Кто придумал расстояние Громова–Хаусдорфа?

А.А.Тужилин

2 декабря 2016 г.

Аннотация

Одним из красивейших понятий метрической геометрии является расстояние Громова–Хаусдорфа, измеряющее различие между двумя произвольными метрическими пространствами. Чтобы его определить, будем изометрично вкладывать эти пространства в различные метрические пространства и измерять расстояние Хаусдорфа между образами. Наилучшее сопоставление отвечает наименьшему расстоянию Хаусдорфа. В таком виде сравнивать метрические пространства предложил М. Громов в 1981 году [2], [3]. В результате на семействе классов изометрии компактных метрических пространств определенная Громовым функция расстояния оказалась метрикой, называемой теперь *метрикой Громова–Хаусдорфа.* Но был ли Громов первым, кто ввел в рассмотрение это расстояние? Оказывается, за 6 лет до работы Громова, т.е. в 1975 году, появилась статья [1] другого математика — Дэвида Эдвардса, в которой это же расстояние определялось несколько другим способом. Кроме того, в этой работе Эдвардс сформулировал и доказал ряд основных свойств определенного им расстояния. Кажется несправедливым, что работа Эдвардса [1] практически никем не упоминается, включая наиболее известных специалистов по метрической геометрии, см. например [4], [5], [6], [7]. Цель настоящей публикации — восполнить этот пробел.

В настоящей статье речь идет об авторстве знаменитого понятия метрической геометрии — расстояния Громова–Хаусдорфа. Считается, что это расстояние впервые появилось в работах М. Громова 1981 года [2], [3]. Однако еще в 1975 году вышла статья Д. Эдвардса “The Structure of Superspace” [1], в которой расстояние Громова–Хаусдорфа было определено, впрочем, несколько в другом, но эквивалентном виде.

План настоящей статьи следующий. Мы начнем (разделы 1, 2 и 3) с хорошо известных базовых определений и результатов, связанных с расстоянием Громова–Хаусдорфа, подробности см. в [5], [6], [7], [8]. Затем мы расскажем (раздел 4), какие из этих понятий и результатов, и в какой форме, возникли в пионерской работе Д. Эдвардса [1].

1 Определение и основные свойства расстояния Громова–Хаусдорфа

Пусть X — произвольное множество. Каждую симметричную функцию $d : X \times X \to [0, \infty]$ будем называть *расстоянием на* X. Если d не принимает значение ∞, положительно определена и удовлетворяет неравенству треугольника, то она называется *метрикой*, а множество X с заданной на нем метрикой d — *метрическим пространством*. Если на X определена функция расстояния, то ее значение на паре точек x, y будем обозначать через $|xy|$ в случае, когда это не вызывает путаницы. Если A — непустое подмножество X, а $x \in X$, то положим $|xA| = \inf\bigl\{|xa| : a \in A\bigr\}$. Для $\varepsilon > 0$ подмножество A метрического пространства X называется ε*-сетью*, если $|xA| < \varepsilon$ для любого $x \in X$.

Отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y называется *изометричным*, если для любых $x, x' \in X$ выполняется $\bigl|f(x)f(x')\bigr| = |xx'|$. Биективное изометричное отображение называется *изометрией*. Через $\mathcal{M}$ будем обозначать множество компактных метрических пространств, рассматриваемых с точностью до изометрии.

Пусть X — некоторое метрическое пространство, A — непустое подмножество X, и r — положительное вещественное число. Определим r*-окрестность множества* A так: $U_r(A) = \{y \in X : |yA| < r\}$. Если A и B — непустые подмножества X, то *расстоянием Хаусдорфа между* A *и* B называется величина

$$d_H(A, B) = \inf\bigl\{r : A \subset U_r(B)\ \&\ U_r(A) \supset B\bigr\}.$$

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z), состоящую из метрического пространства Z и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X, Y). *Расстоянием* $d_{GH}(X, Y)$ *по Громову–Хаусдорфу между* X *и* Y называется точная нижняя грань чисел r, для которых существует реализация (X', Y', Z) пары (X, Y) такая, что $d_H(X', Y') \le r$.

Теорема 1. *На множестве* $\mathcal{M}$ *расстояние* d_{GH} *является метрикой.*

Множество $\mathcal{M}$ с метрикой d_{GH} называется *пространством Громова–Хаусдорфа*. Приведем традиционный начальный отрезок списка свойств пространства $\mathcal{M}$, который, с теми или иными вариациями, обычно встречается во введениях к тематикам, связанным с расстоянием Громова–Хаусдорфа. Напомним, что метрика пространства X называется *строго внутренней*, если любые две точки из X соединяются кратчайшей кривой, длина которой равна расстоянию между этими точками.

Теорема 2. *Пространство Громова–Хаусдорфа*

(1) *стягиваемое*;

(2) *неограниченное и, значит, некомпактное*;

(3) *содержит всюду плотное подмножество, составленное из всех конечных метрических пространств*;

(4) *сепарабельное*;

(5) *не локально компактное*;

(6) *полное.*

Метрика Громова–Хаусдорфа — строго внутренняя.

2 Другие определения расстояния Громова–Хаусдорфа

Приводимые ниже результаты позволяют дать эквивалентные определения расстояния Громова–Хаусдорфа, которые получаются из правых частей формул теоремы 3, теоремы 4 и следствия 1.

2.1 Допустимые метрики на дизъюнктном объединении пространств

Приводимый ниже результат говорит о том, что при определении расстояния Громова–Хаусдорфа можно рассматривать лишь метрические пространства вида $(X \sqcup Y, \rho)$, где ограничения метрики ρ на X и Y совпадают с исходными метриками. Такие ρ будем называть *допустимыми метриками для X и Y*, а множество всех допустимых метрик для данных X и Y обозначим через $\mathcal{D}(X,Y)$. Для каждой метрики $\rho \in \mathcal{D}(X,Y)$ через ρ_H обозначим соответствующее ей расстояние Хаусдорфа.

Теорема 3. *Для произвольных метрических пространств X и Y имеем*

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\bigl\{\rho_H(X,Y) : \rho \in \mathcal{D}(X,Y)\bigr\}.$$

2.2 Соответствия и их искажения

Напомним, что для произвольных множеств X и Y каждое подмножество декартова произведения $X \times Y$ называется *отношением между X и Y*. Пусть $\pi_X\colon (x,y) \mapsto x$ и $\pi_Y\colon (x,y) \mapsto y$ — канонические проекции. Отношение R называется *соответствием*, если ограничения на R проекций π_X и π_Y являются сюръекциями. Множество всех соответствий между X и Y обозначим через $\mathcal{R}(X,Y)$.

Если X и Y — метрические пространства, то для каждого непустого отношения σ между X и Y определено его *искажение*

$$\operatorname{dis}\sigma = \sup\Bigl\{\bigl||xx'| - |yy'|\bigr| : (x,y), (x',y') \in \sigma\Bigr\}.$$

Теорема 4. *Для произвольных метрических пространств X и Y выполняется*
$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\bigl\{\operatorname{dis} R : R \in \mathcal{R}(X,Y)\bigr\}.$$

2.3 Изометричные вложения в пространство ограниченных последовательностей

Обозначим через ℓ^∞ пространство всех ограниченных вещественных последовательностей с метрикой, заданной нормой $\bigl\|(x_1, x_2, \dots)\bigr\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$.

Теорема 5. *Пусть X — сепарабельное метрическое пространство, тогда X изометрично вкладывается в ℓ^∞.*

Следствие 1. *Пусть X и Y — сепарабельные метрические пространства. Тогда*
$$d_{GH}(X,Y) = \inf d_H\bigl(\varphi(X), \psi(Y)\bigr),$$
где точная нижняя грань берется по всем изометричным вложениям $\varphi\colon X \to \ell^\infty$ и $\psi\colon Y \to \ell^\infty$.

3 Расстояние Громова–Хаусдорфа и ε-симметрии

Определение 1. Для $\varepsilon > 0$, отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y называется *ε-изометрией*, если $\operatorname{dis} f \le \varepsilon$ и $f(X)$ является ε-сетью.

Теорема 6. *Пусть X и Y — произвольные метрические пространства, и $\varepsilon > 0$. Тогда*

(1) *если $d_{GH}(X,Y) < \varepsilon$, то существует 2ε-изометрия $f\colon X \to Y$;*

(2) *если существует ε-изометрия $f\colon X \to Y$, то $d_{GH}(X,Y) < 2\varepsilon$.*

Для метрических компактов X и Y определим расстояние $\widehat{d_{GH}}(X,Y)$, положив его равным точной нижней грани тех $\varepsilon > 0$, для каждого из которых существуют ε-изометрии $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$. Известно, что $\widehat{d_{GH}}(X,Y)$ отличается от d_{GH}.

4 Результаты Д. Эдвардса

Перейдем теперь к описанию того, что сделано в работе [1]. Д. Эдвардс определяет два расстояния между компактными метрическими пространствами. В определении первого из них он использует понятие ε-изометрии $f\colon X \to Y$, отличающееся от принятого в настоящее время и приведенного в определении 1.

Определение 2. Для метрических пространств X, Y и числа $\varepsilon > 0$ назовем *ε-изометрией в смысле Эдвардса* каждое отображение $f\colon X \to Y$, для которого $\operatorname{dis} f \le \varepsilon$.

Таким образом, Эдвардс не требует, чтобы образ ε-изометрии $f(X)$ был всюду плотен в Y.

Далее Эдвардс вводит расстояние между метрическими компактами ровно так же, как в разделе 3 мы определяли расстояние $\widehat{d_{GH}}$. При этом ε-изометрии он понимает в своем смысле. Отметим, что в работе Эдвардса это расстояние играет вспомогательную роль. Приведем формальное определение этого расстояния.

Определение 3. *Первым расстоянием Эдвардса* $d_E(X,Y)$ между компактными метрическими пространствами X и Y назовем точную нижнюю грань тех $\varepsilon > 0$, для каждого из которых существуют ε-изометрии в смысле Эдвардса $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to X$.

Затем Эдвардс показывает, что

(1) расстояние d_E является метрикой на семействе $\mathcal{M}$ классов изометрии компактных метрических пространств;

(2) пространство $(\mathcal{M}, d_E)$ стягиваемо;

(3) конечные метрические пространства всюду плотны в $(\mathcal{M}, d_E)$;

(4) пространство $(\mathcal{M}, d_E)$ сепарабельно;

(5) компактные связные метрические полиэдры всюду плотны в замкнутом подпространстве $(\mathcal{M}, d_E)$, состоящем из связных метрических пространств;

(6) луч $[0,\infty) \subset \mathbb{R}$ изометрично вкладывается в $(\mathcal{M}, d_E)$, поэтому $(\mathcal{M}, d_E)$ некомпактно;

(7) гильбертов куб топологически вкладывается в $(\mathcal{M}, d_E)$, поэтому $(\mathcal{M}, d_E)$ бесконечномерно;

(8) в $(\mathcal{M}, d_E)$ нет ни одной вполне ограниченной окрестности, в частности, $(\mathcal{M}, d_E)$ не является локально компактным.

Эдвардс также определяет второе расстояние, основанное на теореме 5.

Определение 4. *Вторым расстоянием Эдвардса* $d_E^H(X,Y)$ между компактными метрическими пространствами X и Y назовем точную нижнюю грань расстояний Хаусдорфа между подмножествами $A, B \subset \ell^\infty$, изометричными соответственно X и Y.

Заметим, что, в силу следствия 1, на пространстве $\mathcal{M}$ классов изометрии метрических компактов **второе расстояние Эдвардса совпадает с расстоянием Громова–Хаусдорфа**.

Далее, Эдвардс устанавливает следующие свойства определенного им расстояния d_E^H:

(1) расстояние d_E^H является метрикой на семействе $\mathcal{M}$ классов изометрии компактных метрических пространств (сравните с теоремой 1);

(2) $d_E^H \geq \frac{1}{2}d_E$ (аналог теоремы 4);

(3) пространство $(\mathcal{M}, d_E^H)$ стягиваемое (сравните с пунктом (1) теоремы 2);

(4) конечные метрические пространства всюду плотны в $(\mathcal{M}, d_E^H)$ (сравните с пунктом (3) теоремы 2);

(5) пространство $(\mathcal{M}, d_E^H)$ сепарабельное (сравните с пунктом (4) теоремы 2);

(6) компактные связные метрические полиэдры всюду плотны в замкнутом подпространстве $(\mathcal{M}, d_E^H)$, состоящем из связных метрических пространств;

(7) луч $[0,\infty) \subset \mathbb{R}$ изометрично вкладывается в $(\mathcal{M}, d_E^H)$, поэтому $(\mathcal{M}, d_E^H)$ некомпактно (сравните с пунктом (1) теоремы 2);

(8) в $(\mathcal{M}, d_E^H)$ нет ни одной вполне ограниченной окрестности, в частности, $(\mathcal{M}, d_E^H)$ не является локально компактным (сравните с пунктом (5) теоремы 2);

(9) пространство $(\mathcal{M}, d_E^H)$ — полное (сравните с пунктом (6) теоремы 2).

Таким образом, Эдвардс в работе [1] не только **определил расстояние Громова–Хаусдорфа** между классами изометрии компактных метрических пространств, но и **заложил основы теории, доказав целый ряд важных теорем, описывающих свойства этого расстояния**. Тем самым, сказанное выше показывает, что работа Дэвида Эдвардса [1] является классической в метрической геометрии, и отсутствие ссылок на нее — обидная незаслуженная случайность. Думаю, что эта работа должна занять подобающее ей почетное место в истории метрической геометрии, чему, надеюсь, послужит настоящая статья, а также сделанные автором исправления в русской и английской версиях Википедии.

5 Добавление: известные цитирования работы Д. Эдвардса

В завершении настоящей статьи, приведем ряд упоминаний работы [1], которые были найдены мной в литературе (безусловно, я не претендую на полноту списка).

Википедия (до моих исправлений): В русской Википедии работа Д. Эдвардса вообще не упоминалась. В английской Википедии было написано следующее: “The notion of Gromov–Hausdorff convergence was first used by Gromov to prove that any discrete group with polynomial growth is virtually nilpotent (i.e. it contains a nilpotent subgroup of finite index). See Gromov’s theorem on groups of polynomial growth. (Also see D. Edwards for an earlier work.)"

Единственный обнаруженный мной автор, статья которого связана с расстоянием Громова–Хаусдорфа, и который упоминал работу Д. Эдвардса, — **F.Latremoliere**, см. например [9]. Вот соответствующая цитата: "On the other hand, Edward [1] introduced what is now known as the Gromov–Hausdorff distance for compact metric spaces, based upon consideration about quantum gravity, suggesting that one would have to work, not on one spacetime, but rather on a "super-space" of possible space–times, metrized by a generalized Hausdorff distance, thus allowing fluctuations in the gravitational field. Edwards was following upon the suggestion to study quantum gravity by means of a superspace by Wheeler [10]. It should be noted that Gromov introduces his metric [3] for more general locally compact metric spaces, and used his metric toward major advances in group theory."

На **сайте Дэвида Эдвардса** [11] автор статьи [1] пишет: "This paper is related to Wheeler's notions of quantum geometrodynamics; it includes my defining a complete metric on the space of isometry classes of compact metric spaces — it was later rediscovered by Gromov and is called the Gromov metric."

Список литературы

[1] Edwards D.A. *The Structure of Superspace*, published in: Studies in Topology, Academic Press, 1975.

[2] Gromov M.L. *Structures metriques pour les varietes riemanniennes*, Textes mathematiques. Recherche (Том 1), CEDIC/Fernand Nathan, 1981.

[3] Gromov M.L. *Groups of Polynomial growth and Expanding Maps*, Publications mathematiques I.H.E.S., 53, 1981.

[4] Gromov M.L. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Birkhauser Boston Inc., Boston, MA, 1999.

[5] Gromov M.L. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, with Appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes. Boston, MA: Birkhauser, 2007.

[6] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. *Курс метрической геометрии.* Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.

[7] Burago D., Burago Yu., Ivanov S. *A Course in Metric Geometry.* Graduate Studies in Mathematics, vol.33. A.M.S., Providence, RI, 2001.

[8] Ivanov A.O., Nikolaeva N.K., Tuzhilin A.A. *The Gromov-Hausdorff Metric on the Space of Compact Metric Spaces is Strictly Intrinsic.* ArXiv e-prints, arXiv:1504.03830, 2015.

[9] Latremoliere F. *The Quantum Gromov-Hausdorff Propinquity.* ArXiv e-prints, arXiv:1302.4058, 2013.

[10] Wheeler J. *Supersuper and the nature of quantum geometrodynamics*, Battelle rencontres, 1967 Lectures in mathematics and physics (DeWitt C. and J.Wheeler, eds.), 1968.

[11] `http://alpha.math.uga.edu/~davide/`