Hausdorff distance and applications.* In: Summer school "Metric Geometry", Les Diablerets, August 25–30, 2013, `https://math.cuso.ch/fileadmin/math/document/gromov-hausdorff.pdf`

[5] Chowdhury S., Memoli F. *Explicit Geodesics in Gromov-Hausdorff Space.* ArXiv e-prints, `arXiv:1603.02385`, 2018.

[6] Иванов А.О., Николаева Н.К., Тужилин А.А. *Метрика Громова–Хаусдорфа на пространстве метрических компактов – строго внутренняя.* Математические заметки, **100** (6), 947–950 (2016); Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic.* ArXiv e-prints, `arXiv:1504.03830`, 2015.

[7] Chowdhury S., Memoli F. *Constructing Geodesics on the Space of Compact Metric Spaces.* ArXiv e-prints, `arXiv:1603.02385`, 2016.

[8] Григорьев Д.С., Иванов А.О., Тужилин А.А. *Расстояние Громова-Хаусдорфа до симплексов.* Чебышевский сборник, **20** (2), 100–114 (2019); Grigor'ev D.S., Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance to Simplexes.* ArXiv e-prints, `arXiv:1906.09644`, 2019.

[9] Болтянский В.Г., Гохберг И.Ц. *Теоремы и задачи комбинаторной геометрии*, Наука, М., 1965, 108 с.