Изометрии пространства Громова–Хаусдорфа

А. О. Иванов, А. А. Тужилин

Аннотация

Настоящая работа посвящена изучению группы изометрий пространства Громова–Хаусдорфа, состоящего из метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, и наделенного расстоянием Громова–Хаусдорфа. Основная цель работы — привести доказательство следующей теоремы Джорджа Лаутера (2015 год): *группа изометрий пространства Громова–Хаусдорфа тривиальна* [1]. К сожалению, сам автор за 2 года так и не опубликовал аккуратного текста, а приведенные в [1] блестящие идеи перемешаны с недоказанными и неверными утверждениями.

Введение

Настоящая работа посвящена изучению группы изометрий пространства Громова–Хаусдорфа, состоящего из метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, и наделенного расстоянием Громова–Хаусдорфа (точные определение см. ниже, а также, например, в [2]).

В 2015 году, обсуждая со Ставросом Илиадисом геометрические задачи, связанные с этим пространством, мы обратили внимание на гипотезу, которую Ставрос сформулировал, как он нам сообщил, несколько лет назад: *группа изометрий пространства Громова–Хаусдорфа тривиальна.* Решив посмотреть, что известно на эту тему, мы наткнулись на [1], где Noah Schweber[1] формулировал эту же гипотезу. Несколько ниже мы обнаружили положительное "решение", автором которого был Джордж Лаутер (George Lowther)[2]. Конечно, мы с интересом стали разбирать работу, но достаточно быстро столкнулись с целым рядом проблем: безусловно, черновой вариант требовал существенной доработки, причем не только приведения аккуратных доказательств, но и исправления заведомо неверных утверждений. Наиболее яркий пример: утверждалось, что расстояние Громова–Хаусдорфа между конечными пространствами с одним и тем же числом точек достигается на биекции (простой компьютерный эксперимент показывает, что это не так).

Собственно говоря, настоящая работа — это результат нашей критической переработки идей, изложенных в [1]. Многие приводимые нами конструкции и доказательства оригинальны и не содержатся в [1]. Ряд утверждений из [1] обрели корректную интерпретацию. Кроме того, мы даем геометрическую интерпретацию некоторых с виду достаточно формальных утверждений из [1]. К сожалению, сам автор за 2 года так и не опубликовал аккуратного текста.

[1] Процитируем краткую справку, взятую из этого блога: "Noah Schweber — a postdoc at UW-Madison (previously a grad student at UC-Berkeley), interested in mathematical logic — specifically, computability theory and reverse mathematics, set theory, and abstract model theory. I'm also interested in other Nifty Things, in mathematics and elsewhere".

[2] Цитата из справки: "Apparently, this user prefers to keep an air of mystery about them".

Итак, наша основная цель — привести доказательство следующей теоремы Джорджа Лаутера.

Основная теорема. *Группа изометрий пространства Громова–Хаусдорфа тривиальна.*

Отметим, что локально пространство Громова–Хаусдорфа устроено достаточно симметрично, в частности, достаточно малые шаровые окрестности одинакового радиуса с центрами в n-точечных пространствах общего положения (все ненулевые расстояния разные и все неравенства треугольника невырождены) изометричны друг другу [3]. Здесь же показано, что группа изометрий достаточно малых окрестностей таких пространств содержит подгруппу, изоморфную симметрической группе перестановок n-точечного множества.

Авторы благодарны Ставросу Илиадису за то, что он обратил наше внимание на эту красивую задачу, а также за многочисленные полезные обсуждения. Авторы также благодарны Джорджу Лаутеру за блестящие идеи, изложенные им в [1].

1 Основные определения и предварительные результаты

Пусть X — произвольное множество. Через $\#X$ будем обозначать *мощность* множества X.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между его точками x и y будем обозначать через $|xy|$. Если $A, B \subset X$ — непустые подмножества, то положим $|AB| = \inf\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}$. Если $A = \{a\}$, то вместо $|\{a\}B| = |B\{a\}|$ будем писать $|aB| = |Ba|$.

Закрепим обозначения за следующими стандартными объектами, связанными с метрическим пространством X:

- для $x \in X$ и $r > 0$ через $U_r(x) = \{y \in X : |xy| < r\}$ обозначим *открытый шар с центром в x и радиусом r*;
- для $x \in X$ и $r \geq 0$ через $B_r(x) = \{y \in X : |xy| \leq r\}$ и $S_r(x) = \{y \in X : |xy| = r\}$ обозначим соответственно *замкнутый шар* и *сферу с центром в x и радиусом r*;
- для непустого $A \in X$ и $r > 0$ через $U_r(A) = \{x \in X : |xA| < r\}$ обозначим *открытую окрестность множества A*, при этом r называется *радиусом* этой окрестности;
- для непустого $A \in X$ и $r \geq 0$ через $B_r(A) = \{x \in X : |xA| \leq r\}$ и $S_r(A) = \{x \in X : |xA| = r\}$ обозначим *замкнутую окрестность* и *эквидистанту множества A*, при этом r называется *радиусом* этой окрестности (эквидистанты).

1.1 Расстояния Хаусдорфа и Громова–Хаусдорфа

Для непустых A, $B \subset X$ положим

$$d_H(A,B) = \inf\bigl\{r > 0 : A \subset U_r(B) \;\&\; B \subset U_r(A)\bigr\} = \max\{\sup_{a\in A}|aB|, \sup_{b\in B}|Ab|\}.$$

Полученная величина называется *расстоянием Хаусдорфа между A и B*. Хорошо известно [2], что расстояние Хаусдорфа, рассматриваемое на множество всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств из X, является метрикой.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *по Громову–Хаусдорфу между* X *и* Y назовем точную нижнюю грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$.

Обозначим через $\mathcal{M}$ множестве всех компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Теорема 1.1 ([2], [4]). *На* $\mathcal{M}$ *функция* d_{GH} *является метрикой. Метрическое пространство* $\mathcal{M}$ *линейно связное, полное, сепарабельное, геодезическое* (*любые две точки соединяются кратчайшей кривой, длина которой равна расстояняю между ее концами*).

Следующий результат мгновенно вытекает из определений.

Предложение 1.2 ([2]). *Пусть* Y *— произвольное непустое подмножество метрического пространства* X, *тогда* $d_{GH}(X, Y) \le d_H(X, Y)$. *В частности, если* Y *— некоторая* ε*-сеть в* X, *то* $d_{GH}(X, Y) \le \varepsilon$.

Для вычисления расстояния Громова–Хаусдорфа удобно воспользоваться техникой соответствий.

Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Напомним, что *отношением* между множествами X и Y называется каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$. Множество всех **непустых** отношений между X и Y обозначим через $\mathcal{P}(X, Y)$. Будем смотреть на каждое отношение $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ как на многозначное отображение, которое может иметь область определения меньшую, чем X. Тогда, по аналогии с тем, как это принято для отображений, для каждого $x \in X$ и каждого $A \subset X$ определены их образы $\sigma(x)$ и $\sigma(A)$, а для каждого $y \in Y$ и каждого $B \subset Y$ — их прообразы $\sigma^{-1}(y)$ и $\sigma^{-1}(B)$.

Отношение $R \in \mathcal{P}(X, Y)$ называется *соответствием*, если ограничения на R канонических проекций $\pi_X \colon (x, y) \mapsto x$ и $\pi_Y \colon (x, y) \mapsto y$ сюръективны. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X, Y)$.

Пусть X и Y — произвольные метрические пространства. *Искажением* $\operatorname{dis}\sigma$ *отношения* $\sigma \in \mathcal{P}(X, Y)$ назовем число

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Big\{\big||xx'| - |yy'|\big| : (x, y), (x', y') \in \sigma\Big\}.$$

Предложение 1.3 ([2]). *Для любых метрических пространств* X *и* Y *имеем*

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\big\}.$$

Используя соответствия, легко доказываются следующие хорошо известные факты. Для произвольного метрического пространства X и числа $\lambda > 0$ обозначим через λX метрическое пространство, которое отличается от X умножением всех расстояний на λ.

Предложение 1.4 ([2]). *Пусть* X *и* Y *— метрические пространства. Тогда*

(1) *если* X *— одноточечное метрическое пространство, то* $d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\operatorname{diam} Y$;

(2) *если* $\operatorname{diam} X < \infty$, *то*

$$d_{GH}(X, Y) \ge \frac{1}{2}|\operatorname{diam} X - \operatorname{diam} Y|;$$

(3) $d_{GH}(X,Y) \leq \frac{1}{2}\max\{\operatorname{diam} X, \operatorname{diam} Y\}$, *в частности, для ограниченных* X *и* Y *имеем* $d_{GH}(X,Y) < \infty$;

(4) *для любого* $X \in \mathcal{M}$ *и любых* $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ *имеем* $d_{GH}(\lambda X, \mu X) = \frac{1}{2}|\lambda - \mu| \operatorname{diam} X$, *откуда мгновенно вытекает, что кривая* $\gamma(t) := t\,X$ *является кратчайшей между любыми своими точками*;

(5) *для любых* $X, Y \in \mathcal{M}$ *и любого* $\lambda > 0$ *имеем* $d_{GH}(\lambda X, \lambda Y) = \lambda d_{GH}(X,Y)$. *Более того, при* $\lambda \neq 1$ *единственным пространством, которое при такой операции не меняется, является одноточечное пространство. Иными словами, операция умножения метрики на число* $\lambda > 0$ *является гомотетией пространства* $\mathcal{M}$ *с центром в одноточечном метрическом пространстве.*

Таким образом, пространство Громова–Хаусдорфа представляет собой конус с центром в одноточечном пространстве, образующие которого — геодезические лучи, см. рис. 1.

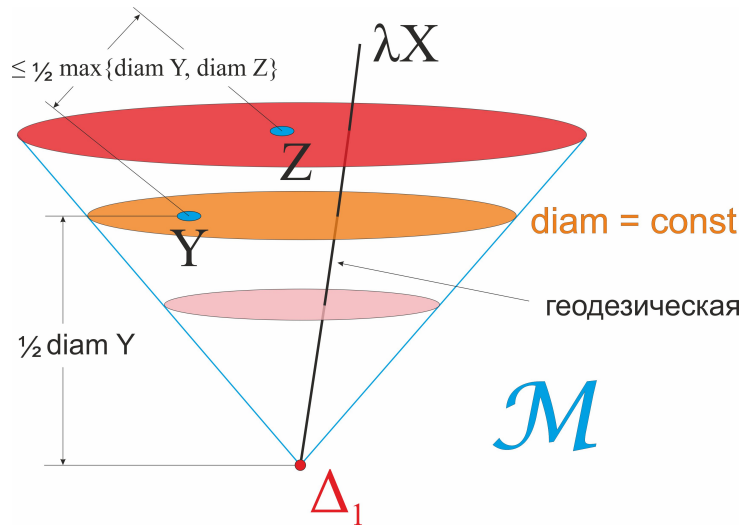

Рис. 1: Пространство Громова–Хаусдорфа: общие свойства.

1.2 Неприводимые соответствия

Если X и Y — конечные метрические пространства, то множество $\mathcal{R}(X,Y)$ конечно, поэтому существует $R \in \mathcal{R}(X,Y)$, для которого $d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\operatorname{dis} R$. Каждое такое соответствие R назовем *оптимальным*. Отметим, что оптимальные соответствия существуют и для любых метрических компактов X и Y, см. [5] и [6]. Множество всех оптимальных соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y)$. Таким образом, имеет место следующий результат.

Предложение 1.5 ([5], [6]). *Пусть* X *и* Y *— компактные метрические пространства. Тогда* $\mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(X,Y) \neq \emptyset$.

Отношение включения задает на $\mathcal{R}(X,Y)$ частичный порядок: $R_1 \le R_2$, если и только если $R_1 \subset R_2$. Минимальные в этом порядке соответствия назовем *неприводимыми*. Множество всех неприводимых соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}^0(X,Y)$. В [7] показано, что каждое $R \in \mathcal{R}(X,Y)$ содержит некоторое неприводимое соответствие, тем самым, имеет место следующий результат.

Предложение 1.6. *Для любых метрических пространств X и Y имеем $\mathcal{R}^0(X,Y) \ne \emptyset$.*

Следующий результат описывает, как выглядят неприводимые соответствия.

Предложение 1.7. *Для каждого $R \in \mathcal{R}^0(X,Y)$ существуют разбиения $R_X = \{X_i\}_{i\in I}$ и $R_Y = \{Y_i\}_{i\in I}$ пространств X и Y такие, что $R = \cup_{i\in I} X_i \times Y_i$.*

Доказательство. Положим $R_X = \cup_{y\in Y}\{R^{-1}(y)\}$, $R_Y = \cup_{x\in X}\{R(x)\}$ и покажем, что R_X и R_Y являются разбиениями. Предположим противное, и пусть, скажем, R_Y, не является разбиением. Так как R — соответствие, то R_Y — покрытие Y, в котором некоторые элементы $R(x)$ и $R(x')$ при $x \ne x'$ пересекаются, но не совпадают. Пусть $y \in R(x) \cap R(x')$, тогда $(x,y),(x',y) \in R$. Так как $R(x) \ne R(x')$, в одном из этих множеств есть элемент, не содержащийся в другом. Пусть, для определенности, $y' \in R(x') \setminus R(x)$. Тогда $(x',y') \in R$, поэтому если мы выкинем из соответствия R элемент (x',y), то в полученном отношении σ будет $y \in \sigma(x)$ и $x' \in \sigma^{-1}(y')$, так что σ — соответствие. Последнее противоречит неприводимости R.

Итак, запишем разбиение R_X в виде $\{X_i\}_{i\in I}$. Заметим, что для любых $x,x' \in X_i$ имеем $R(x) = R(x')$. Действительно, если $X_i = R^{-1}(y)$, то $R(x)$ и $R(x')$ содержат y и, поэтому, пересекаются. Но R_Y — разбиение, откуда и следует $R(x) = R(x')$.

Выберем произвольные $i \in I$, $x \in X_i$ и положим $Y_i = R(x)$. Тогда, в силу сказанного выше, это определение корректно (не зависит от выбора x). Покажем, что соответствие $\varphi\colon X_i \mapsto Y_i$ является биекцией между R_X и R_Y.

Если φ не инъективно, то существуют $x,x' \in X$, лежащие в разных элементах разбиения R_X, для которых $R(x) = R(x')$. Но тогда для $y \in R(x)$ выполняется $x,x' \in R^{-1}(y) \in R_X$, противоречие.

Наконец, φ — сюръективно, так как для любого Y_i, $y \in Y_i$, множество $R^{-1}(y)$ является элементом разбиения R_X. Выберем произвольный $x \in R^{-1}(y)$. Но тогда $R(x) \in R_Y$ содержит y, поэтому $\varphi\bigl(R^{-1}(y)\bigr) = Y_i$.

Так как для любых $x,x' \in X_i$ имеем $R(x) = R(x') = Y_i$, то $X_i \times Y_i \subset R$. С другой стороны, так как R_X — разбиение X, то для любого $x \in X$ существует $X_i \in R_X$ такое, что $x \in X_i$, поэтому каждый $(x,y) \in R$ содержится в некотором $X_i \times Y_i$. $\square$

1.3 Разбиения

Для любых непустых подмножеств A и B метрического пространства X положим

$$|AB|' = \sup\bigl\{|ab| : a \in A,\, b \in B\bigr\}.$$

Если $D = \{X_i\}_{i\in I}$ — разбиение метрического пространства X, то определим *диаметр этого разбиения* так: $\operatorname{diam} D = \sup_{i\in I} \operatorname{diam} X_i$. Положим также

$$\alpha(D) = \inf\bigl\{|X_iX_j| : i,j \in I,\, i \ne j\bigr\}, \quad \beta(D) = \sup\bigl\{|X_iX_j|' : i,j \in I,\, i \ne j\bigr\}.$$

Следующий результат легко выводится из определения искажения, а также из предложения 1.7.

Предложение 1.8. *Пусть X и Y — произвольные метрические пространства, $D_X = \{X_i\}_{i\in I}$, $D_Y = \{Y_i\}_{i\in I}$ — некоторые разбиения пространств X и Y соответственно, $R = \cup_{i\in I} X_i \times Y_i \in \mathcal{R}(X,Y)$. Тогда*

$$\begin{aligned}\operatorname{dis} R &= \sup\bigl\{|X_iX_j|' - |Y_iY_j|,\ |Y_iY_j|' - |X_iX_j| : i,j \in I\bigr\} = \\ &= \sup\bigl\{\operatorname{diam} D_X,\ \operatorname{diam} D_Y,\ |X_iX_j|' - |Y_iY_j|,\ |Y_iY_j|' - |X_iX_j| : i,j \in I,\ i \neq j\bigr\} \leq \\ &\leq \max\bigl\{\operatorname{diam} D_X, \operatorname{diam} D_Y, \beta(D_X) - \alpha(D_Y), \beta(D_Y) - \alpha(D_X)\bigr\}.\end{aligned}$$

В частности, если $R \in \mathcal{R}^0(X,Y)$, то в предыдущей формуле можно в качестве D_X и D_Y взять R_X и R_Y, определенные в предложении 1.7.

Для множества X и любого $n \in \mathbb{N}$ через $\mathcal{D}_n(X)$ обозначим семейство всевозможных разбиений множества X на n его непустых подмножеств. Отметим, что для $n > \#X$ имеем $\mathcal{D}_n(X) = \emptyset$, а для $n = \#X$ семейство $\mathcal{D}_n(X)$ состоит из всех одноэлементных подмножеств.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Следующая характеристика X будет использована нами ниже при доказательстве основных результатов:

$$d_n(X) = \begin{cases} \inf\bigl\{\operatorname{diam} D : D \in \mathcal{D}_n(X)\bigr\}, & \text{если } \mathcal{D}_n(X) \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{если } \mathcal{D}_n(X) = \emptyset. \end{cases}$$

Замечание 1.9. Если X — конечное метрическое пространство и $n = \#X$, то $d_n(X) = 0$.

Замечание 1.10. Функция $g(n) = d_n(X)$ монотонно убывает на множестве тех n, при которых $\mathcal{D}_n(X) \neq \emptyset$.

1.4 Оптимальные неприводимые соответствия

В [7] доказано, что для компактных метрических пространств X и Y всегда существует неприводимое оптимальное соответствие R. Множество неприводимых оптимальных соответствий обозначим через $\mathcal{R}^0_{\mathrm{opt}}(X,Y)$. Таким образом, имеет место следующий результат.

Предложение 1.11 ([7]). *Пусть X и Y — произвольные компактные метрические пространства, тогда $\mathcal{R}^0_{\mathrm{opt}}(X,Y) \neq \emptyset$.*

Следствие 1.12. *Пусть X и Y — произвольные компактные метрические пространства, $R \in \mathcal{R}^0_{\mathrm{opt}}(X,Y)$, $R_X = \{X_i\}_{i\in I}$, $R_Y = \{Y_i\}_{i\in I}$, $R = \cup_{i\in I} X_i \times Y_i$. Тогда*

$$2d_{GH}(X,Y) = \sup\bigl\{\operatorname{diam} R_X,\ \operatorname{diam} R_Y,\ |X_iX_j|' - |Y_iY_j|,\ |Y_iY_j|' - |X_iX_j| : i,j \in I,\ i \neq j\bigr\}.$$

1.5 Расстояния до симплексов

Метрическое пространство X назовем *симплексом*, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Заметим, что симплекс X компактен, если и только если он конечен. Симплекс, имеющий n точек, расстояния между которыми равны 1, обозначим через Δ_n. Тогда при $t > 0$ пространство $t\,\Delta_n$ является симплексом, в котором все ненулевые расстояния равны t. Отметим, что Δ_1 — одноточечное метрическое пространство, причем $t\,\Delta_1 = \Delta_1$ при всех $t > 0$. В дальнейшем, для удобства, будем считать, что $\Delta_n = \{1, \ldots, n\}$.

Для произвольного метрического пространства X, $n \leq \#X$, и $D = \{X_1, \ldots, X_n\} \in \mathcal{D}_n(X)$ положим $R_D = \sqcup\bigl(\{i\} \times X_i\bigr) \in \mathcal{R}(t\,\Delta_n, X)$. Отметим, что если $D' \in \mathcal{D}_n(X)$ отличается от D на перенумерацию элементов разбиения, то $\operatorname{dis} R_D = \operatorname{dis} R_{D'}$.

Предложение 1.13 ([8]). *Пусть X — произвольное метрическое пространство и $n \in \mathbb{N}$, $n \le \#X$. Тогда для любых $t > 0$ и $D \in \mathcal{D}_n(X)$ имеем*

$$\operatorname{dis} R_D = \max\{\operatorname{diam} D,\, t - \alpha(D),\, \beta(D) - t\}.$$

Предложение 1.14 ([8]). *Пусть X — компактное метрическое пространство. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$, $n \le \#X$, и $t > 0$ найдется $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(t\,\Delta_n, X)$ такое, что семейство $\{R(i)\}$ — разбиение множества X. В частности, если $n = \#X$, то в качестве оптимального соответствия R можно выбрать некоторую биекцию.*

Из предложений 1.13 и 1.14 вытекает следующий результат.

Следствие 1.15. *Пусть X — компактное метрическое пространство и $n \in \mathbb{N}$, $n \le \#X$. Тогда для любого $t > 0$ имеем*

$$2d_{GH}(t\,\Delta_n, X) = \inf\Big\{\max\big(\operatorname{diam} D,\, t - \alpha(D),\, \beta(D) - t\big) : D \in \mathcal{D}_n(X)\Big\}.$$

Предложение 1.16 ([8]). *Пусть X — конечное метрическое пространство, $m = \#X$, $n \in \mathbb{N}$, $t > 0$. Обозначим через $a \le b$ два наименьших расстояния между разными точками пространства X (если они определены). Тогда*

$$2d_{GH}(t\,\Delta_n, X) = \begin{cases} \max\{t,\, \operatorname{diam} X - t\} & \text{при } m < n, \\ \max\{t - a,\, \operatorname{diam} X - t\} & \text{при } m = n \ge 2, \\ \max\{a,\, t - b,\, \operatorname{diam} X - t\} & \text{при } m = n + 1 \ge 3, \\ \max\{d_n(X),\, \operatorname{diam} X - t\} & \text{при } m \ge n \text{ и } \operatorname{diam} X \ge 2t. \end{cases}$$

Более того, при $m = n+1$, оптимальным является соответствие, которое отправляет один из элементов симплекса в пару самых близких точек пространства X, а между оставшимися элементами устанавливает биекцию.

Из предложения 1.16 вытекает явная формула для расстояния между симплексами.

Следствие 1.17. *Для натуральных $p, q \ge 2$ и вещественных $t, s > 0$ имеем*

$$2d_{GH}(t\,\Delta_p, s\,\Delta_q) = \begin{cases} |t - s| & \text{при } p = q, \\ \max\{t, s - t\} & \text{при } p > q, \\ \max\{s, t - s\} & \text{при } p < q. \end{cases}$$

В частности, если $p \ne q$, то $2d_{GH}(t\,\Delta_p, s\,\Delta_q) \ge \min\{t, s\}$.

Предложение 1.18. *Пусть X — метрическое пространство, содержащее подпространство, изометричное $t\,\Delta_n$, $n \ge 2$, и M — конечное метрическое пространство, $\#M \le n - 1$. Тогда $2d_{GH}(X, M) \ge t$. Если при этом $\operatorname{diam} X = t$ и $\operatorname{diam} M \le t$, то $2d_{GH}(X, M) = t$.*

Доказательство. Действительно, обозначим через $C = \{c_1, \dots, c_n\}$ подпространство в X, изометричное $t\,\Delta_n$, тогда для любого $R \in \mathcal{R}(X, M)$ существует $p \in M$ и различные c_i, c_j такие, что (c_i, p), $(c_j, p) \in R$, откуда $\operatorname{dis} R \ge t$. В силу произвольности R заключаем, что $d_{GH}(X, M) \ge t$. Если при этом $\operatorname{diam} X = t$ и $\operatorname{diam} M \le t$, то из пункта (3) предложения 1.4 вытекает, что $2d_{GH}(X, M) \le t$. □

2 Изометрии метрических пространств

В данном разделе мы приведем ряд утверждений, позволяющих описывать изометрии метрических пространств. Особый интерес представляют изометрии пространств на себя.

2.1 Операции с инвариантными подмножествами

Пусть X — метрическое пространство и $f\colon X \to X$ — некоторая изометрия. Обозначим через $\mathcal{P}^f(X)$ семейство всех подмножеств X, инвариантных относительно f, а именно, $\mathcal{P}^f(X) = \big\{A \subset X : f(A) = A\big\}$. Следующее утверждение очевидно.

Предложение 2.1. *Семейство $\mathcal{P}^f(X)$ содержит X, $\emptyset$, а также инвариантно относительно операций объединения, пересечения и дополнения. Кроме того, если $A \in \mathcal{P}^f(X)$, то для любого $r > 0$ выполняется $U_r(A) \in \mathcal{P}^f(X)$, а для любого $r \geq 0$ имеем $B_r(A), S_r(A) \in \mathcal{P}^f(X)$.*

2.2 Изометрии и конечные пунктированные подмножества

Множество X называется *пунктированным*, если в нем выделен некоторый элемент. Более формально, пунктированное множество — это пара (X, x), где $x \in X$. Для пунктированного множества X выделенную в нем точку x будем также обозначать через $p(X)$. Два пунктированных метрических пространства X и Y назовем *p-изометричными*, если существует изометрия $f\colon X \to Y$ такая, что $p(Y) = f\big(p(X)\big)$. Для пунктированного метрического пространства X обозначим через $\mathrm{Gr}(X)$ класс пунктированных метрических пространств, p-изометричных X. Множество классов p-изометричных пунктированных метрических компактов обозначим через $\mathcal{M}_*$. Таким образом, если X — пунктированный метрический компакт, то $\mathrm{Gr}(X) \in \mathcal{M}_*$.

Пусть X — произвольное метрическое пространство и $x \in X$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через $\mathcal{P}_n(x)$ множество всех пунктированных n-точечных подпространств $Z \subset X$, содержащих x, в которых $p(Z) = x$. Определим также $\mathcal{M}_*(X, x, n) \subset \mathcal{M}_*$, положив его равным $\mathrm{Gr}\big(\mathcal{P}_n(x)\big)$. Следующее утверждение очевидно.

Предложение 2.2. *Пусть $f\colon X \to Y$ — изометрия метрических пространств, тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ и любой точки $x \in X$ имеем $\mathcal{M}_*(X, x, n) = \mathcal{M}_*\big(Y, f(x), n\big)$. В частности, каждая изометрия $f\colon X \to X$ инвариантна на множествах уровня отображения $x \mapsto \mathcal{M}_*(X, x, n)$.*

Тройку $\{A, B, C\}$ различных точек произвольного метрического пространства X будем называть *треугольником ABC* и писать $ABC \subset X$. К таким тройкам будем применять привычную школьную терминологию, относящуюся к треугольникам.

Предложение 2.3. *Пусть P и Q — различные точки метрического пространства X. Предположим, что в каждом треугольнике $PBC \subset X$ сторона BC не может быть самой длинной, а среди треугольников $QBC \subset X$ имеется такой, в котором сторона BC — самая длинная. Тогда $\mathcal{M}_*(X, P, 3) \neq \mathcal{M}_*(X, Q, 3)$.*

2.3 Семейства равноудаленных точек

Для произвольных точек P и Q метрического пространства X обозначим через $\mathrm{Mid}(X, P, Q)$ множество всех точек $A \in X$ таких, что $|AP| = |AQ|$.

Следующее утверждение очевидно.

Предложение 2.4. *Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольная изометрия метрических пространств, тогда для любых $P, Q \in X$ выполняется $f\big(\mathrm{Mid}(X,P,Q)\big) = \mathrm{Mid}\big(Y, f(P), f(Q)\big)$. В частности, каждая изометрия $f\colon X \to X$, оставляющая на месте точки $P, Q \subset X$, переводит $\mathrm{Mid}(X,P,Q)$ в себя.*

3 Инвариантность подпространств в $\mathcal{M}$

Ряд идей доказательства инвариантности тех или иных подпространств в $\mathcal{M}$ при изометрии пространства $\mathcal{M}$ на себя взяты из [1].

3.1 Инвариантность Δ_1

Теорема 3.1. *Для любого $A \in \mathcal{M}$, отличного от симплекса Δ_1, выполняется*

$$\mathcal{M}_*(\mathcal{M}, A, 3) \neq \mathcal{M}_*(\mathcal{M},\, \Delta_1, 3).$$

Доказательство. В силу пунктов (1) и (3) предложения 1.4, для любых $B, C \in \mathcal{M}$ имеем

$$d_{GH}(B,C) \leq \max\big\{d_{GH}(B,\Delta_1),\, d_{GH}(\Delta_1,C)\big\},$$

поэтому если $X = \Delta_1$, то в каждом треугольнике $XBC \subset \mathcal{M}$ сторона BC не может быть самой длинной.

Если же $A \in \mathcal{M}$, $A \neq \Delta_1$, то, в силу пункта (4) предложения 1.4, кривая $\gamma(t) = t\,A$, $t \in [1/2, 2]$, — кратчайшая, для которой A — внутренняя точка. Поэтому, в силу теоремы 1.1, для $B = \gamma(1/2)$ и $C = \gamma(2)$ имеем $d_{GH}(B,C) = d_{GH}(B,A) + d_{GH}(A,C)$, следовательно, в таком треугольнике ABC сторона BC — самая длинная. Осталось воспользоваться предложением 2.3. □

Из теоремы 3.1, предложения 2.2 и пункта (1) предложения 1.4 мгновенно получается следующий результат.

Следствие 3.2. *Пусть $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — произвольная изометрия, тогда $f(\Delta_1) = \Delta_1$. В частности, для любого $X \in \mathcal{M}$ имеем $\operatorname{diam} f(X) = \operatorname{diam} X$.*

3.2 Инвариантность $t\,\Delta_n$, $n \geq 2$

Обозначим через $\mathcal{M}^t$ множество всех $A \in \mathcal{M}$ таких, что $\operatorname{diam} A \leq t$. Иными словами, $\mathcal{M}^t$ — шар в $\mathcal{M}$ радиуса $t/2$ с центром в Δ_1.

Теорема 3.3. *Для $t > 0$ и любого $A \in \mathcal{M}^t$, отличного от симплекса $t\,\Delta_n$, $n = 1, 2, \ldots$, выполняется*

$$\mathcal{M}_*(\mathcal{M}^t, A, 3) \neq \mathcal{M}_*(\mathcal{M}^t, t\,\Delta_n, 3).$$

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 3.1, (1) мы выясним, что в каждом треугольнике $XBC \subset \mathcal{M}^t$, где $X = t\Delta_n$, сторона BC не может быть длиннее оставшихся двух сторон; (2) мы покажем, что для каждого $A \in \mathcal{M}^t$, отличного от всех симплексов вида $t\Delta_n$, существует треугольник $ABC \subset \mathcal{M}^t$, в котором сторона BC длиннее двух оставшихся сторон; после этого нам лишь останется применить предложение 2.3.

(1) Так как случай $X = t\,\Delta_1 = \Delta_1$ был фактически рассмотрен в доказательстве теоремы 3.1, будем считать, что $n > 1$.

Предположим противное, т.е. что при некотором n в некотором треугольнике $XBC \subset \mathcal{M}^t$ сторона BC — самая длинная. Так как, по пункту (3) предложения 1.4, имеем $2d_{GH}(B,C) \le t$, то $2d_{GH}(X,B) < t$ и $2d_{GH}(X,C) < t$.

Лемма 3.4. *В сделанных предположениях, имеем $\#B \ge n$ и $\#C \ge n$.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть, скажем, $\#B < n$, тогда, по предложению 1.16, имеем $2d_{GH}(X,B) = \max\{t, \operatorname{diam} B - t\} = t$, но $2d_{GH}(X,B) < t$, противоречие. □

Далее, по предложению 1.14 существуют $R \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(t\,\Delta_n, B)$ и $S \in \mathcal{R}_{\mathrm{opt}}(t\,\Delta_n, C)$ такие, что $D = \{R(i)\}$ и $E = \{S(i)\}$ являются разбиениями пространств B и C соответственно. Положим $B_i = R(i)$, $C_i = S(i)$, $T = \cup_{i=1}^n B_i \times C_i$, тогда $T \in \mathcal{R}(B,C)$ и, в силу предложения 1.8, имеем

$$\operatorname{dis} T \le \max\bigl\{\operatorname{diam} D, \operatorname{diam} E, \beta(D) - \alpha(E), \beta(E) - \alpha(D)\bigr\}.$$

По предложению 1.13, имеем

$$\operatorname{dis} R = \max\{\operatorname{diam} D,\, t - \alpha(D),\, \beta(D) - t\}, \quad \operatorname{dis} S = \max\{\operatorname{diam} E,\, t - \alpha(E),\, \beta(E) - t\},$$

поэтому $\max\{\operatorname{diam} D,\, t - \alpha(D)\} \le \operatorname{dis} R$ и $\max\{\operatorname{diam} E,\, t - \alpha(E)\} \le \operatorname{dis} S$. Так как $\operatorname{diam} B \le t$ и $\operatorname{diam} C \le t$, то $\beta(D) \le t$ и $\beta(E) \le t$, откуда

$$\begin{aligned} 2d_{GH}(B,C) \le \operatorname{dis} T \le \max\bigl\{\operatorname{diam} D, \operatorname{diam} E, t - \alpha(E), t - \alpha(D)\bigr\} \le \\ \le \max\{\operatorname{dis} R,\, \operatorname{dis} S\} = \max\bigl\{2d_{GH}(X,B),\, 2d_{GH}(X,C)\bigr\}, \end{aligned}$$

поэтому BC не может быть самой длинной стороной в треугольнике XBC, противоречие.

(2) Если $\operatorname{diam} A < t$, то, в силу пункта (4) предложения 1.4, кривая $\gamma(s) = s\,A$, $s \in [1/2, t/\operatorname{diam} A]$, — кратчайшая, лежащая в $\mathcal{M}^t$, так как $\operatorname{diam} \gamma(s) \le (t/\operatorname{diam} A)\operatorname{diam} A = t$. Кроме того, A — внутренняя точка кривой γ. Поэтому, в силу теоремы 1.1, для $B = \gamma(1/2)$ и $C = \gamma(t/\operatorname{diam} A)$ имеем $d_{GH}(B,C) = d_{GH}(B,A) + d_{GH}(A,C)$, следовательно, в таком треугольнике ABC сторона BC — самая длинная.

Пусть теперь $\operatorname{diam} A = t$, тогда $|xx'| \le t$ при всех $x, x' \in A$, причем для некоторой пары точек выполняется равенство, а для некоторой — строгое неравенство. В частности, $\#A \ge 3$.

Пусть сначала A — конечное метрическое пространство, состоящее из $m \ge 3$ элементов, и $a \le b$ — два наименьших расстояния между разными точками пространства A. Положим $B = t\,\Delta_m$ и $C = t\,\Delta_{m-1}$. Тогда из предложения 1.16 заключаем, что $2d_{GH}(B,C) = t$, а $2d_{GH}(A,C) = \max\{a, t - b, \operatorname{diam} A - t\}$. Так как $a < t$ как наименьшее ненулевое расстояние в A, $b > 0$ и $\operatorname{diam} A \le t$, то $2d_{GH}(A,C) < t$.

Далее, из предложения 1.16 получаем, что $2d_{GH}(A,B) = \max\{t - a, \operatorname{diam} A - t\}$. Так как $a > 0$ и $\operatorname{diam} A = t$, то $2d_{GH}(A,B) < t$. Итак, в рассматриваемом случае

$$2\max\bigl\{d_{GH}(A,B),\, d_{GH}(A,C)\bigr\} < t = 2d_{GH}(B,C),$$

так что BC — самая длинная сторона треугольника ABC.

Пусть теперь A бесконечно. Фиксируем произвольное $\varepsilon \in (0, t/4)$, выберем в A конечную ε-сеть $\{b_1, \dots, b_{m-1}\}$ и возьмем ее в качестве B. Тогда, в силу предложения 1.2, имеем $d_{GH}(A,B) \le \varepsilon < t/4$.

Пусть $b_m \in A$ — произвольная точка, отличная от выбранных b_i. Положим $A_i = B_\varepsilon(b_i)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда $A = \cup_{i=1}^m A_i$ и $\operatorname{diam} A_i < t/2$ при всех i.

В качестве C возьмем множество $\{c_1, \dots, c_{2m}\}$ и зададим на нем расстояния следующим образом: $|c_i c_j| = t$ для всех $1 \le i < j \le m$, а все остальные расстояния между разными точками положим равными $t/2$. Так как подпространство $\{c_1, \dots, c_m\} \subset C$ изометрично $t\,\Delta_m$, а диаметры B и C не превосходят t, то, в силу предложения 1.18, имеем $2d_{GH}(B, C) = t$.

Рассмотрим следующее соответствие $R \in \mathcal{R}(A, C)$:

$$R = \{(b_i, c_i)\}_{i=1}^m \cup \big(A_1 \times \{c_{m+1}\}\big) \cup \dots \cup \big(A_m \times \{c_{2m}\}\big).$$

Легко видеть, что $\operatorname{dis} R < t$, поэтому $2d_{GH}(A, C) < t$, следовательно, BC — самая длинная сторона треугольника ABC. □

Следствие 3.5. *Пусть $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — произвольная изометрия, тогда при каждом натуральном $n \ge 2$ и вещественном $t > 0$ имеем $f(t\,\Delta_n) = t\,\Delta_n$.*

Доказательство. Из предложения 2.2 вытекает, что каждая изометрия пространства $\mathcal{M}$ переводит в себя семейство $\{t\,\Delta_n\}_{n=1}^\infty$, т.е. для каждого натурального $n \ge 2$ существует $m \ge 2$ такое, что $f(t\,\Delta_n) = t\,\Delta_m$. Мы должны показать, что $m = n$. Для этого мы докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 3.6. *Пусть для некоторых $p, q \ge 2$ и $t > 0$ выполняется $f(t\,\Delta_p) = t\,\Delta_q$, тогда $f(s\,\Delta_p) = s\,\Delta_q$ при всех $s > 0$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что для некоторого $s > 0$ выполняется $f(s\,\Delta_p) = s\,\Delta_r$, $r \ne q$. В силу следствия 1.17 и изометричности f, имеем

$$|t - s| = 2d_{GH}(t\,\Delta_p, s\,\Delta_p) = 2d_{GH}\big(f(t\,\Delta_p), f(s\,\Delta_p)\big) = 2d_{GH}(t\,\Delta_q, s\,\Delta_r) \ge \min\{t, s\},$$

что не выполняется при $s \in (t - t/2, t + t/2)$. Отсюда вытекает, что функция $t \mapsto q$ является локально постоянной. В силу связности луча, заключаем, что эта функция постоянна. □

Лемма 3.7. *Пусть для некоторых $p, q \ge 2$ выполняется $f(\Delta_p) = \Delta_q$. Тогда для каждого $i < p$, $f(\Delta_i) = \Delta_j$, выполняется $j < q$.*

Доказательство. Действительно, предположим противное, т.е. что $j > q$ (условие $j = q$ не реализуется в силу биективности f). Тогда, по следствию 1.17 и лемме 3.6, для произвольных $t, s > 0$ имеем

$$\max\{t, s - t\} = 2d_{GH}(t\,\Delta_p, s\,\Delta_i) = 2d_{GH}\big(f(t\,\Delta_p), f(s\,\Delta_i)\big) = 2d_{GH}(t\,\Delta_q, s\,\Delta_j) = \max\{s, t - s\}.$$

Положив $s = t/3$, получим противоречие. □

Вернемся к доказательству того, что $m = n$. Предположим противное. Без ограничения общности будем считать, что $m < n$ (иначе рассмотрим f^{-1}). Но тогда симплексы Δ_i, $1 < i < n$, будут переводиться отображением f в симплексы Δ_j, $1 < j < m$, причем разным i должны соответствовать разные j, противоречие. □

Фактически, мы показали, что единственными “угловыми” точками шара с центром в одноточечном метрическом пространстве является само это одноточечное пространство, а также лежащие на сфере симплексы, см. рис. 2.

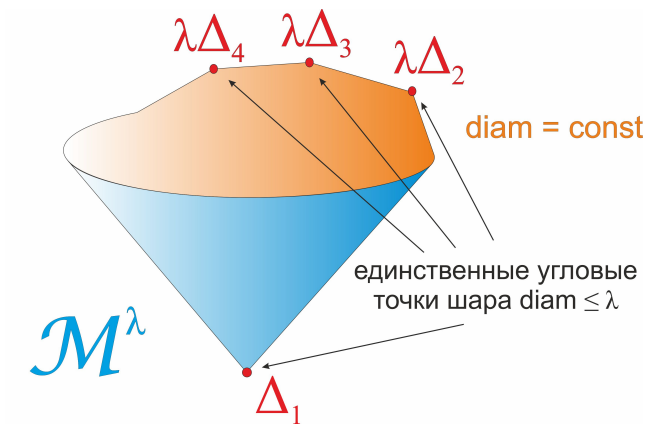

Рис. 2: “Угловые” точки шара в пространстве Громова–Хаусдорфа с центром в одноточечном пространстве.

3.3 Инвариантность семейства конечных пространств

Для натурального $n \geq 2$ и вещественного $t > 0$ положим (см. рис. 3)

$$\mathcal{B}_n(t) = \mathrm{Mid}(\mathcal{M}, \Delta_1, t\,\Delta_n) \cap \{B \in \mathcal{M} : \operatorname{diam} B \geq 2t\}.$$

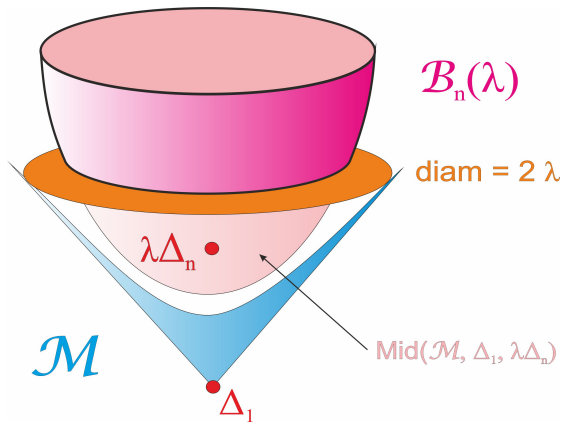

Рис. 3: Иллюстрация $\mathcal{B}_n(t)$.

Предложение 3.8. *Для каждого натурального $n \geq 2$ и вещественного $t > 0$ имеют место следующие утверждения*:

(1) *пусть $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — произвольная изометрия, тогда $f\big(\mathcal{B}_n(t)\big) = \mathcal{B}_n(t)$;*

(2) *для каждого вещественного $s \geq 2t$ и натурального $m > n$ имеем $s\,\Delta_m \in \mathcal{B}_n(t)$, в частности, $\mathcal{B}_n(t) \neq \emptyset$;*

(3) *для любого $B \in \mathcal{B}_n(t)$ имеем $\#B > n$;*

(4) *для любого $B \in \mathcal{B}_n(t)$ имеем $d_n(B) = \operatorname{diam} B$.*

Доказательство. (1) Это мгновенно вытекает из предложения 2.4, следствия 3.2 и следствия 3.5.

(2) Действительно, в силу следствия 1.17 и пункта (1) предложения 1.4, получаем

$$2d_{GH}(t\,\Delta_n, s\,\Delta_m) = \max\{s, t-s\} = s = \operatorname{diam}(s\,\Delta_m) = 2d_{GH}(\Delta_1, s\,\Delta_m).$$

(3) Предположим противное, т.е. что $\#B \leq n$. Обозначим через a наименьшее расстояние между различными точками в B. Тогда, в силу предложения 1.16 и определения $\mathcal{B}_n(t)$, имеем

$$\begin{aligned} 2d_{GH}(t\,\Delta_n, B) &= \max\{t, \operatorname{diam} B - t\} = \operatorname{diam} B - t && \text{при } \#B < n,\\ 2d_{GH}(t\,\Delta_n, B) &= \max\bigl\{t-a,\, \operatorname{diam} B - t\bigr\} = \operatorname{diam} B - t && \text{при } \#B = n. \end{aligned}$$

Но $2d_{GH}(t\,\Delta_n, B) = 2d_{GH}(\Delta_1, B) = \operatorname{diam} B$, противоречие.

(4) Так как, по пункту (3), $\#B > n$, а также $\operatorname{diam} B \geq 2t$, применимо предложение 1.16, в силу которого

$$\operatorname{diam} B = 2d_{GH}(t\,\Delta_n, B) = \max\bigl\{d_n(B),\, \operatorname{diam} B - t\bigr\},$$

откуда $d_n(B) = \operatorname{diam} B$. □

Для натурального $n \geq 2$ и вещественного $t > 0$ положим

$$\mathcal{F}_n(t) = \bigl\{A \in \mathcal{M} : \operatorname{diam} A = t \;\&\; 2d_{GH}(A, B) = 2d_{GH}(\Delta_1, B) = \operatorname{diam} B \text{ для всех } B \in \mathcal{B}_n(t)\bigr\}.$$

Замечание 3.9. Множество $\mathcal{F}_n(t)$ включает симплекс $t\,\Delta_n$ диаметра t и состоит из всех таких A того же диаметра t, на которые можно заменить $t\,\Delta_n$ при определении $\mathcal{B}_n(t)$, см. рис. 4.

Предложение 3.10. *Множество $\mathcal{F}_n(t)$ инвариантно при каждой изометрии $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$.*

Доказательство. Для произвольного $r > 0$ положим $\mathcal{B}_n(t, r) = \mathcal{B}_n(t) \cap S_r(\Delta_1)$, тогда $\mathcal{B}_n(t, r)$ является f-инвариантным в силу пункта (1) предложения 3.8, следствия 3.2 и предложения 2.1. По предложению 2.1, эквидистанта $S_d\bigl(\mathcal{B}_n(t, r)\bigr)$ также является f-инвариантной при каждом $d \geq 0$. Осталось заметить, что $\mathcal{F}_n(t)$ равно пересечению f-инвариантных множеств $S_{t/2}(\Delta_1)$ и $S_{r/2}\bigl(\mathcal{B}_n(t, r)\bigr)$ по всем $r \geq 2t$ и снова применить предложение 2.1. □

Теорема 3.11. *Для натурального $n \geq 2$ и вещественного $t > 0$ множество $\mathcal{F}_n(t)$ совпадает с множеством всех не более чем n-точечных метрических пространств диаметра t.*

Доказательство. (1) Покажем, что каждое не более чем n-точечное метрическое пространство A диаметра t лежит в $\mathcal{F}_n(t)$. Для этого возьмем произвольное $B \in \mathcal{B}_n(t)$ и проверим, что $2d_{GH}(A, B) = \operatorname{diam} B$.

По предложению 1.11, существует $R \in \mathcal{R}^0_{\mathrm{opt}}(A, B)$. В силу предложения 1.7, семейство $R_B = \cup_{a \in A}\bigl\{R(a)\bigr\}$ — разбиение B, состоящее не более чем из n элементов, т.е. $R_B \in \mathcal{D}_m(B)$ для некоторого $m \leq n$. В силу замечания 1.10, $\operatorname{diam} R_B \geq d_m(B) \geq d_n(B)$. По следствию 1.12,

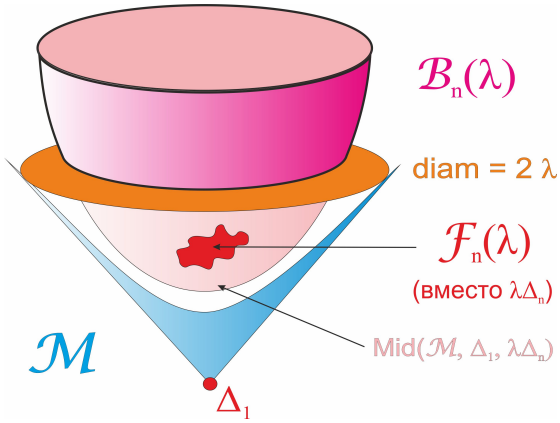

Рис. 4: Иллюстрация $\mathcal{F}_n(t)$.

имеем $2d_{GH}(A,B) \geq \operatorname{diam} R_B$, поэтому, учитывая пункт (4) предложения 3.8, заключаем, что $2d_{GH}(A,B) \geq d_n(B) = \operatorname{diam} B$. Так как $\operatorname{diam} A < \operatorname{diam} B$, то, в силу пункт (3) предложения 1.4, получаем

$$\operatorname{diam} B = \max\{\operatorname{diam} A, \operatorname{diam} B\} \geq 2d_{GH}(A,B) \geq \operatorname{diam} B,$$

поэтому $2d_{GH}(A,B) = \operatorname{diam} B$.

(2) Покажем теперь, что если $A \in \mathcal{F}_n(t)$, то $\#A \leq n$.

Предположим противное, т.е. что $\#A > n$. Положим $\varepsilon = t/3$ и выберем в A конечную ε-сеть $S = \{a_1, \ldots, a_m\}$, состоящую из $m \geq n+1$ точек. Положим $A_i = B_\varepsilon(a_i)$, тогда $\operatorname{diam} A_i \leq 2\varepsilon < t$ и $A = \cup_{i=1}^m A_i$.

Выберем произвольное $\mu \geq 2t$, положим $B = \{b_1, \ldots, b_{2m}\}$ и превратим B в метрическое пространство, положив $|b_i b_j| = \mu$ для $1 \leq i < j \leq m$, а все остальные расстояния между различными точками зададим равными $\mu/2$. Ясно, что $d_n(B) = \mu = \operatorname{diam} B \geq 2t$, поэтому, в силу предложения 1.16, имеем $2d_{GH}(t\,\Delta_n, B) = \max\bigl\{d_n(B), \operatorname{diam} B - t\bigr\} = \operatorname{diam} B$, так что $B \in \mathcal{B}_n(t)$.

Определим $R \in \mathcal{R}(A,B)$ следующим образом:

$$R = \{(a_i, b_i)\}_{i=1}^m \cup \bigl(A_1 \times \{b_{m+1}\}\bigr) \cup \cdots \cup \bigl(A_m \times \{b_{2m}\}\bigr),$$

тогда $2d_{GH}(A,B) \leq \operatorname{dis} R < \mu = \operatorname{diam} B$, противоречие. Таким образом, $\#A \leq n$. □

Следствие 3.12. *Каждая изометрия $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ переводит n-точечное метрическое пространство в n-точечное того же диаметра.*

Доказательство. По теореме 3.11, множество $\mathcal{F}_n(t)$ совпадает с семейством всех не более чем n-точечных метрических пространств диаметра $t > 0$. По предложению 3.10, множество $\mathcal{F}_n(t)$ является инвариантным для любой изометрии $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, поэтому каждое n-точечное метрическое пространство $A \in \mathcal{F}_n(t)$ переходит в не более чем n-точечное метрическое пространство $B = f(A)$. Предположим, что $\#B < n$. Так как f^{-1} также является изометрией пространства $\mathcal{M}$, то, в силу сказанного выше, имеем $\#A = \#f^{-1}(B) < n$, противоречие. □

4 Действия групп

Для дальнейшего нам понадобятся основы теории действия групп на топологических и метрических пространствах. Приведем ряд необходимых нам результатов.

Напомним, что если компактная группа G непрерывно действует на топологическом пространстве X, то все ее орбиты компактны. Действительно, если $\theta\colon G\times X\to X$ — отображение, задающее это действие, то θ непрерывно, а орбита $G(x)$ точки x имеет вид $\theta\bigl(G\times\{x\}\bigr)$ и, поэтому, компактна как непрерывный образ компакта. Семейство орбит действия группы G на множестве X обозначим через X/G.

Если X — метрическое пространство, а группа G компактна, то неотрицательная симметричная функция $(A,B)\mapsto|AB|$, $A,B\in X/G$, не равна нулю при $A\neq B$.

Предложение 4.1. *Если компактная группа G действует изометриями на метрическом пространстве X, то функция $(A,B)\mapsto|AB|$, определенная на парах точек из множества орбит X/G, является метрикой.*

Доказательство. Нам осталось проверить неравенство треугольника. Для любых $A,B,C\in X/G$, в силу компактности орбит, существуют $a\in A$, $b_1,b_2\in B$ и $c\in C$ такие, что $|ab_1|=|AB|$ и $|b_2c|=|BC|$. Так как b_1 и b_2 лежат в одной орбите, существует $g\in G$, для которого $g(b_1)=b_2$. Но $g\colon X\to X$ — изометрия, поэтому $\bigl|g(a)g(b_1)\bigr|=|AB|$. Но тогда $|AC|\le|g(a)c|\le\bigl|g(a)g(b_1)\bigr|+|b_2c|=|AB|+|BC|$. □

Определенная в предложении 4.1 метрика на множестве орбит X/G действия группы G называется *фактор-метрикой*. Именно такую метрику мы будем иметь в виду, говоря про метрическое пространство X/G.

Предложение 4.2. *Пусть конечная группа G действует изометриями на метрическом пространстве X. Тогда для каждой точки $x\in X$ выполняются следующие утверждения.*

(1) *Для любого $\varepsilon>0$ и любого g из стабилизатора G_x точки x имеем $g\bigl(B_\varepsilon(x)\bigr)=B_\varepsilon(x)$. Таким образом, при каждом $\varepsilon>0$ определено действие стабилизатора G_x точки $x\in X$ на окрестности $B_\varepsilon(x)$.*

(2) *Если $G\setminus G_x\neq\emptyset$, то существует $\varepsilon>0$ такое, что для всех $g\in G\setminus G_x$ выполняется $B_\varepsilon(x)\cap g\bigl(B_\varepsilon(x)\bigr)=\emptyset$, в частности, для каждой точки $y\in B_\varepsilon(x)$ ее стабилизатор G_y является подгруппой в G_x, а $G(y)\cap B_\varepsilon(x)=G_x(y)$.*

(3) *Существует $\varepsilon>0$ такое, что для любых $y_1,y_2\in B_\varepsilon(x)$ расстояние между орбитами $G(y_1)$ и $G(y_2)$ равно расстоянию между орбитами $G_x(y_1)$ и $G_x(y_2)$.*

Доказательство. (1) Так как для каждого $g\in G_x$ имеем $g(x)=x$, и g — изометрия, то $g\bigl(B_\varepsilon(x)\bigr)=B_\varepsilon(x)$ для любого ε.

(2) Положим $Z=\bigl\{g(x):g\in G\setminus G_x\bigr\}$, тогда $x\notin Z$ и Z — непустое конечное множество (так как $G\setminus G_x\neq\emptyset$), так что $r:=|xZ|>0$. Выберем произвольное $\varepsilon<r/2$, тогда для всех $g\in G\setminus G_x$ имеем $B_\varepsilon(x)\cap g\bigl(B_\varepsilon(x)\bigr)=\emptyset$. В частности, это доказывает, что ни один $g\in G\setminus G_x$ не входит в стабилизатор ни одной точки $y\in B_\varepsilon(x)$. Кроме того, для каждой точки $y\in B_\varepsilon(x)$ и каждого $g\in G_x$ имеем $\bigl|x\,g(y)\bigr|=\bigl|g(x)g(y)\bigr|=|xy|\le\varepsilon$, поэтому в $B_\varepsilon(x)$ попадает в точности та часть орбиты $G(y)$ точки y, которая порождена элементами стабилизатора G_x.

(3) Если $G_x=G$, то выберем произвольное ε.

Если же $G \setminus G_x \neq \emptyset$, то для r из пункта (2) выберем произвольное $\varepsilon < r/4$, тогда расстояние между любыми точками из $B_\varepsilon(x)$ меньше $r/2$, а расстояние между произвольной точкой из $B_\varepsilon(x)$ и любой точкой из $B_\varepsilon\big(g(x)\big)$ для $g \in G \setminus G_x$ больше $r/2$. Таким образом, расстояние между орбитами $G(y_1)$ и $G(y_2)$, $y_1, y_2 \in B_\varepsilon(x)$, достигается на точках этих орбит, попавших в любую из окрестностей $B_\varepsilon\big(g(x)\big)$, и в каждой из этих окрестностей это расстояние одно и тоже (так как G действует изометриями). По пункту (2), для шара $B_\varepsilon(x)$ все попавшие в него точки рассматриваемых орбит образуют множества $G_x(y_1)$ и $G_x(y_2)$ соответственно. □

Определение 4.3. В предположениях и обозначениях предложения 4.2, замкнутый шар $B_\varepsilon(x)$ с любым $\varepsilon > 0$ при $G_x = G$, и $\varepsilon < r/4$ при $G_x \neq G$, назовем *канонической окрестностью точки* $x \in X$.

Следствие 4.4. *Пусть G — конечная группа, действующая изометриями на метрическом пространстве X. Выберем произвольную точку $x \in X$. Тогда на каждой канонической окрестности $B_\varepsilon(x)$ определено действие стабилизатора G_x, причем $\pi_{\varepsilon,x}\colon B_\varepsilon(x)/G_x \to B_\varepsilon\big(G(x)\big) \subset X/G$, $\pi_{\varepsilon,x}\colon G_x(y) \mapsto G(y)$, — изометрия. При этом, для каждого $g \in G$ окрестность $B_\varepsilon\big(g(x)\big) = g\big(B_\varepsilon(x)\big)$ также является канонической, а отображение g порождает изометрию $g_{\varepsilon,x}\colon B_\varepsilon(x)/G_x \to B_\varepsilon\big(g(x)\big)/G_{g(x)}$, $g_{\varepsilon,x}\colon G_x(y) \mapsto G_{g(x)}\big(g(y)\big)$. Кроме того, отображения $g_{\varepsilon,x}$, $\pi_{\varepsilon,x}$ и $\pi_{\varepsilon,g(x)}$ согласованы в следующем смысле: $\pi_{\varepsilon,x} = \pi_{\varepsilon,g(x)} \circ g_{\varepsilon,x}$. Таким образом, каждое отображение $\pi^{-1}_{\varepsilon,g(x)} \circ \pi_{\varepsilon,x}$ порождается отображением g.*

Для дальнейшего нам будет особенно важен вариант следствия 4.4 в ситуации, когда стабилизатор G_x точки $x \in X$ тривиален (состоит только из единичного элемента). Так как в этом случае $G_x(y) = \{y\}$ для любых $x, y \in X$, отображение $\pi_{\varepsilon,x}\colon G_x(y) \mapsto G(y)$ совпадает с ограничением канонической проекции $\pi\colon y \mapsto G(y)$ на каноническую окрестность $B_\varepsilon(x)$. Аналогично, отображение $g_{\varepsilon,x}\colon B_\varepsilon(x)/G_x \to B_\varepsilon\big(g(x)/G_{g(x)}\big)$ в этом случае является отображением между каноническими окрестностями $B_\varepsilon(x)$ и $B_\varepsilon\big(g(x)\big)$ и совпадает с ограничением отображения g на каноническую окрестность $B_\varepsilon(x)$, поэтому следствие 4.4 можно переформулировать так.

Следствие 4.5. *Пусть G — произвольная конечная группа, действующая изометриями на метрическом пространстве X, и пусть $\pi\colon X \to X/G$ — каноническая проекция, $\pi\colon x \mapsto G(x)$. Предположим, что стабилизатор всех точек из X тривиален. Тогда ограничение $\pi_{\varepsilon,x}$ проекции π на каждую каноническую окрестность $B_\varepsilon(x) \subset X$ точки x изометрично отображает $B_\varepsilon(x)$ на $B_\varepsilon\big(G(x)\big) \subset X/G$. При этом, для каждого $g \in G$ окрестность $B_\varepsilon\big(g(x)\big) = g\big(B_\varepsilon(x)\big)$ также является канонической. Кроме того, ограничение $g_{\varepsilon,x}\colon B_\varepsilon(x) \to B_\varepsilon\big(g(x)\big)$ отображения g, являющееся изометрией, согласовано с отображениями $\pi_{\varepsilon,x}$ и $\pi_{\varepsilon,g(x)}$ в следующем смысле: $\pi_{\varepsilon,x} = \pi_{\varepsilon,g(x)} \circ g_{\varepsilon,x}$. Таким образом, каждое отображение $\pi^{-1}_{\varepsilon,g(x)} \circ \pi_{\varepsilon,x}$ совпадает с ограничением отображения g на каноническую окрестность $B_\varepsilon(x)$.*

5 Каноническая локальная изометрия

Для $n \in \mathbb{N}$ положим $\mathcal{M}_n = \{X \in \mathcal{M} : \#X \leq n\}$ и $\mathcal{M}_{[n]} = \{X \in \mathcal{M} : \#X = n\}$, тогда $\mathcal{M}_{[1]} = \{\Delta_1\}$, $\mathcal{M}_{[2]}$ изометрично положительному лучу на вещественной прямой, а $\mathcal{M}_{[3]}$ — множеству $\{(a,b,c) : 0 < a \leq b \leq c \leq a+b\}$ с метрикой, порожденной ℓ_∞-нормой: $\big\|(x,y,z)\big\|_\infty = \frac{1}{2}\max\big\{|x|,|y|,|z|\big\}$ (последний факт можно найти в [7]).

Для $N = n(n-1)/2$ обозначим через $\mathbb{R}^N_\infty$ арифметическое пространство $\mathbb{R}^N$, наделенное ℓ_∞-нормой: $\big\|(x^1,\dots,x^N)\big\|_\infty = \frac{1}{2}\max_{i=1}^N\{|x^i|\}$. Соответствующее ℓ_∞-расстояние между точками $x, y \in \mathbb{R}^N_\infty$ будем обозначать через $|xy|_\infty$.

Пусть $X \in \mathcal{M}_{[n]}$. Перенумеруем произвольным образом его точки, тогда $X = \{x_i\}_{i=1}^n$, и пусть $\rho_{ij} = \rho_{ji} = |x_i x_j|$ — компоненты матрицы метрики M_X пространства X. Матрица M_X однозначно задается вектором $\rho_X = (\rho_{12},\dots,\rho_{1n},\rho_{23},\dots,\rho_{2n},\dots,\rho_{(n-1)n}) \in \mathbb{R}^N$. Отметим, что множество всевозможных $\rho_X \in \mathbb{R}^N$, $X \in \mathcal{M}_{[n]}$, состоит из всех векторов с положительными координатами, для которых выполняются "неравенства треугольника": для любых попарно различных $1 \le i,j,k \le N$ имеем $\rho_{ik} \le \rho_{ij} + \rho_{jk}$ (здесь мы для удобства записи полагаем $\rho_{ij} = \rho_{ji}$ при всех i и j). Обозначим это множество через $\mathcal{C}_n$.

Если изменить нумерацию точек пространства X, т.е. подействовать перестановкой $\sigma \in S_n$ на X по правилу $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$, то компоненты матрицы M_X переставятся: $\rho_{ij} \mapsto \sigma(\rho_{ij}) := \rho_{\sigma(i)\sigma(j)}$. Полученную матрицу обозначим через $M_{\sigma(X)}$, а полученный вектор — через $\rho_{\sigma(X)}$. Тем самым, определено действие группы S_n на $\mathcal{C}_n$.

Отметим, что определенное только что действие группы S_n на $\mathcal{C}_n$ состоит в перестановках базисных элементов из $\mathbb{R}^N$, поэтому это действие естественным образом продолжается на все $\mathbb{R}^N$, при этом S_n порождает некоторую подгруппу G группы S_N всех перестановок базисных элементов в $\mathbb{R}^N$. Так как единичный шар в $\mathbb{R}^N_\infty$ является евклидовым кубом с центром в начале координат, а при любой перестановке базисных векторов такой куб переходит в себя, группа S_N, а вместе с ней и группа G, действует на $\mathbb{R}^N_\infty$ изометриями. Отметим также, что S_N, вообще говоря, не задает действие на конусе $\mathcal{C}_n$, так как при произвольных перестановках расстояний между точками метрического пространства X могут нарушиться неравенства треугольника.

Далее, орбиты действия группы G на $\mathbb{R}^N$ содержат не больше $n!$ точек, причем *регулярные орбиты*, т.е. те, для которых стабилизатор тривиален, состоят в точности из $n!$ точек. Пространства X, для которых орбита точки ρ_X регулярна, а также все $g(\rho_X)$, $g \in G$, будем называть *регулярными*.

Отметим, что $\mathcal{C}_n$ не является открытым подмножеством $\mathbb{R}^N$: принадлежащие ему граничные точки — это, в точности, те ρ_X, в которых некоторые неравенства треугольника превращаются в равенства. Такие X и соответствующие им ρ_X назовем *вырожденными*, а все остальные — *невырожденными*.

Про регулярные невырожденные пространства X, а также соответствующие им векторы ρ_X, будем говорить, что они находятся в *общем положении*. Таким образом, $X \in \mathcal{M}_{[n]}$ является пространством общего положения, если и только если его группа симметрий тривиальна, а все неравенства треугольника — строгие. Отметим, что в [9] под пространствами общего положения мы понимали более узкий класс объектов, требуя дополнительно, чтобы все ненулевые расстояния были различными.

Обозначим через $\mathcal{C}_n^g$ подмножество в $\mathcal{C}_n$, состоящее из векторов общего положения, а через $\mathcal{M}_{[n]}^g$ подмножество в $\mathcal{M}_{[n]}$, состоящее из пространств общего положения. Легко видеть, что $\mathcal{C}_n^g$ и $\mathcal{M}_{[n]}^g$ открыты в $\mathbb{R}^N$ и $\mathcal{M}_{[n]}$ соответственно; кроме того, эти подмножества всюду плотны соответственно в $\mathcal{C}_n$ и $\mathcal{M}_{[n]}$.

Определим отображение $\Pi\colon \mathcal{C}_n \to \mathcal{M}_{[n]} \subset \mathcal{M}$, положив $\Pi\big(\rho_X\big) = X$. Изучим свойства этого отображения. Как показано в [3], при достаточно маленьком $\varepsilon > 0$ для каждых $Y, Z \in B_\varepsilon(X) \subset \mathcal{M}_{[n]}$ каждое оптимальное соответствие $R \in \mathcal{R}(Y,Z)$ является биекцией. Отсюда вытекает, что для таких Y и Z выполняется

$$d_{GH}(Y,Z) = \min_{\rho_Y,\rho_Z}\big\{|\rho_Y\rho_Z|_\infty\big\} = \big|G(\rho_Y)G(\rho_Z)\big|_\infty,$$

где справа стоит обычное расстояние между подмножествами $\mathbb{R}^N_\infty$, т.е. точная нижняя грань (в данном случае — минимум) расстояний между их элементами.

Тем самым, мы приходим к следующему результату.

Предложение 5.1. *Для любого $X \in \mathcal{M}_{[n]}$ существует такое $\varepsilon > 0$, что для любых $Y, Z \in B_\varepsilon(X) \subset \mathcal{M}_{[n]}$ выполняется*

$$d_{GH}(Y, Z) = \left|\Pi^{-1}(Y)\Pi^{-1}(Z)\right|_\infty.$$

По предложению 4.1, действие группы G на $\mathcal{C}_n$ порождает метрическое пространство $\mathcal{C}_n/G$. Из пункта (3) предложения 4.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.2. *Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ шар $B_\varepsilon\big(G(\rho)\big)$ в пространстве $\mathcal{C}_n/G$ изометричен фактору $\big(B_\varepsilon(\rho) \cap \mathcal{C}_n\big)/G_\rho$, где $B_\varepsilon(\rho)$ — шар в $\mathbb{R}^N_\infty$, а G_ρ — стабилизатор точки $\rho \in \mathcal{C}_n$ действия группы G.*

Комбинируя предложение 5.1 и следствие 5.2, заключаем.

Следствие 5.3. *Отображение $G(\rho_X) \mapsto X$ является локально изометричным гомеоморфизмом между $\mathcal{C}_n/G$ и $\mathcal{M}_{[n]}$, поэтому для любого $X \in \mathcal{M}_{[n]}$ и любого $\rho \in \Pi^{-1}(X)$ существует такое $\varepsilon > 0$, что замкнутый шар $B_\varepsilon(X) \subset \mathcal{M}_{[n]}$ изометричен $\big(B_\varepsilon(\rho) \cap \mathcal{C}_n\big)/G_\rho$, где $B_\varepsilon(\rho)$ — шар в $\mathbb{R}^N_\infty$, а G_ρ — стабилизатор точки $\rho \in \mathcal{C}_n$ действия группы G.*

Разберем теперь отдельно случаи разных типов пространств $X \in \mathcal{M}_{[n]}$: пространства общего положения, регулярного вырожденного пространства, нерегулярного невырожденного пространства, и, наконец, пространства нерегулярного вырожденного. Приводимые ниже результаты вытекают из следствия 5.3.

Пространства общего положения. Напомним, что пространствами общего положения мы назвали регулярные невырожденные пространства $X \in \mathcal{M}_{[n]}$ и соответствующие им точки из $\mathcal{C}_n$.

Следствие 5.4. *У каждого пространства $X \in \mathcal{M}_{[n]}$ общего положения при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ замкнутая шаровая окрестность $B_\varepsilon(X) \subset \mathcal{M}_{[n]}$ лежит в $\mathcal{M}^g_{[n]}$ и изометрична шару $B_\varepsilon(\rho_X)$ в $\mathbb{R}^N_\infty$.*

Регулярные вырожденные пространства. Для $n \geq 3$ и произвольного $\rho \in \mathcal{C}_n$ обозначим через $D(\rho_X)$ множество всех упорядоченных троек различных индексов (i, j, k), $1 \leq i, j, k \leq n$, таких, что $\rho_{ij} + \rho_{jk} = \rho_{ik}$. Отметим, что ρ вырожден, если и только если $D(\rho) \neq \emptyset$. Далее, для непустого $D(\rho)$, через $T(\rho)$ обозначим многогранный конус с вершиной в начале координат, полученный пересечение всех полупространств в $\mathbb{R}^N$, заданных неравенствами $\rho_{ij} + \rho_{jk} - \rho_{ik} \geq 0$ по всем $(i, j, k) \in D(\rho)$. Если $D(\rho) = \emptyset$, то положим $T(\rho) = \mathbb{R}^N$. Отметим, что для вырожденного $\rho \in \mathbb{R}^N_\infty$ и каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеем $B_\varepsilon(\rho) \cap \mathcal{C}_n = B_\varepsilon(\rho) \cap T(\rho)$.

Следствие 5.5. *У каждого регулярного вырожденного пространства $X \in \mathcal{M}_{[n]}$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ замкнутая шаровая окрестность $B_\varepsilon(X) \subset \mathcal{M}_{[n]}$ изометрична пересечению $B_\varepsilon(\rho_X) \cap T(\rho_X)$ шара $B_\varepsilon(\rho_X)$ в $\mathbb{R}^N_\infty$ и определенного выше конуса $T(\rho_X)$.*

Нам также понадобится следующее простое свойство конуса $T(\rho)$.

Предложение 5.6. *Если $\rho_X \in \mathcal{C}_n$ — вектор, соответствующий вырожденному пространству $X \in \mathcal{M}_{[n]}$, то при каждом $\varepsilon > 0$ множество $B_\varepsilon(\rho_X) \setminus \big(B_\varepsilon(\rho_X) \cap T(\rho_X)\big)$ имеет непустую внутренность.*

Доказательство. Действительно, так как X — вырожденное пространство, $T(\rho_X)$ содержится в полупространстве Θ, ограниченном некоторой гиперплоскостью θ вида $\rho_{ij} + \rho_{jk} - \rho_{ik} = 0$, проходящей через X. Так как и куб $B_\varepsilon(\rho_X)$, и гиперплоскость θ центрально симметричны относительно X, то $B_\varepsilon(\rho_X) \setminus (B_\varepsilon(\rho_X) \cap \Theta)$ содержит внутренние точки. Осталось вспомнить, что $T(\rho_X) \subset \Theta$. □

Нерегулярные невырожденные пространства.

Следствие 5.7. *У каждого нерегулярного невырожденного пространства $X \in \mathcal{M}_{[n]}$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ замкнутая шаровая окрестность $B_\varepsilon(X) \subset \mathcal{M}_{[n]}$ изометричная пространству $B_\varepsilon(\rho_X)/G_{\rho_X}$, полученному факторизацией шара $B_\varepsilon(\rho_X)$ в $\mathbb{R}^N_\infty$ по действию стабилизатора G_{ρ_X} точки ρ_X.*

Нерегулярные вырожденные пространства. Пусть теперь $X \in \mathcal{M}_{[n]}$ — нерегулярное вырожденное пространство, тогда стабилизатор G_{ρ_X} нетривиален, а конус $T(\rho_X)$ отличен от всего пространства. Заметим, что каждое движение $g \in G_{\rho_X}$ переводит $T(\rho_X)$ в себя. Действительно, так как $g(\rho_X) = \rho_X$, множество вырожденных треугольников в X переходит в себя при перестановке g точек пространства X, что и доказывает инвариантность $T(\rho_X)$. Напомним также, что при малых $\varepsilon > 0$ выполняется $B_\varepsilon(\rho_X) \cap T(\rho_X) = B_\varepsilon(\rho_X) \cap \mathcal{C}_n$. Таким образом, для достаточно малых $\varepsilon > 0$ стабилизатор G_{ρ_X} действует на множестве $B_\varepsilon(\rho_X) \cap T(\rho_X) = B_\varepsilon(\rho_X) \cap \mathcal{C}_n$.

Следствие 5.8. *У каждого нерегулярного вырожденного пространства $X \in \mathcal{M}_{[n]}$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ замкнутая шаровая окрестность $B_\varepsilon(X) \subset \mathcal{M}_{[n]}$ изометрична пространству $\big[B_\varepsilon(\rho_X) \cap T(\rho_X)\big]/G_{\rho_X}$, полученному факторизацией пересечения шара $B_\varepsilon(\rho_X)$ в $\mathbb{R}^N_\infty$ и конуса $T(\rho_X)$ по действию стабилизатора G_{ρ_X} точки ρ_X.*

5.1 Еще о пространствах общего положения

Воспользуемся теперь следствием 4.5.

Следствие 5.9. *Для любого $X \in \mathcal{M}^g_{[n]}$ существует такое $\varepsilon > 0$, что*

(1) *для каждого $\rho \in \Pi^{-1}(X)$ шар $B_\varepsilon(\rho)$ в $\mathbb{R}^N_\infty$ целиком лежит в $\mathcal{C}^g_n$, а множество $\Pi^{-1}\big(B_\varepsilon(X)\big)$ равно дизъюнктному объединению шаров $\big\{B_\varepsilon(\rho)\big\}_{\rho \in \Pi^{-1}(X)}$;*

(2) *ограничение $\pi_{\varepsilon,\rho} \colon B_\varepsilon(\rho) \to B_\varepsilon(X)$ проекции Π является изометрией;*

(3) *ограничение $g_{\varepsilon,\rho} \colon B_\varepsilon(\rho) \to B_\varepsilon\big(g(\rho)\big)$ отображения $g \in G$ также является изометрией;*

(4) *отображения $\pi_{\varepsilon,\rho}$ и $\pi_{\varepsilon,g(\rho)}$ согласованы в следующем смысле: $\pi_{\varepsilon,\rho} = \pi_{\varepsilon,g(\rho)} \circ g_{\varepsilon,\rho}$, так что каждое отображение $\pi^{-1}_{\varepsilon,g(\rho)} \circ \pi_{\varepsilon,\rho}$ совпадает с ограничением отображения $g \in G$ на шар $B_\varepsilon(\rho)$.*

Определение 5.10. Каждую окрестность $B_\varepsilon(X)$ из следствия 5.9, а вместе с ней и все окрестности $B_\varepsilon(\rho)$, будем называть *каноническими*.

Предложение 5.11. *Подмножества $\mathcal{C}_n^g \subset \mathbb{R}^N$ линейно связны при всех $n \neq 3$; более того, каждая пара точек из $\mathcal{C}_n^g$ соединяется двузвенной ломаной, лежащей в $\mathcal{C}_n^g$. При $n = 3$ подмножество $\mathcal{C}_n^g \subset \mathbb{R}^3$ не является линейно связным. Подмножества $\mathcal{M}_{[n]}^g \subset \mathcal{M}_{[n]}$ линейно связны при всех n.*

Доказательство. Если $n = 1$ или $n = 2$, то $\mathcal{C}_n^g = \mathcal{C}_n$ и $M_{[n]}^g = M_{[n]}$, так что линейная связность вытекает из замечаний, сделанных выше.

Пусть теперь $n = 3$. Покажем, что $\mathcal{C}_n^g$ не линейно связно. Возьмем, например, две точки $\rho_0 = (3, 4, 5)$ и $\rho_1 = (4, 3, 5) \in C_3^g$ и предположим, что в C_3^g они соединяются непрерывной кривой $\rho_t = \big(\rho_{12}(t), \rho_{13}(t), \rho_{23}(t)\big)$, $t \in [0, 1]$. Тогда непрерывная функция $f(t) = \rho_{12}(t) - \rho_{13}(t)$ удовлетворяет $f(0) < 0$ и $f(1) > 0$, поэтому существует такое $s \in (0, 1)$, что $\rho_{12}(s) = \rho_{13}(s)$. Но тогда стабилизатор точки ρ_s нетривиален, так что $\rho_s \notin C_3^g$.

Покажем теперь, что $M_{[3]}^g$ линейно связно. Заметим сначала, что тройка вещественных чисел $a \leq b \leq c$ является длинами сторон некоторого $X \in \mathcal{M}_{[3]}^g$, если и только если $0 < a < b < c < a+b$. Выберем $X_0, X_1 \in \mathcal{M}_{[3]}^g$, и пусть $0 < a_i < b_i < c_i < a_i+b_i$ — ненулевые расстояния в X_i. Тогда для каждого $t \in [0, 1]$ тройка $\{a_t = (1-t)a_0 + t\,a_1,\ b_t = (1-t)b_0 + t\,b_1,\ c_t = (1-t)c_0 + t\,c_1\}$ также удовлетворяет $0 < a_t < b_t < c_t < a_t + b_t$ и, поэтому, задает метрическое пространство X_t, причем также лежащее в $\mathcal{M}_{[3]}^g$. Легко видеть, что $t \mapsto X_t$ является непрерывной кривой в $\mathcal{M}_{[3]}^g$, что и доказывает линейную связность $\mathcal{M}_{[3]}^g$.

Пусть теперь $n \geq 4$. Отметим, что конус $\mathcal{C}_n$ — выпуклый, так как он является пересечением полупространств, соответствующих условиям положительности компонент метрики и неравенствам треугольника, поэтому для любых $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{C}_n$ отрезок $\rho_t = (1 - t)\rho_0 + t\,\rho_1$, $t \in [0, 1]$, лежит в $\mathcal{C}_n$. Далее, если $\rho_0, \rho_1 \in \mathcal{C}_n$ — невырождены, то и все ρ_t также невырождены. Таким образом, множество всех невырожденных $\rho \in \mathcal{C}_n$ выпукло. Кроме того, множество всех невырожденных $\rho \in \mathcal{C}_n$ открыто и всюду плотно в $\mathcal{C}_n$.

Выясним теперь, как устроено множество нерегулярных $\rho \in \mathcal{C}_n$. Условие нерегулярности $\rho \in \mathcal{C}_n$ означает, что для некоторого $\sigma \in S_n$, отличного от тождественного преобразования, выполняется $\sigma(\rho) = \rho$. Положим $X = \Pi(\rho)$ и пусть $\rho = \rho_X$ для некоторой нумерации $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ точек этого пространства, т.е. $\rho_{ij} = |x_i x_j|$. Так как перестановка σ отлична от тождественного отображения, существует $i \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $j = \sigma(i) \neq i$. Так как $n \geq 4$, в $\{1, \ldots, n\}$ имеется по крайней мере два разных элемента p и q, отличных от i, для которых $r = \sigma(p) \neq i$, $s = \sigma(q) \neq i$. Отсюда вытекает, что $\{i, p\} \neq \{j, r\}$ и $\{i, q\} \neq \{j, s\}$, поэтому, так как $\sigma\big(\rho_{ip}\big) = \rho_{jr}$ и $\sigma\big(\rho_{iq}\big) = \rho_{js}$, условие $\sigma(\rho) = \rho$ влечет два нетождественных условия, а именно, $\rho_{ip} = \rho_{jr}$ и $\rho_{iq} = \rho_{js}$.

Покажем, что эти условия также являются независимыми. Действительно, если это не так, то $\{i, p\} = \{j, s\}$ и $\{i, q\} = \{j, r\}$, но по предположению i отличается j, r, и s, противоречие. Следовательно, множество тех $\rho \in \mathcal{C}_n$, для которых $\sigma(\rho) = \rho$, состоит из подмножеств конечного числа линейных подпространств $\mathbb{R}^N$, каждое из которых имеет коразмерность не меньше 2. Эти линейные подпространства будем называть *подпространствами нерегулярности.*

Выберем теперь два произвольных $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{C}_n^g$, и для ρ_1 и каждого подпространства нерегулярности рассмотрим их линейную оболочку. Получим набор подпространств, каждое из которых имеет ненулевую коразмерность. Отсюда вытекает, что объединение W этих подпространств не покрывает ни одно открытое подмножество $\mathbb{R}^N$. Но тогда, в силу открытости множества $\mathcal{C}_n^g$, существует $\rho_2' \in U_\varepsilon(\rho_2) \subset \mathcal{C}_n^g$, не лежащее в W. Следовательно, отрезок $[\rho_1, \rho_2']$ не пересекает W, и, значит, ломаная $\rho_1\rho_2'\rho_2$ также не пересекает W; последнее завершает доказательство линейной связности множества $\mathcal{C}_n^g$, а также того факта, что любые две его

точки соединяются ломаной, лежащей в $\mathcal{C}^g_n$. Линейная связность $\mathcal{M}^g_{[n]}$ вытекает из того, что непрерывный образ линейно связного пространства также линейно связен. $\square$

Обозначим через $\Pi^g\colon \mathcal{C}^g_n \to \mathcal{M}^g_{[n]}$ ограничение отображения $\Pi\colon \mathcal{C}_n \to \mathcal{M}_{[n]}$ на $\mathcal{C}^g_n$. Напомним определение накрытия, детали см. в [10].

5.2 Накрытия и пространства общего положения

Пусть T и B — линейно связные, а F — дискретное топологические пространства, $n = \#F$. Тогда непрерывное сюръективное отображение $\pi\colon T \to B$ называется *n-листным накрытием с тотальным пространством T, базой B и слоем F*, если у каждой точки $b \in B$ существует такая окрестность U, что $\pi^{-1}(U)$ гомеоморфно $U \times F$, причем если $\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to U \times F$ — соответствующий гомеоморфизм, а $\pi_1\colon U \times F \to U$ — проекция, $\pi_1\colon (u, f) \mapsto u$, то $\pi = \pi_1 \circ \varphi$ (соответствующая диаграмма коммутативна). Если отказаться от условия линейной связности, то описанные только что отображения π будем называть *накрытиями в широком смысле.*

Следствие 5.12. *Отображение $\Pi^g\colon \mathcal{C}^g_n \to \mathcal{M}^g_{[n]}$ является $n!$-листным локально изометричным накрытием (в широком смысле при $n = 3$ в силу несвязности $\mathcal{C}_n$).*

Следствие 5.12 пригодится нам при построении поднятия путей.

Предложение 5.13 (О поднятии путей [10])**.** *Пусть $\pi\colon T \to B$ — произвольное накрытие в широком смысле, $\gamma\colon [a, b] \to B$ — непрерывное отображение (путь в B), и $t \in T$ — произвольная точка из $\pi^{-1}\big(\gamma(a)\big)$. Тогда существует и единственно непрерывное отображение $\Gamma\colon [a, b] \to T$ такое, что $\Gamma(a) = t$ и $\gamma = \pi \circ \Gamma$.*

Определение 5.14. Отображение Γ из предложения 5.13 называется *поднятием пути γ*.

6 Инвариантность множеств $\mathcal{M}^g_{[n]}$

В данном разделе мы докажем, что множества $\mathcal{M}^g_{[n]}$ инвариантны при каждой изометрии пространства $\mathcal{M}$. Для этого мы используем, помимо разработанной выше техники, инвариантность меры Хаусдорфа при изометриях. Напомним соответствующие понятия и факты.

Пусть X — произвольное множество. Через 2^X обозначим множество всех подмножеств X.

Определение 6.1. *Внешней мерой* на множестве X называется произвольное отображение $\mu\colon 2^X \to [0, +\infty]$ такое, что

(1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(2) для любого не более чем счетного семейства $\mathcal{C}$ подмножеств из X и любого $A \subset X$, для которого $A \subset \cup_{B \in \mathcal{C}} B$, выполняется $\mu(A) \le \sum_{B \in \mathcal{C}} \mu(B)$ (субаддитивность).

Определение 6.2. Подмножество $A \subset X$ называется *измеримым относительно μ* или *μ-измеримым (по Каратеодори)*, если для любого $Y \subset X$ выполняется $\mu(Y) = \mu(Y \cap A) + \mu(Y \setminus A)$.

Определение 6.3. Семейство $\mathcal{S}$ подмножеств X называется *σ-алгеброй*, если оно содержит $\emptyset$ и X, замкнуто относительно счетных объединений, а также операции дополнения.

Хорошо известно, что для любой внешней меры μ на множестве X множество всех μ-измеримых подмножеств X образует σ-алгебру. Также хорошо известно, что пересечение σ-алгебр является σ-алгеброй. Последнее позволяет определить наименьшую σ-алгебру, содержащую данное семейство подмножеств множества X.

Если X — топологическое пространство, то наименьшая σ-алгебра, содержащая топологию, называется *борелевской*, а ее элементы — *борелевскими множествами*. Внешняя мера μ на топологическом пространстве — *борелевская*, если все борелевские множества являются μ-измеримыми. Внешняя мера μ на топологическом пространстве X называется *борелевски регулярной*, если она — борелевская, и для каждого множества $A \subset X$ величина $\mu(A)$ равна точно нижней грани чисел $\mu(B)$ по всем борелевским $B \supset A$.

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Нам будет достаточно определить меру Хаусдорфа с точностью до постоянной. Каноническое определение этой меры см. например в [2].

Определение 6.4. Для $\delta > 0$ и $A \subset X$ семейство $\{A_i\}_{i\in I}$ подмножеств множества X назовем *δ-покрытием множества* A, если $A \subset \cup_{i\in I} A_i$ и $\operatorname{diam} A_i < \delta$ при всех $i \in I$ (если $A_i = \emptyset$, то полагаем $\operatorname{diam} A_i = 0$).

Определение 6.5. Для каждых $\delta > 0$, $k > 0$ и $A \subset X$ положим

$$H^k_\delta(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(\operatorname{diam} A_i)^k \,:\, \{A_i\}_{i=1}^{\infty} \text{ — } \delta\text{-покрытие } A\right\}, \tag{1}$$

$$H^k(A) = \sup_{\delta>0} H^k_\delta(A). \tag{2}$$

Следующие результаты хорошо известны.

Предложение 6.6. *Для произвольного $k > 0$ и натурального N выполняются следующие утверждения.*

(1) *Функции H^k являются борелевски регулярными внешними мерами на каждом метрическом пространстве X.*

(2) *Если $f\colon X \to Y$ — изометрия метрических пространств, то для каждого $A \subset X$ имеем $H^k\big(f(A)\big) = H^k(A)$.*

(3) *В N-мерном нормированном пространстве H^N-мера единичного шара — ненулевая и конечная, так что и H^N-мера любого ограниченного подмножества с непустой внутренностью — ненулевая и конечная.*

Предложение 6.7. *Предположим, что на метрическом пространстве X непрерывно действует изометриями компактная группа G, и пусть Y — подмножество X, инвариантное относительно действия группы G. Предположим также, что*

(1) *для некоторого $k > 0$ имеем $H^k(Y) \in (0, \infty)$;*

(2) *существуют $g \in G$ и $A \subset Y$ такие, что $H^k(A) > 0$ и $A \cap g(A) = \emptyset$.*

Тогда $H^k(Y/G) < H^k(Y)$.

Предложение 6.8. *Пусть $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — произвольная изометрия, тогда $\mathcal{M}^g_{[n]} = f(\mathcal{M}^g_{[n]})$.*

Доказательство. Выберем произвольное $X \in \mathcal{M}^g_{[n]}$ и пусть $Y = f(X)$. Предположим, что Y — регулярное вырожденное пространство, тогда, в силу следствий 5.4 и 5.5, существует столь малое $\varepsilon > 0$, то шар $B_\varepsilon(X) \subset \mathcal{M}_{[n]}$ изометричен шару $B_\varepsilon(\rho_X) \subset \mathbb{R}^N_\infty$, а $B_\varepsilon(Y)$ — пересечению $B_\varepsilon(\rho_Y) \cap T(\rho_Y)$ шара $B_\varepsilon(\rho_Y) \subset \mathbb{R}^N_\infty$ и конуса $T(\rho_Y)$. Так как сдвиги в $\mathbb{R}^N_\infty$ являются изометриями, то, по пунктам (2) и (3) предложения 6.6, имеем

$$H^N\big(B_\varepsilon(\rho_Y)\big) = H^N\big(B_\varepsilon(\rho_X)\big) = H^N\big(B_\varepsilon(X)\big) = H^N\big(B_\varepsilon(Y)\big) = H^N\big(B_\varepsilon(\rho_Y) \cap T_{\rho_Y}\big) > 0.$$

В силу предложения 5.6 и пункта (3) предложения 6.6, имеем

$$H^N\Big(B_\varepsilon(\rho_Y) \setminus \big(B_\varepsilon(\rho_Y) \cap T(\rho_Y)\big)\Big) > 0,$$

поэтому, так как внешняя мера H^N — борелевская, получаем $H^N\big(B_\varepsilon(\rho_Y) \cap T(\rho_Y)\big) < H^N\big(B_\varepsilon(\rho_Y)\big)$, противоречие. Таким образом, шары $B_\varepsilon(X)$ и $B_\varepsilon(Y)$ неизометричны и, значит, Y не может быть вырожденным регулярным пространством.

Пусть теперь Y — нерегулярное невырожденное пространство. Тогда, по следствию 5.7, шар $B_\varepsilon(Y)$ изометричен $B_\varepsilon(\rho_Y)/G_{\rho_Y}$, где G_{ρ_Y} — стабилизатор точки ρ_Y, являющийся нетривиальной группой в силу того, что пространство Y нерегулярно. Пусть $g \in G_{\rho_Y}$ — элемент, отличный от единицы. Так как пространства общего положения всюду плотны в $\mathcal{M}_{[n]}$, существует $\rho_Z \in U_\varepsilon(\rho_Y)$ для некоторого пространства $Z \in \mathcal{M}_{[n]}$ общего положения. Так как стабилизатор точки ρ_Z тривиален, из пункта (2) предложения 4.2 следует, что существует $\delta > 0$, для которого $U_\delta(\rho_Z) \subset U_\varepsilon(\rho_Y)$ и $g\big(U_\delta(\rho_Z)\big) \cap U_\delta(\rho_Z) = \emptyset$. Но $U_\delta(\rho_Z)$ — открытый шар в $\mathbb{R}^N_\infty$, поэтому, в силу пункта (3) предложения 6.6, имеем $0 < H^N\big(U_\delta(\rho_Z)\big) < \infty$. Далее, и по пункту (1) предложения 4.2, выполняется $g\big(U_\delta(\rho_Z)\big) \subset U_\varepsilon(\rho_Y)$, поэтому, в силу пункта (2) предложения 6.7 заключаем, что $H^N\big(B_\varepsilon(\rho_Y)/G_{\rho_Y}\big) < H^N\big(B_\varepsilon(\rho_Y)\big)$ и, значит,

$$H^N\big(B_\varepsilon(Y)\big) = H^N\big(B_\varepsilon(\rho_Y)/G_{\rho_Y}\big) < H^N\big(B_\varepsilon(\rho_Y)\big) = H^N\big(B_\varepsilon(\rho_X)\big) = H^N\big(B_\varepsilon(X)\big).$$

Таким образом, Y не может быть и нерегулярным невырожденным пространством.

Случай нерегулярного вырожденного Y разбирается комбинацией рассуждений, только что приведенных. □

7 Локальная аффинность

В 1968 году F. John [11] получил обобщение теоремы Mazur'a–Ulam'a [12] об аффинности изометрий нормированных векторных пространств.

Предложение 7.1 ([11], Theorem IV, p. 94)**.** *Пусть $U \subset X$ — связное открытое подмножество вещественного полного нормированного пространства X, и $h\colon U \to W$ — изометрия, отображающая U на открытое подмножество W вещественного полного нормированного пространства Y. Тогда h является ограничением аффинной изометрии $H\colon X \to Y$.*

Предложение 7.1 утверждает, что все изометрии пространства $\mathbb{R}^d_\infty$ являются аффинными отображениями. Опишем более подробно, как устроены эти изометрии.

Предложение 7.2. *Пусть $h\colon \mathbb{R}^d_\infty \to \mathbb{R}^d_\infty$ — аффинная изометрия. Тогда $h(x) = (S \cdot P)x + b$, где $b \in \mathbb{R}^d$ — вектор сдвига, P — матрица некоторой перестановки векторов стандартного базиса, и S — диагональная матрица с ± 1 на диагонали.*

Доказательство. Любое аффинное отображение — композиция линейного отображения $x \mapsto Ax$ и сдвига на некоторый вектор. Так как расстояния в нормированном пространстве инвариантны относительно любых сдвигов, нам достаточно описать линейные изометрии $h(x) = Ax$. Каждое такое отображение переводит единичный шар с центром в начале координат в себя. Но этот шар в $\mathbb{R}^d_\infty$ является кубом с вершинами, координаты которых равны ± 1. Гиперграни этого куба задаются уравнениями вида $x_i = \pm 1$ и переводятся линейным отображением h друг в друга. Отсюда следует, что и грани куба любых размерностей переходят в грани тех же размерностей.

Центр гиперграни $x_i = \pm 1$ — это вектор $\pm e_i$, где e_i — вектор стандартного базиса в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^d$. Центр гиперграни равен сумме радиус-векторов всех ее вершин, с точностью до множителя 2^{d-1}. Поэтому отображение h переводит каждый вектор e_i в вектор $\pm e_j$, т.е. h — это композиция перестановки базисных векторов и замены их знаков. □

Пусть $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — произвольная изометрия, $X \in \mathcal{M}^g_{[n]}$ и $Y = f(X)$. В силу предложения 6.8, имеем $Y \in \mathcal{M}^g_{[n]}$. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы шары $B_\varepsilon(X)$ и $B_\varepsilon(Y)$ в $\mathcal{M}_{[n]}$ были каноническими окрестностями. Тогда для произвольных $\rho_X \in \Pi^{-1}(X)$ и $\rho_Y \in \Pi^{-1}(Y)$ имеем $B_\varepsilon(\rho_X) \subset \mathcal{C}^g_n$, $B_\varepsilon(\rho_Y) \subset \mathcal{C}^g_n$, а ограничения π_{ε,ρ_X} и π_{ε,ρ_Y} отображения Π^g на эти окрестности — изометрии с $B_\varepsilon(X)$ и $B_\varepsilon(Y)$ соответственно. Но тогда отображение

$$h_{\varepsilon,\rho_X,\rho_Y} = \pi^{-1}_{\varepsilon,\rho_Y} \circ f \circ \pi_{\varepsilon,\rho_X} \colon U_\varepsilon(\rho_X) \to U_\varepsilon(\rho_Y)$$

также является изометрией. В силу предложения 7.1, отображение h аффинно. Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Следствие 7.3. *Во введенных выше обозначениях, если $\varepsilon > 0$ таково, что $B_\varepsilon(X)$ и $B_\varepsilon(Y)$ — канонические окрестности, то отображение*

$$h_{\varepsilon,\rho_X,\rho_Y} = \pi^{-1}_{\varepsilon,\rho_Y} \circ f \circ \pi_{\varepsilon,\rho_X} \colon U_\varepsilon(\rho_X) \to U_\varepsilon(\rho_Y)$$

имеет вид $h_{\varepsilon,\rho_X,\rho_Y}(\rho) = (S \cdot P)\rho + b$, где $b \in \mathbb{R}^N$ — вектор сдвига, P — матрица некоторой перестановки векторов стандартного базиса, и S — диагональная матрица с ± 1 на диагонали.

В дальнейшем нам понадобится следующая очевидная лемма.

Лемма 7.4. *Если аффинные отображения $x \mapsto A_i\, x + b_i$, $i = 1, 2$, заданные на пересекающихся открытых подмножествах пространства $\mathbb{R}^d$, совпадают на пересечении, то $A_1 = A_2$ и $b_1 = b_2$.*

Конструкция 7.5. Пусть $X, X' \in \mathcal{M}^g_{[n]}$ и соответствующие $\rho_X, \rho_{X'} \in \mathcal{C}^g_n$ таковы, что отрезок $L = [\rho_X, \rho_{X'}]$ содержится в $\mathcal{C}^g_n$. Будем рассматривать отрезок L как непрерывную кривую, и обозначим через γ образ кривой L при отображении Π^g. Тогда γ — кривая в $\mathcal{M}^g_{[n]}$, соединяющая X и X'. Пусть γ' — образ кривой γ при изометрии f, тогда γ' соединяет $Y := f(X)$ и $Y' = f(X')$. Выберем произвольное $\rho_Y \in \mathcal{C}^g_n$. По следствию 5.12, отображение $\Pi^g \colon \mathcal{C}^g_n \to \mathcal{M}^g_{[n]}$ является накрытием в широком смысле, поэтому, в силу предложения 5.13, существует и единственна непрерывная кривая L' в $\mathcal{C}^g_n$, выходящая из ρ_Y и такая, что ее Π^g-образ — это кривая γ'. Так как второй конец кривой L' проецируется в Y', этот конец совпадает с $\rho_{Y'}$ для некоторой нумерации точек пространства Y'.

Выберем теперь такое столь малое $\varepsilon > 0$, чтобы все шары $U_\varepsilon(X)$, $U_\varepsilon(X')$, $U_\varepsilon(Y)$ и $U_\varepsilon(Y')$ одновременно были каноническими окрестностями. Тогда, в обозначениях следствия 5.9, изометрии π_{ε,ρ_X}, $\pi_{\varepsilon,\rho_{X'}}$, π_{ε,ρ_Y}, $\pi_{\varepsilon,\rho_{Y'}}$ порождают две других изометрии $h_{\varepsilon,\rho_X,\rho_Y} = \pi^{-1}_{\varepsilon,\rho_Y} \circ f \circ \pi_{\varepsilon,\rho_X}$ и $h_{\varepsilon,\rho_{X'},\rho_{Y'}} = \pi^{-1}_{\varepsilon,\rho_{Y'}} \circ f \circ \pi_{\varepsilon,\rho_{X'}}$. В силу предложения 7.1, отображения $h_{\varepsilon,\rho_X,\rho_Y}$ и $h_{\varepsilon,\rho_{X'},\rho_{Y'}}$ являются ограничениями аффинных изометрий $H\colon \mathbb{R}^N_\infty \to \mathbb{R}^N_\infty$ и $H'\colon \mathbb{R}^N_\infty \to \mathbb{R}^N_\infty$ соответственно.

Лемма 7.6. *Во введенных выше обозначениях, аффинные изометрии H и H' совпадают.*

Доказательство. Пусть отрезок L, а вместе с ним и все кривые γ, γ' и L', параметризованы параметром $t \in [a,b]$, $L(a) = \rho_X$ и $L(b) = \rho_{X'}$.

Для каждого $t \in [a,b]$ выберем такое $\varepsilon_t > 0$, чтобы $B_{\varepsilon_t}\big(L(t)\big)$ и $B_{\varepsilon_t}\big(L'(t)\big)$ были каноническими окрестностями. Семейство открытых шаров $\Big\{U_{\varepsilon_t}\big(L(t)\big)\Big\}$ образует открытое покрытие отрезка $[\rho_X,\, \rho_{X'}]$. Пусть $\{U_i\}_{i=1}^m$ — конечное подпокрытие, существующее в силу компактности отрезка. Без ограничения общности, будем считать, что семейство $\{U_i\}_{i=1}^m$ минимально в том смысле, что ни один U_i не содержится в другом U_j; кроме того, будем считать, что центры ρ_i шаров U_i упорядочены вдоль отрезка $[\rho_X, \rho_{X'}]$. Из этих двух требований вытекает, что последовательные U_i пересекаются, в частности, расстояние между каждыми ρ_i и ρ_{i+1} меньше суммы радиусов ε_i и ε_{i+1} шаров U_i и U_{i+1} соответственно. Так как шары U_i открыты, то каждое пересечение $U_i \cap U_{i+1}$ открыто; так как $|\rho_i\rho_{i+1}|_\infty < \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1}$, существует $\rho'_i \in (\rho_i, \rho_{i+1})$ такое, что $\rho'_i \in U_i \cap U_{i+1}$; кроме того, в силу открытости $U_i \cap U_{i+1}$, можно выбрать открытый шар U'_i с центром в ρ'_i и радиусом ε'_i так, чтобы $U'_i \subset\ U_i \cap U_{i+1}$. В итоге, мы построили новое покрытие $\{U_1, U'_1, U_2, U'_2, \ldots\}$ отрезка $[\rho_X,\, \rho_{X'}]$. Последовательные элементы нового покрытия обозначим через $\{V_i\}_{i=1}^{2m-1}$. Введем переобозначения: пусть $\rho_i = L(t_i)$ — центр шара V_i, а ε_i — радиус этого шара. Таким образом, $V_i = U_{\varepsilon_i}(\rho_i)$.

Далее, положим $\nu_i = L'(t_i)$ и рассмотрим семейство открытых шаров $\big\{W_i := U_{\varepsilon_i}(\nu_i)\big\}_{i=1}^{2m-1}$, тогда, по определению, каждый из этих шаров лежит в $\mathcal{C}^g_n$, и ограничения $\pi_{\varepsilon_i,\nu_i}$ отображения Π^g на эти шары изометричны. Кроме того, ограничение $\pi_{\varepsilon_i,\rho_i}$ отображения Π^g на V_i также изометрично. Положим $h_i = h_{\varepsilon_i,\rho_i,\nu_i} = \pi^{-1}_{\varepsilon_i,\nu_i} \circ f \circ \pi_{\varepsilon_i,\rho_i}$, тогда $h_i\colon V_i \to W_i$ — изометрия при каждом i.

Так как, по построению, $V_{2k} \subset V_{2k-1}$, из изометричности отображения h_{2k-1} вытекает, что $|\rho_{2k}\rho_{2k-1}|_\infty = |\nu_{2k}\nu_{2k-1}|_\infty$, поэтому $W_{2k} \subset W_{2k-1}$ и $\pi_{\varepsilon_{2k},\nu_{2k}} = \pi_{\varepsilon_{2k-1},\nu_{2k-1}}|_{W_{2k}}$, так как оба этих отображения являются ограничением Π^g. Таким образом, $h_{2k} = h_{2k-1}|_{V_{2k}}$. Аналогично показывается, что $h_{2k} = h_{2k+1}|_{V_{2k}}$.

В силу предложения 7.1, для каждого i существуют аффинное отображение $H_i\colon \mathbb{R}^N_\infty \to \mathbb{R}^N_\infty$ такое, что $h_i = H_i|_{V_i}$. В силу сказанного выше, последовательные h_i совпадают на открытом множестве — пересечении своих областей определения, поэтому, в силу леммы 7.4, все эти H_i совпадают, в частности, $H_1 = H_{2m-1}$. По той же лемме, $H = H_1$ и $H' = H_{2m-1}$, что и требовалось. □

Следствие 7.7. *Если в конструкции перед леммой* 7.6 *заменить отрезок L на ломаную, то лемма* 7.6 *по-прежнему будет иметь место.*

Предложение 7.8. *В обозначениях следствия* 7.3*, матрица S — единичная и $b = 0$.*

Доказательство. В обозначениях конструкции 7.5, выберем произвольное $0 < \delta < 1$ и в качестве X' возьмем пространство $\delta\, X$. В силу следствия 7.7, отображения $h_{\varepsilon,\rho_X,\rho_Y}\colon U_\varepsilon(\rho_X) \to U_\varepsilon(\rho_Y)$ и $h_{\varepsilon,\rho_{X'},\rho_{Y'}}\colon U_\varepsilon(\rho_{X'}) \to U_\varepsilon(\rho_{Y'})$ являются ограничениями одной и той же аффинной

изометрии H, не зависящей от выбора δ. По предложению 7.2, имеем $H(\rho) = (S \cdot P)\rho + b$, где $b \in \mathbb{R}^N_\infty$ — вектор сдвига, P — матрица некоторой перестановки векторов стандартного базиса, и S — диагональная матрица с ± 1 на диагонали.

Заметим, что $\|\delta\,\rho_X\|_\infty \to 0$ при $\delta \to 0$, поэтому, в силу следствия 3.2, имеем $\big\|H(\delta\,\rho_X)\big\|_\infty \to 0$ при $\delta \to 0$. Однако, если $b \neq 0$, то, выбирая δ таким, чтобы

$$\|\delta\,\rho_X\|_\infty < \frac{1}{2}\|b\|_\infty \text{ и } \big\|(S \cdot P)(\delta\,\rho_X)\big\|_\infty < \frac{1}{2}\|b\|_\infty,$$

получаем

$$\big\|H(\delta\,\rho_X)\big\|_\infty = \big\|(S \cdot P)(\delta\,\rho_X) + b\big\|_\infty \geq -\big\|(S \cdot P)(\delta\,\rho_X)\big\|_\infty + \|b\|_\infty > \frac{1}{2}\|b\|_\infty,$$

противоречие с тем, что $\big\|H(\delta\,\rho_X)\big\|_\infty \to 0$ при $\delta \to 0$.

Итак, мы показали, что $b = 0$. Осталось заметить, что у векторов ρ_X и $H(\rho_X)$ все компоненты положительны, так что S не может содержать отрицательных элементов. □

8 Необходимые факты из теории групп перестановок

Итак, мы показали, что каждое отображение $h_{\varepsilon,\rho_X,\rho_Y}$ является ограничением аффинного отображения $x \mapsto Px$ пространства $\mathbb{R}^N$ в себя, где P — матрица некоторой перестановки базисных векторов, т.е., фактически, элемент из S_N. Мы завершим доказательство, показав, что $P \in G$, т.е. что P задается перестановкой точек метрических пространств и, значит, f локально является тождественным отображением. Чтобы реализовать этот план, нам понадобится ряд фактов из теории групп перестановок.

Положим $V = \{1, \ldots, n\}$. Через E обозначим множество базисных векторов $e_{ij} = e_{ji}$ пространства $\mathbb{R}^N$, $\{i, j\} \subset V$, $i \neq j$. Тогда $K_n = (V, E)$ — полный граф с n вершинами и N ребрами, а действия групп G и S_N можно теперь рассматривать как действие на множестве ребер E графа K_n; при этом действие группы G порождается перестановками на множестве вершин V. Заметим, что при $n = 3$ все шесть перестановок ребер порождены перенумерациями вершин, т.е. $G = S_N$.

Лемма 8.1. *Пусть $n \geq 5$. Перестановка $\alpha \in S_N$ принадлежит подгруппе G, если и только если α переводит смежные ребра в смежные.*

Доказательство. Легко видеть, что каждая перестановка $\alpha \in G$ переводит смежные ребра в смежные. Докажем обратное утверждение.

Предположим, что α переводит все пары смежных ребер графа K_n в смежные. Рассмотрим все ребра, инцидентные некоторой фиксированной вершине $v \in V$ (таких ребер $n - 1$, в частности, их не меньше 4). Тогда, по предположению, их образы — попарно смежные ребра. Покажем, что эти ребра имеют общую вершину.

Рассмотрим образы трех различных ребер из выбранных. Их образы образуют связный трехреберный подграф H в K_n. Каждый такой подграф — это или цикл, или звезда, или простой путь. Последний случай невозможен, так как первое и последнее ребра простого трехреберного пути не смежны друг с другом.

Рассмотрим теперь образ четвертого ребра. Он должен пересекаться со всеми тремя ребрами подграфа H. Поэтому H не может быть трехреберным циклом, и, значит, H — звезда, а образ четвертого ребра инцидентен общей вершине этой звезды.

Рассуждая аналогично, заключаем, что образы всех ребер, выходящих из вершины v, инцидентны некоторой общей вершине. Тем самым, определено отображение σ множества V в себя, сопоставляющее вершине $v \in V$ единственную общую вершину α-образов всех ребер, инцидентных v. Это отображение инъективно, так как если v и w переходят в одну и ту же вершину, то по их образу пересекается $2n-2$ ребра, что невозможно. Кроме того, индуцированное σ отображение ребер графа K_n совпадает с α, так что $\alpha \in G$. $\square$

Замечание 8.2. Для $n = 4$ условие леммы 8.1 не является достаточным. Например, следующая перестановка α переводит тройки ребер, имеющих общую вершину, в тройки ребер, образующих циклы:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{1,3\} & \{1,4\} & \{2,3\} & \{2,4\} & \{3,4\} \\ \{2,3\} & \{3,4\} & \{2,4\} & \{1,3\} & \{1,2\} & \{1,4\} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, α переводит смежные ребра в смежные, но не порождена перенумерацией вершин.

Утверждение 8.3. *При $n \geq 8$ нормализатор подгруппы G в S_N совпадает с группой G.*

Доказательство. Обозначим через F множество пар различных ребер графа K_n, тогда $F = F_0 \sqcup F_1$, где F_0 состоит из пар непересекающихся ребер, а F_1 — из пар пересекающихся (по общей вершине) ребер графа K_n.

Лемма 8.4. *В сделанных обозначениях,*

$$\#F_0 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}, \qquad \#F_1 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}.$$

В частности, при $n \geq 8$ непересекающихся пар больше, чем пересекающихся, т.е. $\#F_0 > \#F_1$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим реберный граф $E(K_n)$ графа K_n, т.е. граф, вершины которого суть ребра графа K_n, причем две вершины смежны, если и только если смежны соответствующие ребра графа K_n. Тогда $E(K_n) = (E, F_1)$. Каждое ребро $\{i,j\}$ полного графа K_n смежно в $E(K_n)$ с $n-2$ ребрами по вершине i и с $n-2$ ребрами по вершине j, поэтому степень каждой вершины графа $E(K_n)$ равна $2n-4$. Так как количество вершин графа $E(K_n)$ равно $N = n(n-1)/2$, получаем:

$$\#F_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot (2n-4) = \frac{n(n-1)(n-2)}{2}.$$

Формула для несмежных пар ребер получается как разность общего числа пар и $\#F_1$:

$$\#F_0 = \#F - \#F_1 = \frac{\frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2} - 1\right)}{2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{2} =$$
$$= \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{n(n-1)}{4} - \frac{1}{2} - (n-2)\right) = \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{n^2-5n+6}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}.$$

В частности,

$$\#F_0 = \frac{(n-3)}{4} \cdot \#F_1,$$

поэтому, так как $(n-3)/4 > 1$ при $n > 7$, заключаем, что $\#F_0 > \#F_1$ при $n \geq 8$. $\square$

Каждая перестановка $P \in S_N$ действует не только на ребрах графа K_n, но и на множестве F по тому же самому правилу. Из леммы 8.4 вытекает следующий результат.

Лемма 8.5. *При $n \geq 8$ каждая перестановка $P \in S_N$ переводит некую пару несмежных ребер графа K_n в пару несмежных ребер.*

Доказательство. Действительно, элементов в F_1 просто не хватит, чтобы отобразить в них все элементы из F_0. □

Вернемся к доказательству утверждения 8.3. Пусть перестановка $P \in S_N$ такова, что $P^{-1}gP \in G$ для любого $g \in G$. Если $P \notin G$, то по лемме 8.1 перестановка P переводит какие-то два смежных ребра $\{i,j\}$ и $\{i,k\}$ графа K_n в пару несмежных ребер $\{a,b\}$ и $\{c,d\}$. Кроме того, по лемме 8.5, также найдутся два несмежных ребра $\{i_1,j_1\}$ и $\{i_2,j_2\}$, которые P переводит в несмежные ребра $\{a',b'\}$ и $\{c',d'\}$. Так как a, b, c и d, а также a', b', c' и d' попарно различны, то найдется перестановка $g \in S_n$ такая, что

$$g(a) = a', \quad g(b) = b', \quad g(c) = c', \quad g(d) = d'.$$

Но тогда

$$\{i,j\} \xmapsto{P} \{a,b\} \xmapsto{g} \{a',b'\} \xmapsto{P^{-1}} \{i_1,j_1\}$$

и

$$\{i,k\} \xmapsto{P} \{c,d\} \xmapsto{g} \{c',d'\} \xmapsto{P^{-1}} \{i_2,j_2\},$$

т.е. композиция $P^{-1}g\,P$ переводит некоторые смежные ребра в несмежные и, значит, не принадлежит G. Полученное противоречие завершает доказательство утверждения. □

9 Завершение доказательства Основной теоремы

Итак, пусть $f\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ — изометрия, $X \in \mathcal{M}^g_{[n]}$, и $f(X) = Y$. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы $B_\varepsilon(X)$ и $B_\varepsilon(Y)$ были каноническими окрестностями. Фиксируем какие-нибудь $\rho_X \in \Pi^{-1}(X)$ и $\rho_Y \in \Pi^{-1}(Y)$, тогда отображение $h_{\varepsilon,\rho_X,\rho_Y}\colon U_\varepsilon(\rho_X) \to U_\varepsilon(\rho_Y)$ из следствия 7.3 является ограничением линейного отображения $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ с матрицей перестановки $P \in S_N$ (это линейное отображение также будем обозначать через P).

Лемма 9.1. *При $n \geq 4$ перестановка $P \in S_N$ принадлежит нормализатору подгруппы G, т.е. $P^{-1}gP \in G$ для любого $g \in G$.*

Доказательство. Легко видеть, что подмножество в $\mathcal{M}^g_{[n]}$, состоящее из пространств, в которых все ненулевые расстояния различны, всюду плотно в $\mathcal{M}^g_{[n]}$. Кроме того, если Z — такое пространство, то при любой нумерации точек из Z все компоненты вектора ρ_Z различны, поэтому каждое $Q \in S_N$ однозначно задается тем, куда оно переводит произвольную фиксированную точку ρ_Z.

Выберем в качестве $X \in \mathcal{M}^g_{[n]}$ пространство, в котором все ненулевые расстояния различны. По предложению 5.11 и следствию 7.7, для каждого $\rho \in \Pi^{-1}(X)$ существует такое $\rho' \in \Pi^{-1}(Y)$, что отображение $h_{\varepsilon,\rho,\rho'}\colon U_\varepsilon(\rho) \to U_\varepsilon(\rho')$ является ограничением линейного отображения с той же матрицей P. Следовательно, $P\bigl(\Pi^{-1}(X)\bigr) \subset \Pi^{-1}(Y)$. Так как матрица P

невырождена, то для любых неравных $\rho_1, \rho_2 \in \Pi^{-1}(X)$ имеем $P(\rho_1) \neq P(\rho_2)$. Наконец, так как $\#\Pi^{-1}(X) = \#\Pi^{-1}(Y)$, то P отображает $\Pi^{-1}(X)$ биективно на $\Pi^{-1}(Y)$.

Таким образом, $\rho'_X := P^{-1}gP(\rho_X) \in \Pi^{-1}(X)$, а это означает, что существует такое $g' \in G$, для которого $\rho'_X = g'(\rho_X)$. Однако, как мы отметили выше, отображение $P^{-1}gP \in S_N$ однозначно задается тем, куда переходит ρ_X. Таким образом, $P^{-1}gP = g' \in G$, что и требовалось. □

Итак, из леммы 9.1 и утверждения 8.3 следует, что при $n \geq 8$ перестановка P содержится в G, поэтому векторы ρ_X и $\rho_{f(X)}$ отличаются на перенумерацию вершин, т.е. $X = f(X)$. Тем самым, мы показали, что на всюду плотном подмножестве пространства $\mathcal{M}^g_{[n]}$ а, значит, и на всем $\mathcal{M}^g_{[n]}$, изометрия f неподвижна. Осталось воспользоваться тем, что объединение $\cup_{n\geq 8}\mathcal{M}^g_{[n]}$ всюду плотно в $\mathcal{M}$. Основная теорема доказана.

Список литературы

[1] `http://mathoverflow.net/questions/212364/on-the-global-structure-of-the-gromov-hausdorff-metric-space`

[2] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[3] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Local Structure of Gromov-Hausdorff Space near Finite Metric Spaces in General Position*, ArXiv e-prints, arXiv:1611.04484, 2016.

[4] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic.* ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.

[5] Chowdhury S., Memoli F. *Constructing Geodesics on the Space of Compact Metric Spaces.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.02385, 2016.

[6] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Realizations of Gromov-Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, arXiv:1603.08850, 2016.

[7] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Gromov–Hausdorff Distance, Irreducible Correspondences, Steiner Problem, and Minimal Fillings.* ArXiv e-prints, 1604.06116, 2016.

[8] Ivanov A.O., Tuzhilin A.A. *Geometry of Compact Metric Space in Terms of Gromov-Hausdorff Distances to Regular Simplexes.* ArXiv e-prints, arXiv:1607.06655, 2016.

[9] Ivanov A.O., Iliadis S., Tuzhilin A.A. *Local Structure of Gromov-Hausdorff Space, and Isometric Embeddings of Finite Metric Spaces into this Space.* ArXiv e-prints, arXiv:1604.07615, 2016.

[10] Фоменко А.Т., Фукс Д. Б. *Курс гомотопической топологии.* М.: Наука, 1989.

[11] John F. *On quasi-isometric mappings, I*, Commun. Pure Appl. Math., 1968, v. 21, pp. 77–110.

[12] Mazur S., Ulam S. *Sur les transformations isométriques d'espaces vectoriels normés*, C. R. Acad. Sci. Paris, 1932, v. 194, pp. 946–948.