Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов

Д. С. Григорьев, А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Аннотация

В данной работе изучаются геометрические характеристики метрических пространств, участвующие в формулах расстояний Громова–Хаусдорфа от этих пространств до так называемых симплексов, т.е. метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния равны между собой. При вычислении этих расстояний важную роль играет геометрия разбиений этих пространств, приводящая, в случае конечных пространств, к аналогу длин ребер минимального остовного дерева [1]. В работе [2] была разработана аналогичная теория для компактных метрических пространств. В настоящей работе мы обобщаем результаты из [2] на случай произвольного ограниченного пространства, упрощая при этом ряд доказательств.

Библиография: 12 названий.

Введение

«Пространства пространств» и «пространства подмножеств» часто появляются в таких важных приложениях как сравнение и распознавание образов, а также имеют чисто теоретическую значение и привлекают внимание самых разных специалистов на протяжении многих лет. Один из естественных подходов к изучению таких пространств — определить на них функцию расстояния как «меру несхожести» соответствующих объектов. В 1914 году Ф. Хаусдорф [3] ввел в рассмотрение неотрицательную симметричную функцию на парах непустых подмножеств метрического пространства X, равную точной нижней грани таких чисел r, что каждое из этих множеств содержится в r-окрестности оставшегося. Эта функция превращает семейство замкнутых ограниченных подмножеств X в метрическое пространство. Позднее Д. Эдвардс [4] и, независимо, М. Громов [5] обобщили конструкцию Хаусдорфа на класс всех метрических пространств, используя их изометрические вложения во всевозможные объемлющие пространства, см. определение ниже. Полученная функция называется расстоянием Громова–Хаусдорфа. Отметим, что это расстояние симметрично и удовлетворяет неравенству треугольника, хотя может как равняться бесконечности, так и быть нулевым даже между неизометричными пространствами. Тем не менее, если ограничиться семейством $\mathcal{M}$ всех метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, то расстояние Громова–Хаусдорфа будет удовлетворять всем аксиомам метрики. Множество $\mathcal{M}$, вместе с расстоянием Громова–Хаусдорфа, называется пространством Громова–Хаусдорфа. Геометрия этого метрического пространства оказалась довольно причудливой и активно изучается в последнее время. Хорошо известно, что $\mathcal{M}$ — линейно связное, полное, сепарабельное, геодезическое пространство, а также, что $\mathcal{M}$ не является ограниченно компактным. Подробное введение в геометрию пространства Громова–Хаусдорфа можно найти в [6, гл. 7] или в [7]. То, что пространство $\mathcal{M}$ — геодезическое, было доказано в [8].

Задача вычисления расстояния по Громову–Хаусдорфу между двумя конкретными пространствами весьма нетривиальна. Даже в случае конечных пространств эффективный алгоритм не известен, а прямой перебор, основанный на технике соответствий, см. ниже, работает плохо уже для пространств, состоящих из десятков точек. Однако, техника соответствий, активно развивающаяся в последнее время, см. например [8], [9] или [10], позволяет получать различные нетривиальные теоретические результаты.

В данной работе изучается задача вычисления и оценки расстояний Громова–Хаусдорфа от произвольных ограниченных метрических пространств до так называемых симплексов — метрических пространств, в которых все ненулевые расстояния одинаковы. Знание таких расстояний между конечными метрическими пространствами и конечными симплексами позволило, например, получить новую интерпретацию длин ребер минимального остовного дерева [1]. Также симплексы и расстояния до них играют важную роль в изучении группы симметрий пространства $\mathcal{M}$, см. [9]. В работе [2], в ряде частных случаев, были вычислены расстояния от конечных симплексов до компактных метрических пространств. В частности, полученные результаты позволили привести пример двух неизометричных конечных пространств, от которых расстояния до всех конечных симплексов одинаковы.

В настоящей работе мы не ограничиваемся ни конечными симплексами, ни компактными пространствами. Мы определяем ряд дополнительных характеристик ограниченных метрических пространств, в терминах которых мы или приводим точные формулы для расстояния Громова–Хаусдорфа до произвольных симплексов, или даем точные верхние и нижние оценки этих расстояний.

Работа частично подержана Программой Президента РФ поддержки ведущих научных школ России (Проект НШ–6399.2018.1, Соглашение 075–02–2018–867), РФФИ, Проект 19-01-00775-а, а также Программой поддержки научных школ МГУ.

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество. Через $\#X$ будем обозначать *мощность* множества X.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Если $A, B \subset X$ — непустые подмножества X, то положим $|AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A, b \in B\bigr\}$. Если $A = \{a\}$, то вместо $|\{a\}B| = |B\{a\}|$ будем писать $|aB| = |Ba|$.

Для каждой точки $x \in X$ и числа $r > 0$ через $U_r(x)$ будем обозначать открытый шар с центром в точке x и радиусом r; для каждого непустого $A \subset X$ и числа $r > 0$ положим $U_r(A) = \cup_{a\in A} U_r(a)$.

1.1 Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

Для непустых A, $B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B) \text{ и } B \subset U_r(A)\bigr\} = \max\{\sup_{a\in A} |aB|,\ \sup_{b\in B} |Ab|\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Хорошо известно [6], [7], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X, является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *по Громову–Хаусдорфу между* X *и* Y назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$. Хорошо известно [6], [7], что на множестве $\mathcal{M}$ всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии, функция d_{GH} является метрикой.

Для вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа удобно воспользоваться техникой соответствий.

Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех **непустых** отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X, Y)$. Будем смотреть на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X. Тогда, по аналогии с тем, как это принято для отображений, для каждого $x \in X$ и каждого $A \subset X$ определены их образы

$$\sigma(x) = \big\{y \in Y : (x, y) \in \sigma\big\} \qquad \text{и} \qquad \sigma(A) = \bigcup_{a \in A} \sigma(a),$$

а для каждого $y \in Y$ и каждого $B \subset Y$ — их прообразы

$$\sigma^{-1}(y) = \big\{x \in X : (x, y) \in R\big\} \qquad \text{и} \qquad \sigma^{-1}(B) = \bigcup_{b \in B} \sigma^{-1}(b).$$

Отношение $R \in \mathcal{P}(X, Y)$ называется *соответствием*, если $R(X) = Y$ и $R^{-1}(Y) = X$. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Пусть X и Y — произвольные метрические пространства. *Искажением* $\operatorname{dis} \sigma$ *отношения* $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ назовем число

$$\operatorname{dis} \sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x, y), (x', y') \in \sigma\Big\}.$$

Легко видеть, что для любых отношений $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{P}(X, Y)$ таких, что $\sigma_1 \subset \sigma_2$, выполняется $\operatorname{dis} \sigma_1 \le \operatorname{dis} \sigma_2$. Иными словами, отображение $\operatorname{dis} \colon \mathcal{P}(X, Y) \to \mathbb{R}$ монотонно, если на $\mathcal{P}(X, Y)$ рассматривается частичный порядок, заданный включением.

Предложение 1.1 ([6], [7])**.** *Для любых метрических пространств* X *и* Y *имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\big\}.$$

Минимальные по включению соответствия из $\mathcal{R}(X, Y)$ назовем *неприводимыми*. Множество всех неприводимых соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}^0(X, Y)$.

Отметим (см. [11]), что каждое неприводимое соответствие $R \in \mathcal{R}^0(X, Y)$ задает разбиения D_X^R и D_Y^R пространств X и Y, а также биекцию $f_R \colon D_X^R \to D_Y^R$, для которой

$$R = \bigcup_{X_i \in D_X^R} X_i \times f_R(X_i). \tag{1}$$

При этом, если $\#X_i > 1$, то $\#f_R(X_i) = 1$, и если $\#f_R(X_i) > 1$, то $\#X_i = 1$. Более того, каждая биекция f между произвольными разбиениями D_X и D_Y пространств X и Y, удовлетворяющая описанным только что свойствам, порождает неприводимое соответствие по формуле (1).

Предложение 1.2 ([11])**.** *Для каждого $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ существует неприводимое соответствие R_0 такое, что $R_0 \subset R$. В частности, $\mathcal{R}^0(X,Y) \neq \emptyset$.*

Учитывая монотонности искажения dis, мгновенно получаем следующий результат.

Следствие 1.3. *Для любых метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}^0(X,Y)\bigr\}.$$

С помощью соответствий легко доказываются следующие хорошо известные факты. Для произвольного метрического пространства X и числа $\lambda > 0$ через λX обозначим метрическое пространство, которое отличается от X умножением всех расстояний на λ.

Предложение 1.4 ([6], [7])**.** *Пусть X и Y — метрические пространства. Тогда*

(1) *если X — одноточечное метрическое пространство, то $d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\operatorname{diam} Y$;*

(2) *если $\operatorname{diam} X < \infty$, то*
$$d_{GH}(X,Y) \ge \frac{1}{2}|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y|;$$

(3) $d_{GH}(X,Y) \le \frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$*, в частности, для ограниченных X и Y имеем $d_{GH}(X,Y) < \infty$;*

(4) *для любых $X, Y \in \mathcal{M}$ и любого $\lambda > 0$ имеем $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X,Y)$. Более того, при $\lambda \neq 1$ единственным пространством, которое при такой операции не меняется, является одноточечное пространство. Иными словами, операция умножения метрики на число $\lambda > 0$ является гомотетией пространства $\mathcal{M}$ с центром в одноточечном метрическом пространстве.*

1.2 Несколько элементарных соотношений

Для конкретных вычислений расстояний Громова–Хаусдорфа нам будут полезны следующие несложные соотношения, доказательства которых приведены в [2].

Предложение 1.5. *Для любых неотрицательных a и b выполнено неравенство*

$$\max\bigl\{a, |b-a|\bigr\} \le \max\{a,b\}.$$

Предложение 1.6. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — непустое ограниченное подмножество вещественной прямой, и пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\sup_{a\in A}|\lambda - a| = \max\{\lambda - \inf A, \sup A - \lambda\} = \Bigl|\lambda - \frac{\inf A + \sup A}{2}\Bigr| + \frac{\sup A - \inf A}{2}.$$

Предложение 1.7. *Пусть $A \subset \mathbb{R}$ — непустое ограниченное подмножество вещественной прямой, $\inf A \ge 0$, и пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\sup_{a\in A}\bigl\{\lambda, |\lambda - a|\bigr\} = \max\{\lambda, \sup A - \lambda\}.$$

Следствие 1.8. *Для любого $a \ge 0$ и любого λ выполняется*

$$\max\bigl\{\lambda, |a-\lambda|\bigr\} = \max\{\lambda, a - \lambda\}.$$

2 Расстояние между ограниченным метрическим пространством и симплексом

Метрическое пространство X назовем *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Симплекс, в котором ненулевые расстояния равны 1, обозначим через Δ. Таким образом, $\lambda\Delta$, $\lambda > 0$, обозначает симплекс, в котором все ненулевые расстояния равны λ.

2.1 Расстояние до симплексов с бóльшим числом точек

Следующий результат обобщает теорему 4.1 из [2].

Теорема 2.1. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $\#X < \#\lambda\Delta$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Доказательство. Если $\#X = 1$, то $\operatorname{diam} X = 0$ и, по предложению 1.4,

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \operatorname{diam} \lambda\Delta = \lambda = \max\{\lambda, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Пусть теперь $\#X > 1$. Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}(\lambda\Delta, X)$. Так как $\#X < \#\lambda\Delta$, то существует $x \in X$ такое, что $\#R^{-1}(x) \ge 2$, поэтому $\operatorname{dis} R \ge \lambda$ и, значит, $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \ge \lambda$.

Рассмотрим произвольную последовательность $(x_i, y_i) \in X \times X$ такую, что $|x_i y_i| \to \operatorname{diam} X$. Если в ней существует подпоследовательность (x_{i_k}, y_{i_k}), для которой при каждом i_k можно найти такое $z \in \lambda\Delta$, что $(z, x_{i_k}), (z, y_{i_k}) \in R$, то $\operatorname{dis} R \ge \operatorname{diam} X$ и, значит, $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \ge \max\{\lambda, \operatorname{diam} X\}$.

Если такой подпоследовательности нет, то существует подпоследовательность (x_{i_k}, y_{i_k}), для которой при каждом i_k можно найти различные $z_k, w_k \in \lambda\Delta$ такие, что $(z_k, x_{i_k}), (w_k, y_{i_k}) \in R$, и тогда $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \ge \max\bigl\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\bigr\}$.

По предложению 1.5,

$$\max\{\lambda, \operatorname{diam} X\} \ge \max\bigl\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\bigr\},$$

поэтому в любом случае $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \ge \max\bigl\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\bigr\}$.

Выберем произвольное $x_0 \in X$, тогда, в силу предположения, $\#X > 1$ и, значит, множество $X \setminus \{x_0\}$ непусто. Так как $\#X < \#\lambda\Delta$, то в $\lambda\Delta$ существует подмножество $\lambda\Delta'$, равномощное $X \setminus \{x_0\}$. Пусть $g\colon \lambda\Delta' \to X \setminus \{x_0\}$ — произвольная биекция, и $\lambda\Delta'' = \lambda\Delta \setminus \lambda\Delta'$, тогда $\lambda\Delta'' \ne \emptyset$. Рассмотрим соответствие

$$R_0 = \Bigl\{\bigl(z', g(z')\bigr) : z' \in \lambda\Delta'\Bigr\} \cup \bigl(\{x_0\} \times \lambda\Delta''\bigr).$$

Тогда $\operatorname{dis} R_0 \le \max\bigl\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\bigr\}$, откуда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\bigl\{\lambda, |\operatorname{diam} X - \lambda|\bigr\}.$$

Осталось применить следствие 1.8. □

2.2 Расстояние от ограниченного метрического пространства до симплексов с не превосходящим числом точек

Пусть X — произвольное множество и m — кардинальное число, не превосходящее $\#X$. Через $\mathcal{D}_m(X)$ обозначим семейство всевозможных разбиений множества X на m непустых подмножеств.

Пусть теперь X — метрическое пространство. Тогда для каждого $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ положим

$$\operatorname{diam} D = \sup_{i\in I} \operatorname{diam} X_i.$$

Далее, для любых непустых $A, B \subset X$ пусть

$$|AB| = \inf\bigl\{|ab| : (a,b) \in A\times B\bigr\} \qquad \text{и} \qquad |AB|' = \sup\bigl\{|ab| : (a,b) \in A\times B\bigr\},$$

и для каждого $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ определим

$$\alpha(D) = \inf\bigl\{|X_iX_j| : i \neq j\bigr\} \qquad \text{и} \qquad \beta(D) = \sup\bigl\{|X_iX_j|' : i \neq j\bigr\}.$$

Пусть теперь $\lambda\Delta$ — симплекс мощности m. Выберем произвольное $D \in \mathcal{D}_m(X)$, любую биекцию $g\colon \lambda\Delta \to D$ и зададим соответствие $R_D \in \mathcal{R}(\lambda\Delta, X)$ следующим образом:

$$R_D = \bigcup_{z\in\lambda\Delta} \{z\} \times g(z).$$

Ясно, что каждое соответствие R_D — неприводимое.

Следующий результат непосредственно обобщает предложение 4.5 из [2].

Предложение 2.2. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Тогда для любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем*

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \beta(D) - \lambda\}.$$

Следствие 2.3. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Тогда для любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем*

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Доказательство. Отметим, что $\operatorname{diam} D \le \operatorname{diam} X$ и $\beta(D) \le \operatorname{diam} X$. При этом, если $\operatorname{diam} D < \operatorname{diam} X$, и $(x_i, y_i) \in X \times X$ — последовательность, для которой $|x_iy_i| \to \operatorname{diam} X$, то, начиная с некоторого номера i, точки x_i и y_i лежат в разных элементах разбиения D, следовательно, в этом случае $\beta(D) = \operatorname{diam} X$, и формула доказана.

Пусть теперь $\operatorname{diam} D = \operatorname{diam} X$, тогда $\beta(D) - \lambda \le \operatorname{diam} X$ и $\operatorname{diam} X - \lambda \le \operatorname{diam} X$, поэтому

$$\begin{aligned}\max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \beta(D) - \lambda\} &= \max\{\operatorname{diam} X,\, \lambda - \alpha(D)\} = \\ &= \max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \operatorname{diam} X - \lambda\}.\end{aligned}$$

Доказательство закончено. $\square$

Сформулируем и докажем теперь аналог предложения 4.6 из [2], не используя теорему 4.3 оттуда же.

Предложение 2.4. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Тогда*
$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \operatorname{dis} R_D.$$

Доказательство. По следствию 1.3, $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{R\in\mathcal{R}^0(\lambda\Delta,X)} \operatorname{dis} R$, поэтому достаточно показать, что для любого неприводимого соответствия $R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta, X)$ существует такое $D \in \mathcal{D}_m(X)$, что $\operatorname{dis} R_D \le \operatorname{dis} R$.

Выберем произвольное $R \in \mathcal{R}^0(\lambda\Delta, X)$, не представимое в виде R_D, тогда разбиение $D^R_{\lambda\Delta}$ не точечное, т.е. существует $x \in X$, для которого $\#R^{-1}(x) \ge 2$, поэтому $\operatorname{dis} R \ge \lambda$.

Зададим на множестве $D^R_{\lambda\Delta}$ метрику, положив расстояние между различными элементами равным λ, тогда это метрическое пространство изометрично некоторому симплексу $\lambda\Delta'$. Соответствие R порождает естественным образом соответствие $R' \in \mathcal{R}(\lambda\Delta', X)$: если $D^R_{\lambda\Delta} = \{\Delta_i\}_{i\in I}$ и $f_R\colon D^R_{\lambda\Delta} \to D^R_X$ — биекция, порожденная R, то
$$R' = \bigcup_{i\in I} \{\Delta_i\} \times f_R(\Delta_i).$$

Легко видеть, что $\operatorname{dis} R = \max\{\lambda, \operatorname{dis} R'\}$. Кроме того, R' порождается разбиением $D' := D^R_X$, т.е. $R' = R_{D'}$, поэтому, в силу следствия 2.3, имеем
$$\operatorname{dis} R' = \max\{\operatorname{diam} D',\, \lambda - \alpha(D'),\, \operatorname{diam} X - \lambda\},$$
откуда
$$\operatorname{dis} R = \max\{\lambda, \operatorname{diam} D',\, \lambda - \alpha(D'),\, \operatorname{diam} X - \lambda\} = \max\{\lambda,\, \operatorname{diam} D',\, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Так как $\#D' \le m$, у разбиения D' существует подразбиение $D \in \mathcal{D}_m(X)$. Ясно, что $\operatorname{diam} D \le \operatorname{diam} D'$, поэтому
$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \operatorname{diam} X - \lambda\} \le \max\{\operatorname{diam} D',\, \lambda,\, \operatorname{diam} X - \lambda\} = \operatorname{dis} R,$$
что и требовалось. □

Следствие 2.5. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Тогда*
$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \max\{\operatorname{diam} D,\, \lambda - \alpha(D),\, \operatorname{diam} X - \lambda\}.$$

Для произвольного метрического пространства X положим
$$\varepsilon(X) = \inf\bigl\{|xy| : x, y \in X,\, x \ne y\bigr\}.$$

Отметим, что $\varepsilon(X) \le \operatorname{diam} X$, причем для ограниченного X равенство достигается, если и только если X является симплексом.

Из следствия 2.5 мгновенно вытекает следующая теорема, доказанная в [2].

Теорема 2.6 ([2]). *Пусть X — конечное метрическое пространство и $\#\lambda\Delta = \#X$, тогда*
$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\bigl\{\lambda - \varepsilon(X),\, \operatorname{diam} X - \lambda\bigr\}.$$

Приведем ряд наши основные новые результаты.

Для произвольного метрического пространства X, $m \le \#X$, положим

$$\alpha_m^-(X)=\inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)}\alpha(D),\qquad \alpha_m(X)=\alpha_m^+(X)=\sup_{D\in\mathcal{D}_m(X)}\alpha(D),$$
$$d_m(X)=d_m^-(X)=\inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)}\operatorname{diam}D,\qquad d_m^+(X)=\sup_{D\in\mathcal{D}_m(X)}\operatorname{diam}D.$$

Замечание 2.7. Мы ввели упрощенные переобозначения для $\alpha_m^+(X)$ и $d_m^-(X)$ потому, что эти величины, в отличии от их «близнецов» $\alpha_m^-(X)$ и $d_m^+(X)$, встречаются в приводимых ниже формулах намного чаще.

Отметим, что $\alpha_m(X)=0$ тогда и только тогда, когда для любого $D\in\mathcal{D}_m(X)$ выполняется $\alpha(D)=0$.

Пример 2.8. Пусть X — бесконечное компактное метрическое пространство, а m — любой бесконечный кардинал, $m\le\#X$. Тогда $\alpha_m(X)=0$.

Действительно, выберем произвольное $D=\{X_i\}_{i\in I}\in\mathcal{D}_m(X)$, а в каждом X_i — по одной точке $x_i\in X_i$. Тогда, в силу компактности X, множество $\{x_i\}_{i\in I}$ содержит сходящуюся последовательность $\{x_{i_k}\}$, состоящую из попарно различных точек. Но тогда $|X_{i_k}X_{i_{k+1}}|\to 0$ при $k\to\infty$, поэтому $\alpha(D)=0$.

Пример 2.9. Пусть X — ограниченное бесконечное метрическое пространство, представленное в виде дизъюнктного объединение n бесконечных компактов, и m — бесконечное кардинальное число, $n<m\le\#X$, тогда $\alpha_m(X)=0$.

Действительно, пусть $\{Z_j\}_{j\in J}$, $\#J=n$, — разбиение пространства X на n компактов Z_j. Выберем произвольное $D=\{X_i\}_{i\in I}\in\mathcal{D}_m(X)$. Так как $n<m$, то для некоторого $j\in J$ семейство всех непустых пересечений $X_i\cap Z_j$ образует бесконечное разбиение компакта Z_j. Осталось воспользоваться рассуждениями примера 2.8.

Пример 2.10. Пусть X — связное ограниченное метрическое пространство, а $m\ge 2$ — любой кардинал, $m\le\#X$. Тогда $\alpha_m(X)=0$.

Действительно, выберем произвольное $D=\{X_i\}_{i\in I}\in\mathcal{D}_m(X)$, в нем — произвольное X_i, и положим $X_i'=\cup_{i\ne j\in I}X_j$, тогда $D'=\{X_i,X_i'\}\in\mathcal{D}_2(X)$. Так как пространство X — связное, то $|X_iX_i'|=0$, поэтому можно выбрать последовательность X_{j_k}, $j_k\ne i$, для которой $|X_iX_{j_k}|\to 0$ при $k\to\infty$, откуда $\alpha(D)=0$.

Аналогично разбирается следующий пример.

Пример 2.11. Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, состоящее из n связных компонент, и m — кардинальное число, $n<m\le\#X$, тогда $\alpha_m(X)=0$.

Из следствия 2.5 вытекает следующий результат.

Теорема 2.12. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m=\#\lambda\Delta\le\#X$, и $\alpha_m(X)=0$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta,X)=\max\bigl\{d_m(X),\,\lambda,\,\operatorname{diam}X-\lambda\bigr\}.$$

Рассмотрим график зависимости величины $2d_{GH}(\lambda\Delta,X)$ из теоремы 2.12 от λ, см. рис. 1.

Из графика, приведенного на рис. 1, непосредственно получается следующий результат.

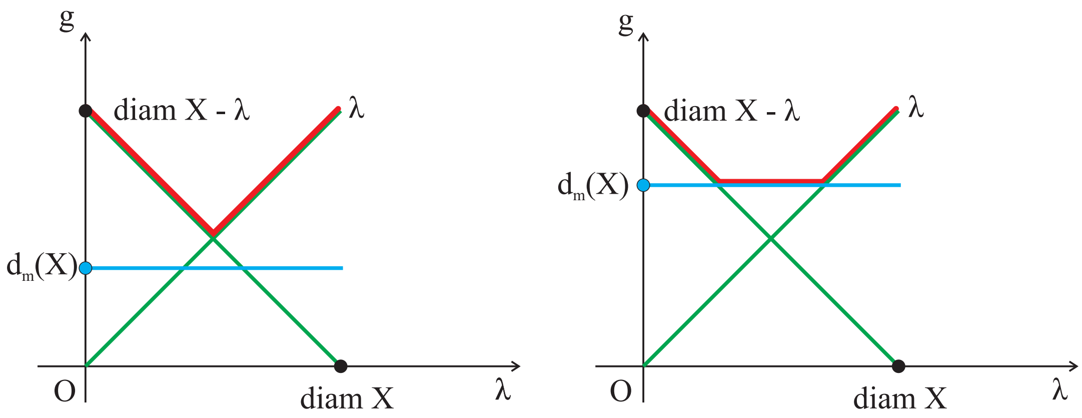

Рис. 1: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$ при $\alpha_m(X) = 0$ и разных значениях $d_m(X)$.

Следствие 2.13. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \le \#X$, причем $\alpha_m(X) = 0$, тогда*

(1) *если $d_m(X) \le \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$, то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} \operatorname{diam} X - \lambda & \textit{при} \quad \lambda \le \frac{1}{2}\operatorname{diam} X, \\ \lambda & \textit{при} \quad \lambda \ge \frac{1}{2}\operatorname{diam} X; \end{cases}$$

(2) *если $d_m(X) > \frac{1}{2}\operatorname{diam} X$, то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \begin{cases} \operatorname{diam} X - \lambda & \textit{при} \quad \lambda \le \operatorname{diam} X - d_m(X), \\ d_m(X) & \textit{при} \quad \operatorname{diam} X - d_m(X) \le \lambda \le d_m(X), \\ \lambda & \textit{при} \quad \lambda \ge d_m(X). \end{cases}$$

Еще один частный случай получается, если $d_m(X) = \operatorname{diam} X$, что случается в точно тогда, когда $\operatorname{diam} D = \operatorname{diam} X$ для всех $D \in \mathcal{D}_m(X)$.

Пример 2.14. Для каждого симплекса $X = \lambda\Delta$, кардинального числа $0 < m < \#\lambda\Delta$ и любого $D \in \mathcal{D}_m(X)$ имеем $\operatorname{diam} D = \lambda = \operatorname{diam} X$, поэтому $d_m(X) = \operatorname{diam} X$.

Пример 2.15. Пусть $X = S^1$ — стандартная единичная окружность на евклидовой плоскости, и $m = 2$. Тогда $d_m(X) = \operatorname{diam} X = 2$.

Действительно, предположим противное, т.е. существует $D = \{X_1, X_2\} \in \mathcal{D}_m(X)$ такое, что $\operatorname{diam} D < 2$. Для $x \in X$ через x' обозначим диаметрально противоположную x точку окружности X. Из сделанного предположения вытекает, что для каждого $x \in X_1$ точка x' лежит в X_2 и, значит, некоторая окрестность точки x принадлежит X_1. Таким образом, X_1 и, аналогично, X_2 являются непустыми открытыми подмножествами X, образующими разбиение, что противоречит связности X.

Следствие 2.16. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \le \#X$, причем $d_m(X) = \operatorname{diam} X$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\bigl\{\operatorname{diam} X,\, \lambda - \alpha_m(X)\bigr\}.$$

В частности,

(1) *при $\lambda \le \operatorname{diam} X + \alpha_m(X)$ имеем $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \operatorname{diam} X$;*

(2) *при $\lambda \ge \operatorname{diam} X + \alpha_m(X)$ выполняется $2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \lambda - \alpha_m(X)$.*

Рассмотрим теперь общий случай. Оказывается, и здесь тоже удается получить некоторые явные формулы, но уже не для всех λ. Пусть A — точка пересечения графиков функций $\operatorname{diam} X - \lambda$, $\lambda \in [0, \operatorname{diam} X]$, и $\lambda - \alpha_m^-(X)$, $\lambda \ge \alpha_m^-(X)$. Рассмотрим различные варианты взаимного расположения точки A и горизонтальной полосы S между $d_m(X)$ и $d_m^+(X)$.

(1) Точка A лежит ниже полосы S. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 2.

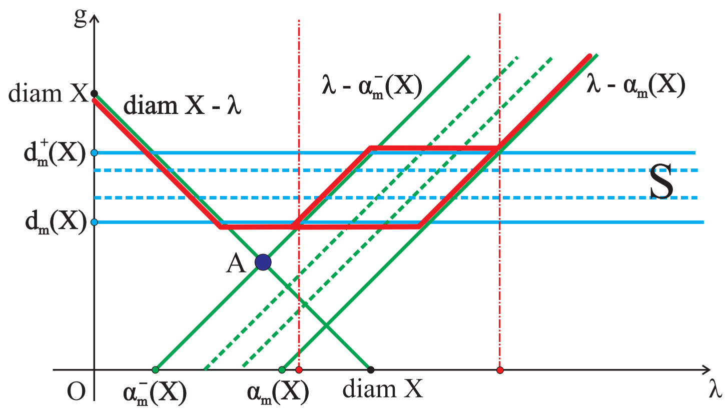

Рис. 2: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$, точка A лежит ниже полосы S.

Вертикальные пунктирные линии делят рисунок на три части: левую, среднюю и правую. В левой и правой частях жирные линии дают точное значения функции g. В средней части жирная линия ограничивает ромб: именно в нем лежат все точки $\bigl(\alpha(D), \operatorname{diam} D\bigr)$, поэтому «верхняя и левая части» границы ромба дает верхнюю оценку на функцию g, а «нижняя и правая части» — нижнюю оценку.

Вычисляя координаты точек пересечения графиков, получаем следующий результат.

Следствие 2.17. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Предположим, что $\operatorname{diam} X - \alpha_m^-(X) \le 2d_m(X)$, тогда*

- *если $\lambda \le \alpha_m^-(X) + d_m(X)$, то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\bigl\{\operatorname{diam} X - \lambda, d_m(X)\bigr\};$$

- *если* $\alpha_m^-(X)+d_m(X)\le\lambda\le\alpha_m(X)+d_m^+(X)$, *то*

$$\max\bigl\{\lambda-\alpha_m(X),d_m(X)\bigr\}\le 2d_{GH}(\lambda\Delta,X)\le\min\bigl\{\lambda-\alpha_m^-(X),d_m^+(X)\bigr\};$$

- *если* $\lambda\ge\alpha_m(X)+d_m^+(X)$, *то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta,X)=\lambda-\alpha_m(X).$$

(2) Точка A лежит в полосе S. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 3.

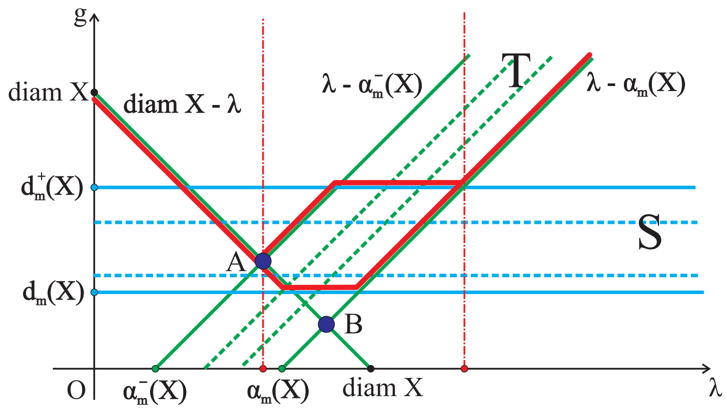

Рис. 3: График функции $g(\lambda)=2d_{GH}(\lambda\Delta,X)$, точка A лежит в полосе S.

Пусть B — точка пересечения графиков функций $\operatorname{diam}X-\lambda$ и $\lambda-\alpha_m(X)$. Снова вертикальные пунктирные линии делят рисунок на три части, и снова в крайних частях вычисляется точное значения функции g. В средней части жирная линия ограничивает пятиугольник, который вырождается в четырехугольник, если точка B тоже попадает в полосу S: хотя все точки $\bigl(\alpha(D),\operatorname{diam}D\bigr)$ лежат в ромбе, полученном пересечением полосы S и наклонной полосы T между графиками функций $\lambda-\alpha_m^-(X)$ и $\lambda-\alpha_m(X)$, значение функции g не может опуститься ниже графика функции $\operatorname{diam}X-\lambda$, который и отрезает от ромба соответствующую фигуру (треугольник в случае, когда B не попадает внутрь полосы S, и четырехугольник в противном случае).

Вычисляя координаты точек пересечения графиков, получаем следующий результат.

Следствие 2.18. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m=\#\lambda\Delta\le\#X$. Предположим, что $2d_m(X)\le\operatorname{diam}X-\alpha_m^-(X)\le 2d_m^+(X)$, тогда*

- *если* $\lambda\le\frac12\bigl(\alpha_m^-(X)+\operatorname{diam}(X)\bigr)$, *то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta,X)=\operatorname{diam}X-\lambda;$$

- *если* $\frac12\bigl(\alpha_m^-(X)+\operatorname{diam}(X)\bigr)\le\lambda\le\alpha_m(X)+d_m^+(X)$, *то*

$$\max\bigl\{\operatorname{diam}X-\lambda,\lambda-\alpha_m(X),d_m(X)\bigr\}\le 2d_{GH}(\lambda\Delta,X)\le\min\bigl\{\lambda-\alpha_m^-(X),d_m^+(X)\bigr\};$$

- *если* $\lambda \ge \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, *то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \lambda - \alpha_m(X).$$

(3) Точка A лежит выше полосы S. Этот случай разбивается на два подслучая, в зависимости от положения точки B.

(3.1) Верхняя граница полосы S лежит между точками A и B. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 4.

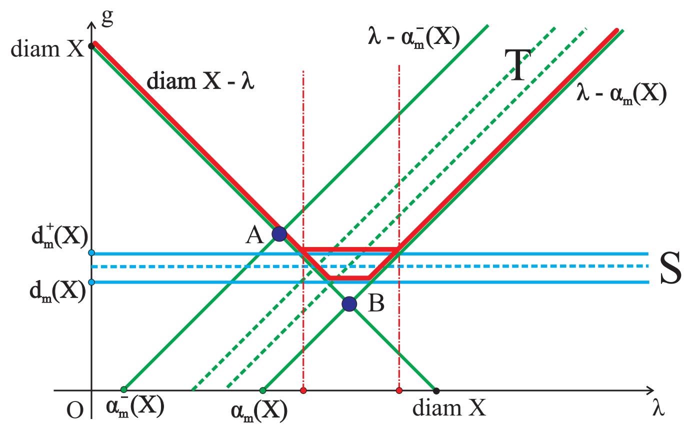

Рис. 4: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$, верхняя граница полосы S лежит между точками A и B.

На сей раз «область неопределенности» в средней части рисунка представляет собой трапецию, если B лежит строго ниже полосы S, и эта трапеция вырождается в треугольник, когда B оказывается в этой полосе.

Вычисляя координаты точек пересечения графиков, получаем следующий результат.

Следствие 2.19. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Предположим, что* $\operatorname{diam} X - \alpha_m(X) \le 2d_m^+(X) \le \operatorname{diam} X - \alpha_m^-(X)$, *тогда*

- *если* $\lambda \le \operatorname{diam}(X) - d_m^+(X)$, *то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \operatorname{diam} X - \lambda;$$

- *если* $\operatorname{diam}(X) - d_m^+(X) \le \lambda \le \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, *то*

$$\max\bigl\{\operatorname{diam} X - \lambda, \lambda - \alpha_m(X), d_m(X)\bigr\} \le 2d_{GH}(\lambda\Delta, X) \le d_m^+(X);$$

- *если* $\lambda \ge \alpha_m(X) + d_m^+(X)$, *то*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \lambda - \alpha_m(X).$$

(3.2) Точка B лежит выше полосы S. Соответствующая иллюстрация приведена на рис. 5.

На этот раз функция g вычисляется точно при всех λ.

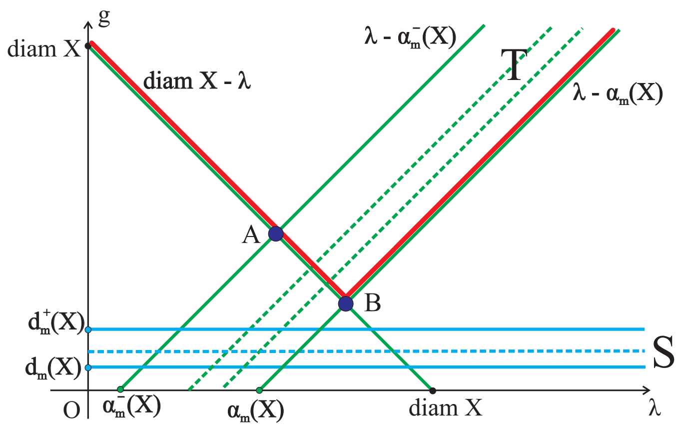

Рис. 5: График функции $g(\lambda) = 2d_{GH}(\lambda\Delta, X)$, точка B лежит выше полосы S.

Следствие 2.20. *Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство, $m = \#\lambda\Delta \le \#X$. Предположим, что $2d_m^+(X) \le \operatorname{diam} X - \alpha_m(X)$, тогда*

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \max\bigl\{\operatorname{diam} X - \lambda, \lambda - \alpha_m(X)\bigr\}.$$

Список литературы

[1] Tuzhilin A.A. *Calculation of Minimum Spanning Tree Edges Lengths using Gromov–Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, arXiv:1605.01566, 2016.

[2] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes.* ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655, 2016.

[3] Hausdorff F. *Grundzüge der Mengenlehre.* Leipzig, Veit, 1914 [reprinted by Chelsea in 1949].

[4] Edwards D. *The Structure of Superspace.* In: Studies in Topology, ed. by Stavrakas N.M. and Allen K.R., New York, London, San Francisco, Academic Press, Inc., 1975.

[5] Gromov M. *Groups of Polynomial growth and Expanding Maps.* in: Publications Mathematiques I.H.E.S., 53, 1981.

[6] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[7] Иванов А.О., Тужилин А.А. *Геометрия расстояний Хаусдорфа и Громова-Хаусдорфа: случай компактов.* Изд-во Попечительского совета мех-мат ф-та МГУ, Москва, 2017.

[8] Иванов А.О., Николаева Н.К., Тужилин А.А. *Метрика Громова–Хаусдорфа на пространстве метрических компактов — строго внутренняя.* Матем. заметки. 2016. Т. 100, N 6. С. 947–950, doi: https://doi.org/10.4213/mzm11411 (`arXiv:1504.03830`).

[9] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Isometry group of Gromov–Hausdorff space*. Matematicki Vesnik. — 2019. — Vol. 71, no. 1-2. — P. 123–154.

[10] Memoli F. *On the Use of Gromov–Hausdorff Distances for Shape Comparison*. In: Proceedings of Point Based Graphics 2007, Ed. by Botsch M., Pajarola R., Chen B., and Zwicker M., The Eurographics Association, Prague, 2007, pp. 81–90, doi: 10.2312/SPBG/SPBG07/081-090.

[11] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings*. ArXiv e-prints, 1604.06116, 2016.

[12] Ivanov A., Tuzhilin A. *Geometry of Gromov–Hausdorff metric space*. Bulletin de l'Academie Internationale CONCORDE. no. 3, pp. 47–57, 2017.