Математические модели экономики

И.М. Никонов, В.В. Трофимов, А.А. Тужилин

19 июня 2022 г.
10:14:30

Оглавление

Введение

Основной объект изучения — математические модели, которые позволяют описывать и исследовать экономические системы и процессы. Практические задачи моделирования условно делятся на три класса:

- анализ экономических систем;
- экономическое прогнозирование;
- выработка управленческих решений на всех уровнях экономических систем.

Отметим, что при построении моделей используются самые разнообразные разделы математики: теория графов, теория меры (вероятность, статистика), дифференциальные уравнения, динамические системы, геометрия, вариационное исчисление и т.д.

Имеются следующие основные типы математических моделей:

- дискретные и непрерывные;
- статические и динамические;
- линейные и нелинейные;
- оптимизационные, детерминированные, стохастические.

Поясним сказанное. Как правило, модель содержит параметры и переменные. Например, потребность предприятия в ресурсе зависит от величин двух различных видов: норм расходов материалов a_j и объемов выпуска продукции x_j. Здесь величины x_j — переменные, а a_j — параметры.

В некоторых случаях переменные могут принимать лишь целые неотрицательные значения (число рабочих на предприятии, число пошитых костюмов, число произведенных телевизоров и т.д.). Такие модели называются ***дискретными***. Если же переменные принимают в определенных пределах любые неотрицательные значения (расход электроэнергии и воды, труд), то модель называют ***непрерывной***.

Пусть в модели изучается зависимость ее параметров от времени. Такую модель будем называть ***динамической***. Если же параметры от времени не зависят, то модель называется ***статической***.

После того как определены параметры модели, необходимо указать множество X допустимых значений переменных. Это так называемые ограничения модели. Они могут быть как линейными, так и нелинейными. В соответствии с этим модели бывают ***линейными*** и ***нелинейными***.

Рассмотрим теперь примеры ***оптимизационных задач***. Эти задачи связаны с нахождением объектов, которые наилучшие в том или ином смысле. Например, отыскание ***Парето-эффективных состояний*** является такого типа задачей и ее можно сформулировать следующим образом. Если есть набор функций $f_1, \dots, f_n$, определенных на множестве W, то требуется найти такие точки $x \in W$ (***оптимумы Парето***), что не существует $x' \in W$ с $f_j(x') \geq f_j(x)$ для всех j и $f_i(x') > f_i(x)$ для некоторого i. Другой пример связан с нахождением максимальной прибыли при производстве и продаже некоторого товара. Эта проблема приводит к поиску экстремалей следующей вариационной задачи:

$$\int_a^b L\big(t, u(t), u'(t)\big)\, dt \to \mathrm{ext}\,.$$

Модель называется ***детерминированной***, если ее поведение в будущем однозначно определяется состоянием в настоящий момент времени. Такие модели, как правило, описываются системами дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = F_i(t, x_l, \dots, x_n),$$

$i = 1, \ldots, n$, где $x_1, \ldots, x_n$ — параметры системы. Если F_i — линейные функции, то мы имеем ***линейную модель***, а в противном случае — это ***нелинейная модель***.

Стохастические модели связаны, как правило, с предсказаниями тех или иных экономических событий при неопределенных условиях, например, при стохастических ограничениях на параметры.

При анализе экономических систем используются все указанные типы моделей. Если рассматривается динамическая модель, то основную роль играет понятие ***траектории***, т.е. кривой в пространстве параметров, которую описывает точка при своем движении во времени. Важнейшим понятием здесь является фазовое пространство, которое в геометрии появляется как кокасательное расслоение T^*M к пространству параметров M, причем предполагается, что M — гладкое многообразие.

Анализ экономической системы состоит в том, что ее развитие рассматривается как движение в фазовом пространстве по некоторой траектории. Один из главных вопросов здесь — это вопрос об устойчивости траекторий. Для различных моделей в рамках этого класса задач важное место занимают задачи о магистралях. ***Магистраль*** — это траектория развития, на которой за длительное время достигается максимальная скорость роста экономики.

При экономическом прогнозировании часто используются стохастические модели и методы математической статистики. Прогноз представляет собой научно обоснованное суждение о возможных состояниях экономической системы в будущем или об альтернативных путях и сроках достижения этих состояний.

В этом классе задач важное значение имеет так называемая ***теория катастроф***, связанная с изучением внезапных изменений в экономических системах при медленных внешних влияниях. Методы анализа таких ситуаций были развиты французским математиком Рене Томом. В качестве примера рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} = a\,x,$$

зависящее от параметра $a \in \mathbb{R}$. Если $a < 0$, то решения периодические — линейные комбинации вида

$$c_1 \sin \sqrt{|a|}\,t + c_2 \cos \sqrt{|a|}\,t.$$

Если $a = 0$, то решения имеют вид линейных функций

$$x(t) = a_1 t + c_2.$$

Если $a > 0$, то решения имеют экспоненциальный рост — линейные комбинации вида

$$c_1 e^{\sqrt{a}\,t} + c_2 e^{-\sqrt{a}\,t}.$$

Итак, при $a = 0$ происходит скачкообразная перестройка фазового портрета, рис. 1.

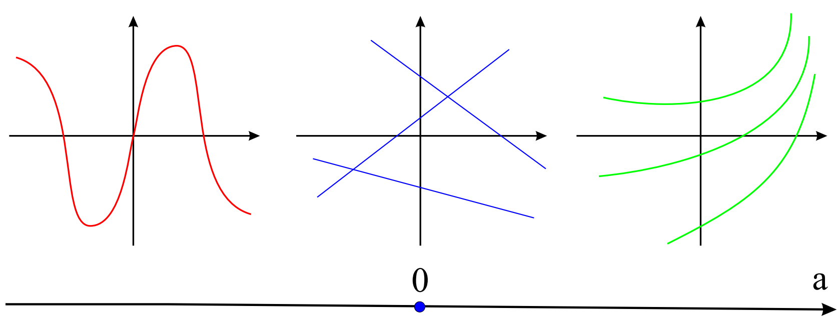

Рис. 1: Перестройка фазового портрета

При изучении задач выработки управленческих решений используются фундаментальные понятия ***управления*** и ***управляющего параметра***. Отметим здесь только один класс задач оптимального управления. Для модели, описываемой системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, u),$$

требуется найти такое значение $u = u^*$ параметра управления u, что функционал

$$J = \int_a^b L(x, u)\,dt$$

принимает наименьшее значение.

Немного истории

Первым математическим экономистом, по-видимому, был ***Лука Бартоломео де Пачоли*** (1445 – 1517 гг.) — итальянский математик, один из основоположников современных принципов бухгалтерии.

Рис. 2: Лука Бартоломео де Пачоли (1445 – 1517 гг.)

В 1470 г. он закончил свою первую книгу, которую написал для своих воспитанников, — учебник коммерческой арифметики с изложением изобретенной им системы двойного счета в бухгалтерии[1]. Через два года Л. Пачоли покинет Рим и примет монашеский постриг, став монахом-францисканцем и одним из крупнейших математиков Европы конца XV века. До конца жизни он преподавал математику в лучших университетах Италии.

Вторым по хронологии следует отметить английского торговца, статистика и экономиста ***Уильяма Петти*** (1623-1687 гг.).

Рис. 3: Уильям Петти (1623-1687 гг.))

В предисловии к “Политической арифметике” он указывал, что вместо употребления слов в сравнительной и превосходной степени, он вступил на путь выражения своих мнений на языке чисел, весов и мер. Экономиста Уильяма Петти вполне заслуженно называют первым статистиком. Другой знаменитой книгой Уильяма Петти стал “Трактат о налогах и сборах”. Здесь он одним из первых формулирует гипотезу, что ценность предметов определяется количеством затраченного на их производство труда.

[1] ***Двойная запись*** — способ ведения бухгалтерского учёта, при котором каждое изменение состояния средств организации отражается по крайней мере на двух бухгалтерских счетах (дебет — кредит), обеспечивая общий баланс

Впрочем, традиционно принято считать, что математические методы анализа макроэкономических процессов впервые применены лейб-медиком короля Людовика XV ***Франсуа Кенэ*** (1694 – 1774 гг.), французским экономистом, основоположником школы физиократов[2].

Рис. 4: Франсуа Кенэ (1694 – 1774 гг.)

В 1758 г. он напечатал Экономическую таблицу с объяснениями. В ней была сделана первая попытка количественно описать национальную экономику на основе принципа незыблемости и справедливости абсолютной монархии — гаранта порядка и законов.

Любопытные факты. В своем труде "Китайский деспотизм" (1767) Кенэ, описывая политику и общество Китая, обращается не столько к действительным сведениям об азиатской стране, сколько к своим собственным представлениям о благотворности такого восточного деспотизма, при котором государство якобы управляется на основе "естественного закона". Николя Бодо, ученик всемерно почитавшего учение конфуцианства Кенэ, назвал своего учителя "Конфуцием Европы".

В 1773 году Кенэ издал свой последний труд, в котором пытался найти квадратуру круга. Ученики Кенэ усмотрели в появлении этого труда признак упадка его умственных способностей. В это же время у Кенэ была отнята должность придворного врача.

Книга французского экономиста, философа и математика ***Антуана Огюста Курно*** (1801 – 1877 гг.) "Исследование математических принципов теории богатства", опубликованная во Франции в 1838 г., является его главным вкладом в экономическую науку.

Рис. 5: Антуан Огюст Курно (1801 – 1877 гг.)

В этой работе впервые использованы количественные методы для анализа конкуренции между товарами при различных рыночных ситуациях.

[2] Название ***физиократия*** (от греческого физис — природа, кратос — сила, власть, господство) дано Дюпон де Немуром — первым издателем сочинений Кенэ — ввиду того, что единственным самостоятельным фактором производства эта школа считала почву, природу. Впрочем, это название могло бы характеризовать учение физиократов и в другом отношении, так как они были сторонниками "естественного порядка" в хозяйственной жизни общества.

В последующие годы происходила интенсивная математизация экономической теории. Например, в книге ***Уильяма Джевонса*** (1835-1882 гг.) “Об общей математической теории политической экономии” (1862 г.) изложена одна из первых версий теории полезности.

Рис. 6: Уильям Стэнли Джевонс (1835 – 1882 гг.)

В историю экономической мысли У. Джевонс вошел в первую очередь как автор книги “Теория политической экономии”, выход которой одновременно с основными трудами ***К. Менгера*** (1840 – 1921 гг.) — основателя австрийской школы экономики и Л. Вальраса (1834 – 1910 гг.) — основателя лозаннской школы ознаменовал начало маржиналистской[3] революции в экономике.

Рис. 7: Карл Менгер (1840 – 1921 гг.)

В 1871 году К. Менгер опубликовал книгу “Основания политической экономии”, которая принесла ему известность и стала основой для формирования австрийской экономической школы.

[3] ***Маржинализм*** (от латинского марго — край) — направление в экономической науке, широко применяющее методы анализа, основанные на оперировании «предельными» (т.е. приростными) понятиями в экономике (производными), исследующее явления с точки зрения максимизирующего собственное удовлетворение отдельного хозяйствующего субъекта.

Альфред Маршалл (1842-1924 гг.) — английский экономист, основатель кембриджской школы политической экономии.

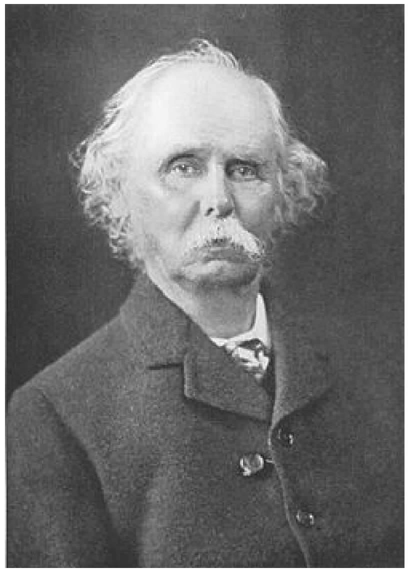

Рис. 8: Альфред Маршалл (1842 – 1924 гг.)

Основы его теории изложены в изданных в 1890 г. "Принципах политической экономии", на протяжении многих десятилетий служивших основным учебником по экономической теории в ряде стран. В этом труде были обобщены достижения раннего маржинализма и заложено начало неоклассической политической экономии[4].

Мари Эспри Леон Вальрас (1834 – 1910 гг.) — французский экономист, лидер лозаннской школы маржинализма, один из крупнейших экономистов XIX в.

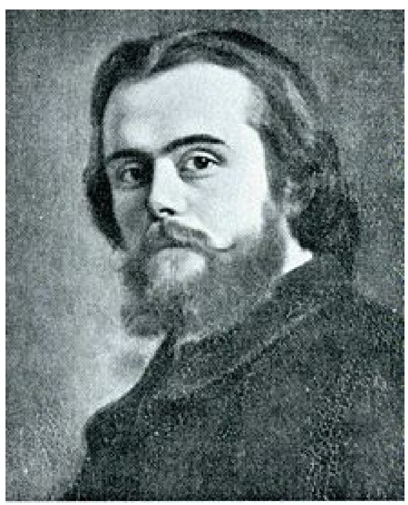

Рис. 9: Мари Эспри Леон Вальрас (1834 – 1910 гг.)

Впервые ввел высшую математику как обязательный элемент экономической науки, предложил концепцию и первую математическую интерпретацию общего экономического равновесия и общий критерий рыночного равновесия — спрос равен предложению. Удивительно, но в 1890-х гг. против использования Л. Вальрасом математических моделей в курсе политической экономии выступало подавляющее большинство его коллег по лозаннскому университету.

[4] ***Неоклассическое*** направление исследует поведение т.н. экономического человека (потребителя, предпринимателя, наёмного работника), который стремится максимизировать доход и минимизировать затраты. Основные категории анализа — предельные величины (см. маржинализм).

Итальянский экономист и социолог ***Вильфредо Парето*** (1848 – 1923 гг.), друг и соратник Л. Вальраса, — один из лидеров лозаннской школы маржинализма.

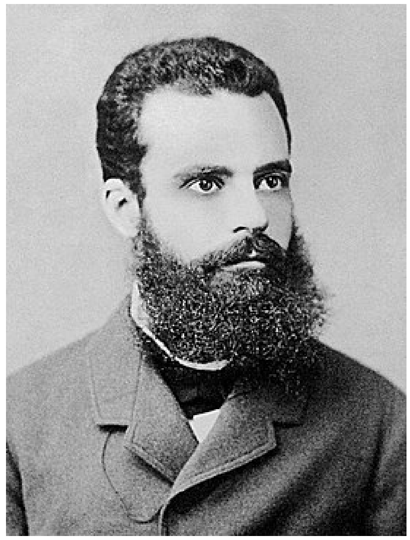

Рис. 10: Вильфредо Федерико Дамасо Парето (1848 – 1923 гг.)

В. Парето сформулировал принцип оптимальности: благосостояние общества достигает максимума, а распределение ресурсов становится оптимальным, если любое изменение этого распределения ухудшает благосостояние хотя бы одного субъекта экономической системы.

В 1911 г. американским экономистом ***Ирвингом Фишером*** (1867 – 1947 гг.), представителем неоклассического направления в экономической науке, была опубликована работа “Покупательная сила денег”, в которой он привел вывод своей знаменитой формулы Фишера.

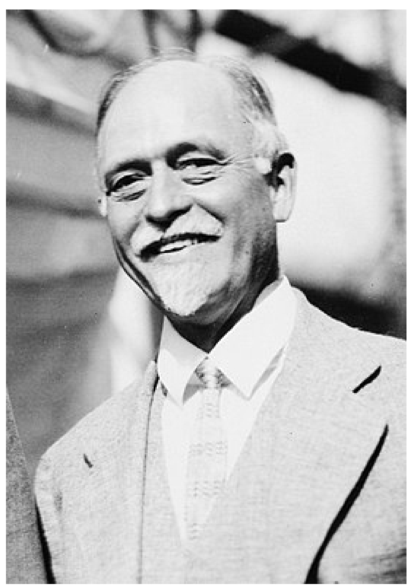

Рис. 11: Ирвинг Фишер (1867–1947 гг.)

Исходя из данной формулы, Фишер делает вывод, что стоимость денег обратно пропорциональна их количеству. Формула Фишера позволяет объяснить явление инфляции с точки зрения нарушений в сфере бумажно-денежного обращения. Таким образом, впервые была построена математическая модель экономики, учитывающая влияние инфляции.

Евгений Евгеньевич Слуцкий (1880 – 1948 гг.) — выдающийся российский и советский математик, статистик и экономист.

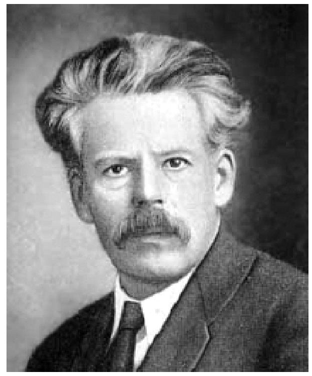

Рис. 12: Евгений Евгеньевич Слуцкий (1880 – 1948 гг.)

Провел анализ модели поведения потребителя и вывел "уравнение Слуцкого". Е.Е.Слуцкий — один из создателей современной теории случайных функций (распределений в функциональных пространствах). Он также вел работы по параметрам корреляции (условие и теорема Слуцкого).

Василий Васильевич Леонтьев (1905 – 1999 гг.) — советский и американский экономист.

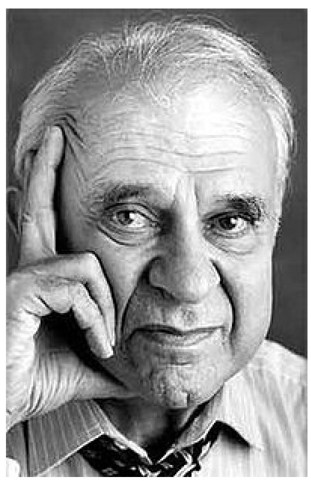

Рис. 13: Василий Васильевич Леонтьев (1905 – 1999 гг.)

Один из создателей теории межотраслевого анализа, лауреат Нобелевской премии по экономике (1973г.). Этой награды он был удостоен "за развитие метода затраты–выпуск и за его применение к важным экономическим проблемам".

Любопытные факты. В.В.Леонтьев выехал из СССР в 1928 г. в Китай в качестве специалиста по экономике железнодорожного транспорта. В 1931 г. переехал в США. Причина эмиграции — запрещение в СССР к публикации статьи Леонтьева с размышлениями о путях развития науки. "Это была историко-аналитическая статья, страшно далекая от политики, от идеологии. И если запретили даже ее... Я понял, что здесь наукой невозможно будет заниматься."

После начала Второй мировой войны В.В.Леонтьев работал консультантом по экономическому планированию для военно-воздушных сил США. Под его руководством была построена матрица "затраты — выпуск" для экономики Германии. Матрица служила основой для выбора целей американскими ВВС.

В начале 1990-х годов В.В.Леонтьев приезжал в Российскую Федерацию с предложением помощи в реформировании российской экономики. Вернувшись в Америку, он сказал: "Я туда больше не поеду. Они ничего не слушают".

В 1992 году подписал "Предупреждение человечеству".

Леонид Витальевич Канторович (1912 – 1986 гг.) — советский математик и экономист.

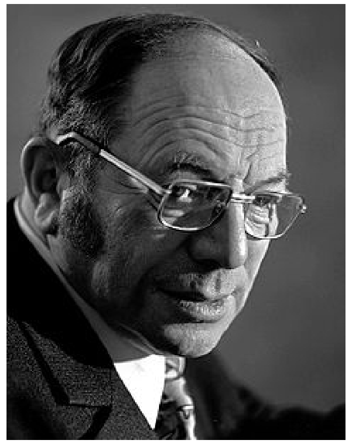

Рис. 14: Леонид Витальевич Канторович (1912 – 1986 гг.)

Л.В.Канторович — лауреат Нобелевской премии по экономике 1975 г. “за вклад в теорию оптимального распределения ресурсов”. Пионер и один из создателей линейного программирования. В 1939 г. он опубликовал работу “Математические методы организации и планирования производства”, в которой описал задачи экономики, решаемые с помощью открытого им математического метода, тем самым заложил основы линейного программирования.

Глава 1

Пространство товаров

План. Товар, линейная структура, положительный и отрицательный ортанты, план потребления, множество потребления или потребительское множество, выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, открытые множества, замкнутые множества, ограниченные сверху (снизу) подмножества $\mathbb{R}^n$, ограниченные подмножества $\mathbb{R}^n$, система цен или вектор цен, вальрасово или конкурентное бюджетное множество.

1.1 Арифметическое пространство товаров

Товар представляет собой вещь или услугу, имеющую положительную общественную полезность. Он характеризуется своими физическими свойствами, а также временем и местом, где он доступен.

Количество товара может быть выражено числом. Товары будем считать неограниченно делимыми, т.е. количество товара может быть выражено любым неотрицательным вещественным числом.

Предположим, что имеется конечное число различных товаров $A_1, \ldots, A_n$ в количествах $x_1, \ldots, x_n$. Набор товаров характеризуется строчкой $(x_1, \ldots, x_n)$ длины n.

Напомним определение арифметического пространства, с которым будут связаны в дальнейшем все основные конструкции.

Определение 1.1. Множество всех строк длины n, составленных из действительных чисел, называется (вещественным) ***арифметическим пространством*** и обозначается $\mathbb{R}^n$. Итак,

$$\mathbb{R}^n = \big\{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\, i = 1, \ldots, n\big\}.$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется естественная ***линейная структура***, задаваемая с помощью операций

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_b),$$
$$\lambda\,(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n),$$

где $\lambda \in \mathbb{R}$.

Эти операции определяют в пространстве $\mathbb{R}^n$ структуру линейного пространства, т.е. они удовлетворяют следующим свойствам. Для любых $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ выполняется

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(2) $x + y = y + x$;

(3) существует такой элемент $0 \in \mathbb{R}^n$, что $x + 0 = 0 + x$;

(4) существует $-x$ такой, что $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

(5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;

(6) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;

(7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;

(8) $1 \cdot x = x$.

При этом $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ и $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$.

Множество
$$\mathbb{R}^n_+ = \big\{x \in \mathbb{R}^n : x = (x_1, \ldots, x_n),\, x_i \geq 0,\, i = 1, \ldots, n\big\}$$
называется ***положительным ортантом***, а множество $\mathbb{R}^n_- = -\mathbb{R}^n_+$ — ***отрицательным ортантом***.

Определение 1.2. Множество $\mathbb{R}^n_+$, а иногда также и пространство $\mathbb{R}^n$, будем называть ***пространством товаров***.

1.2 Множество потребления

Потребительский набор некоторого участника экономики указывает количество каждого из потребляемых им товаров. Таким образом, потребительский набор — это некоторый вектор в пространстве $\mathbb{R}^n_+$. Множество всех потребительских наборов данного участника экономики назовем ***множеством потребления*** или ***потребительским множеством***.

Часто множество потребления удовлетворяет дополнительным условиям, таким как выпуклость, замкнутость, ограниченность. Напомним определения этих свойств.

Определение 1.3. Подмножество C пространства $\mathbb{R}^n$ называется ***выпуклым***, если $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ для всех $x, y \in C$ и $0 \leq \lambda \leq 1$. Иными словами, выпуклость C означает, что, вместе с любыми двумя своими точками, C содержит и отрезок, соединяющий эти точки.

Так, например, выпуклыми являются стандартный единичный куб $K \subset \mathbb{R}^n$, а также открытый и замкнутый шары $U_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ и $B_r(a) \subset \mathbb{R}^n$ радиуса r с центром в $a = (a_1, \ldots, a_n)$, определенные так:
$$K = \big\{(x_1, \ldots, x_n) : 0 \leq x_i \leq 1,\, i = 1, \ldots, n\big\},$$
$$U_r(a) = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 < r^2\Big\},$$
$$B_r(a) = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 \leq r^2\Big\}.$$

Далее, множество $C \subset \mathbb{R}^n$ называется ***открытым***, если для любой точки $a \in C$ существует открытый шар $U_r(a)$ некоторого радиуса r с центром в a такой, что $U_r(a) \subset C$. Примерами открытых подмножеств в $\mathbb{R}^n$ могут служить открытый шар $U_r(a)$ и открытый куб $\overset{\circ}{K}$
$$\overset{\circ}{K} = \big\{(x_1, \ldots, x_n) : 0 < x_i < 1,\, i = 1, \ldots, n\big\}.$$
Отметим, что замкнутый куб K и замкнутый шар $B_r(a)$ не являются открытыми множествами (докажите), тем не менее, их дополнения в $\mathbb{R}^n$, т.е. множества $\mathbb{R}^n \setminus K$ и $\mathbb{R}^n \setminus B_r(a)$, — открыты.

Множество $F \subset \mathbb{R}^n$ называется ***замкнутым***, если его дополнение в $\mathbb{R}^n$, т.е. множество $\mathbb{R}^n \setminus F$, открыто. Замкнутый куб K и замкнутый шар $B_r(a)$ являются замкнутыми подмножествами в $\mathbb{R}^n$ в смысле только что данного определения.

Открытые и замкнутые множества обладают следующими свойствами.

(1) Пустое множество $\emptyset$ и все $\mathbb{R}^n$ являются оба и открытыми, и замкнутыми множествами.

(2) Пересечение конечного числа открытых множеств само является открытым множеством.

(3) Объединение любого (не обязательно конечного) числа открытых множеств само является открытым множеством.

(4) Пересечение любого (не обязательно конечного) числа замкнутых множеств само является замкнутым множеством.

(5) Объединение конечного числа замкнутых множеств само является замкнутым множеством.

Свойства открытых множеств привели к определению общего понятия топологии на произвольном множестве. Пусть X — множество, а 2^X — семейство всех подмножеств множества X. Множество $\tau \subset 2^X$, элементы которого — подмножества в X, называется ***топологией на*** X, если ***топологией на*** X, если

- пустое множество $\emptyset$ и все X являются элементами τ;
- объединение любого подсемейства $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \tau$ является элементом τ: $\cup_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$;
- пересечение любого *конечного* подсемейства $\{U_i\}_{i=1}^n \subset \tau$ является элементом τ: $\cap_{i=1}^n U_\alpha \in \tau$.

Множество X, для которого задана некоторая топология τ, называется ***топологическим пространством***. Элементы топологии называются ***открытыми множествами***, а дополнения до открытых множеств — ***замкнутыми множествами***. Приведем примеры топологий.

Пример 1.4. (1) Самая "маленькая" топология называется ***антидискретной*** и имеет вид $\tau = \{\emptyset, X\}$.

(2) Самая "большая" топология называется ***дискретной*** и имеет вид $\tau = 2^X$.

(3) Описанное выше семейство открытых подмножеств $\mathbb{R}^n$ образует топологию, которая называется ***стандартной*** и используется в математическом анализе для определения сходимости последовательностей и непрерывности функций. Стандартная топология является частным случаем ***метрической топологии***, которой мы будем заниматься в дальнейших лекциях.

Рассмотрим теперь понятие ограниченности. Подмножество $C \subset \mathbb{R}^n$ называется ***ограниченным снизу***, если существует такой вектор $b = (b_1, \ldots, b_n)$, что для любого $x \in C$ выполняется $x_i \geq b_i$ при каждом $i = 1, \ldots, n$. Меняя в формуле $x_i \geq b_i$ знак $\geq$ на $\leq$, получаем определение множества C, ***ограниченного сверху***. Множество $C \subset \mathbb{R}^n$, ограниченное одновременно снизу и сверху, называется просто ***ограниченным***. Эквивалентная формулировка: множество C ограничено, если существует шар $B_r(a)$ такой, что $C \subset B_r(a)$ (докажите). В качестве примеров ограниченных множеств рассмотрим положительный ортант $\mathbb{R}^n_+$ (ограничен снизу), отрицательный ортант $\mathbb{R}^n_-$ (ограничен сверху) и куб K (ограничен).

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда будем писать

- $x \geq y$, если $x_i \geq y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$;
- $x \gg y$, если $x_i > y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$;
- $x > y$, если $x \geq y$ и $x \neq y$.

Отметим, что перечисленные ограничения на множество потребления данного участника экономики часто носят физический характер и обуславливаются внешней средой. Так, например, существует универсальная константа b такая, что человек в течение дня не может потребить (съесть) больше хлеба, чем b. Или, например, если мы рассматриваем потребление x свободного времени, измеряемое в часах, то $x \leq 24$, т.е. в день нельзя отдохнуть больше 24 часов.

Помимо физических ограничений, участник экономики (в дальнейшем называемый ***потребителем***) сталкивается с экономическими ограничениями: его выбор ограничивается теми потребительскими наборами, которые он может себе позволить. Доступность потребительского набора зависит от двух вещей: его рыночной цены $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и уровня богатства w потребителя, т.е. от его капитала.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — количества товаров $A_1, \ldots, A_n$, и пусть $p = (p_1, \ldots, p_n)$ — цены единицы этих товаров. Вектор $p = (p_1, \ldots, p_n)$ называется ***системой цен*** или ***вектором цен***.

Отметим, что если задана система цен $p_1 \ldots, p_n$, то величина $x_j = (p_i/p_j)x_i$ равна количеству товара A_j, который потребитель может купить, продав товар A_i в количестве x_i при существующих ценах.

Далее, если $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — два вектора из $\mathbb{R}^n$, то через $\langle x, y \rangle$ или $x \cdot y$ будем обозначать их стандартное скалярное произведение:

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Пример 1.5. Если $x \in \mathbb{R}^n_+$ — потребительский набор, а $p \in \mathbb{R}^n_+$ — система цен, то $\langle p, x \rangle$ — стоимость этого потребительского набора.

Опишем теперь множество всех доступных потребителю товаров при данных ценах и финансовых возможностях.

Определение 1.6. ***Вальрасовым*** или ***конкурентным бюджетным множеством*** потребителя $B_{p,w}$ называется множество всех осуществимых потребительских наборов при рыночной цене p для потребителя с капиталом w. Иными словами,

$$B_{p,w} = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \langle p, x\rangle \le w\}.$$

Если учесть еще и физические ограничения на множество потребления, т.е. вместо $\mathbb{R}^n_+$ рассмотреть некоторое его подмножество $X \subset \mathbb{R}^n_+$, то мы получим бюджетное множество $B_{p,w}(X)$, определяемое так:

$$B_{p,w}(X) = \{x \in X : \langle p, x\rangle \le w\}.$$

Глава 2

Элементы теории потребления

План. Отношения, разные способы задания отношений, область определения и область значений отношений, образ точки и образ подмножества для отношения, многозначные отображения, однозначные отображения, типы отношений: рефлексивное, иррефлексивное, симметричное, асимметричное, антисимметричное, транзитивное, полное, отношение эквивалентности, линейный порядок, отношение предпочтения, индуцированная топология, непрерывное отношение предпочтения, функция полезности, соответствующая отношению предпочтения, связное топологическое пространство, локально ненасыщаемое отношение предпочтения, аксиома локальной ненасыщаемости, аксиома ненасыщаемости, функция спроса или вальрасова функция, усиление требования ненасыщаемости, задача максимизации полезности, задача минимизации затрат.

В данной лекции мы будем изучать проблему потребительского спроса, делая лишь самые общие предположения об индивидуальных свойствах и характере потребителя. Будем предполагать, что имеется один потребитель, задача которого — рационально распределить личный бюджет.

На прошлой лекции мы ввели понятие пространство товаров $\mathbb{R}^n_+$ (ассортиментный набор товаров), а также понятие множества потребления $X \subset \mathbb{R}^n_+$ (множества всех мыслимых наборов товаров, доступных потребителю и пригодных для него без учета бюджетных ограничений).

В настоящей лекции мы введем на множестве потребления так называемое отношение предпочтения, выражающее приоритеты потребителя. Иными словами, потребитель может сравнить любые два набора товаров и сделать из них выбор в зависимости от своего вкуса. Это сравнение и задается отношением предпочтения. Заметим, что некоторые наборы товаров могут оцениваться потребителем как одинаково предпочтительные или эквивалентные, что порождает на множестве потребления другое отношение, называемое отношением эквивалентности.

Далее, мы рассмотрим функцию полезности, определенную на множестве потребления, в терминах которой удобно описываются отношения предпочтения. Естественно, при имеющихся физических и бюджетных ограничениях, потребитель стремится выбрать те наборы товаров, которые для него наиболее предпочтительны. Этот выбор потребителя описывается так называемой функцией спроса, являющейся, вообще говоря, многозначным отображением. Природа многозначности функции спроса состоит в том, что для данного потребителя, вообще говоря, может существовать несколько наиболее предпочитаемых наборов товаров, доступных потребителю при всех имеющихся ограничениях.

Заметим, что отношение предпочтения, отношение эквивалентности, понятие функции и многозначного отображения имеют одну и ту же природу, и возникают в рамках теории отношений, к изложению основ которой мы сейчас перейдем.

2.1 Отношения

Пусть X и Y — два произвольных множества и $X \times Y$ — их декартово произведение, т.е. множество пар (x, y), где $x \in X$, а $y \in Y$.

Определение 2.1. Произвольное подмножество R множества $X \times Y$ называется (бинарным) ***отношением***. Если $X = Y$, то говорят, что R — отношение на множестве X, рис. 2.1.

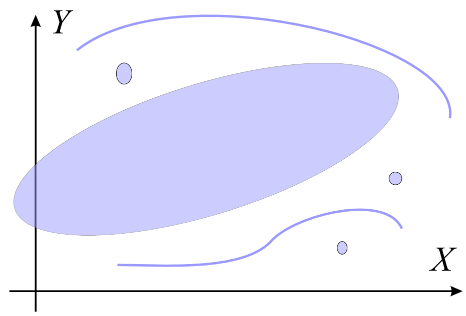

Рис. 2.1: Иллюстрация понятия отношению

Часто условие того, что $(x, y) \in R$ обозначают xRy.

Существует много способов задания отношений. Например, если R — отношение на конечном множестве X, то R можно задать квадратной матрицей $M = (m_{ij})$ следующим образом. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, тогда

$$\begin{cases} m_{ij} = 1, & \text{если } (x_i, x_j) \in R, \\ m_{ij} = 0, & \text{если } (x_i, x_j) \notin R. \end{cases}$$

Другой способ задания отношений в этом случае состоит в построении ориентированного графа G, множество вершин которого совпадает с $\{x_1, \dots, x_n\}$, и пара вершин x_i и x_j из G соединена ориентированным ребром x_i, x_j, если и только если $(x_i, x_j) \in R$, рис. 2.2.

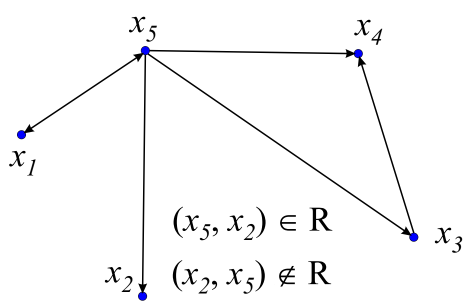

Рис. 2.2: Задание отношения ориентированными графами.

Пусть X и Y — произвольные множества и $R \subset X \times Y$ — отношение.

Областью определения отношения R называется множество

$$D(R) = \big\{x \in X \mid \exists y \in Y : (x, y) \in R\big\},$$

а ***областью значений*** отношения R — множество

$$I(R) = \big\{y \in Y \mid \exists x \in X : (x, y) \in R\big\}.$$

Если $x \in X$, то через $R(x)$ будем обозначать множество $\big\{y \in Y : (x, y) \in R\big\}$ и называть его ***образом точки*** $x \in X$. Отметим, что, вообще говоря, образ $R(x)$ может быть пустым множеством.

Если $A \subset X$ — произвольное подмножество из X, то через $R(A)$ обозначим подмножество в Y вида $\cup_{x \in X} R(x)$ и назовем его ***образом подмножества*** $A \subset X$. Рисунок 2.3 иллюстрирует все введенные определения.

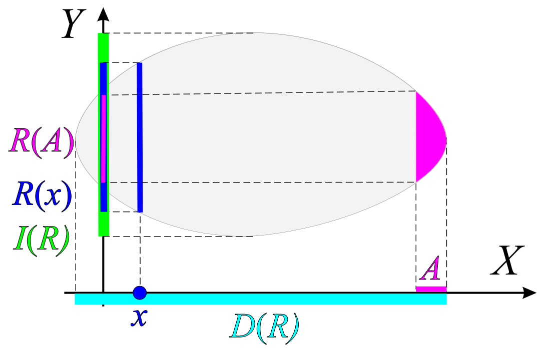

Рис. 2.3: Области определения и значения, а также образы отношений.

Если $D(R) = X$, то отношение R называется ***многозначным отображением***. Многозначное отображение называется ***однозначным отображением*** или просто ***отображением***, если образ $R(x)$ каждой точки $x \in X$ состоит ровно из одного элемента. Отображения R обычно обозначают через $R\colon X \to Y$ и говорят, что R отображает множество X во множество Y. Чтобы различать однозначные и многозначные отображения, мы будем обозначать последние через $R\colon X \rightrightarrows Y$. На рисунке 2.4 приведены примеры однозначных и многозначных отображений.

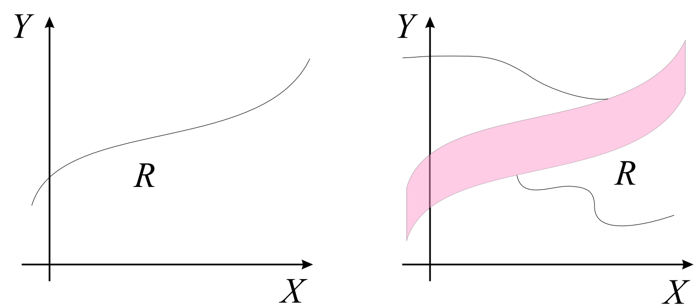

Рис. 2.4: Однозначные и многозначные отображения.

Понятие отношения является слишком общим. Чтобы оно стало содержательным, на него накладываются различные ограничения. Приведем определения основных из них в предположении, что $X = Y$.

Итак, пусть R — отношение на произвольном множестве X. Отношение R называется

(1) ***рефлексивным***, если для каждого $x \in X$ выполняется $(x, x) \in R$, рис. 2.5, слева;

(2) ***иррефлексивным***, если для каждого $x \in X$ выполняется $(x, x) \notin R$, рис. 2.5, справа;

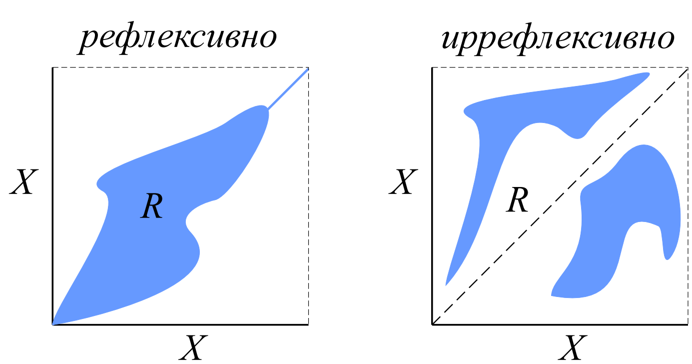

Рис. 2.5: Рефлексивное и иррефлексивное отношения.

(3) ***симметричным***, если $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$, рис. 2.6, слева;

(4) ***асимметричным***, если $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$ и $x \neq y$, рис. 2.6, посередине;

(5) ***антисимметричным***, если $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$ влечет $x = y$, рис. 2.6, справа;

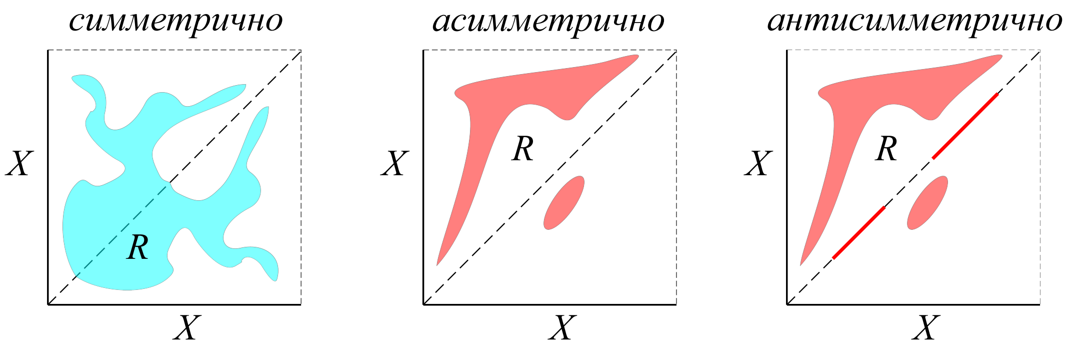

Рис. 2.6: Симметричное, асимметричное и антисимметричное отношения.

(6) ***транзитивным***, если $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ влечет $(x, z) \in R$, рис. 2.7, слева;

(7) ***полным***, если для любого $(x, y) \in X \times X$ или $(x, y) \in R$, или $(y, x) \in R$, или то и другое, рис. 2.7, справа.

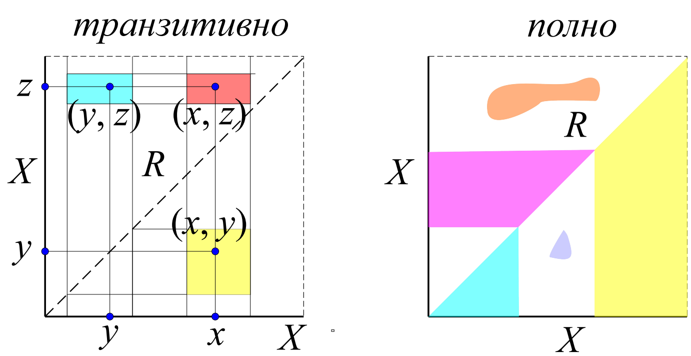

Рис. 2.7: Транзитивное и полное отношения.

Если R рефлексивно, симметрично и транзитивно, то R называется ***отношением эквивалентности***. Отметим, что отношение эквивалентности разбивает множество на подмножества, состоящие из попарно эквивалентных элементов — ***классов эквивалентности***. Обратно, каждое разбиение множества задается соответствующей эквивалентностью.

Если же R рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, то R называется (частичным) ***порядком***. Полный частичный порядок называется ***линейным порядком***. Стандартный пример частично упорядоченного множества — это множество всех подмножеств данного множества X, на котором порядок задается так: $A \leq B$, если и только если $A \subset B$. Если X состоит более чем из одного элемента, то этот частичный порядок не является линейным. Пример линейного порядка — стандартное отношение $\leq$ на вещественных числах.

2.2 Отношение предпочтения и функция полезности

Перейдем теперь к определению отношения предпочтения.

Определение 2.2. ***Отношением предпочтения*** называется отношение на множестве потребления, являющееся рефлексивным, транзитивным и полным. Такое отношение будем обозначать $\succcurlyeq$.

Замечание 2.3. Отношение предпочтения отличается от линейного порядка отсутствием аксиомы антисимметричности.

Примером рефлексивного, транзитивного и полного отношения является отношение на $\succcurlyeq$, заданное произвольной функцией $f(x)$ следующим образом: $x \succcurlyeq y$, если и только если $f(x) \geq f(y)$ (докажите).

Введем следующее соглашение. Если $x \succcurlyeq y$, но $y \not\succcurlyeq x$, будем писать $x \succ y$; если же одновременно $x \succcurlyeq y$ и $y \succcurlyeq x$, то будем писать $x \sim y$. В действительности, отношение $\sim$ является эквивалентностью (докажите).

Помимо трех перечисленных основных аксиом, на отношение предпочтения накладывают ряд других аксиом, главными из которых являются непрерывность, локальная ненасыщаемость и просто ненасыщаемость. Прежде чем дать точные определения, напомним некоторые факты из топологии.

Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ — произвольное множество. Определим на X открытые множества (т.е. топологию) как пересечения открытых множеств в $\mathbb{R}^n$ с множеством X (***индуцированная топология***). Иными словами, $A \subset X$ является открытым в X, если и только если существует такое открытое в $\mathbb{R}^n$ множество B, что $A = X \cap B$. Таким образом, мы превратили X в топологическое пространство (проверьте).

Далее, если X и Y — топологические пространства, то на декартовом произведении $X \times Y$ топология определяется так: множество $A \subset X \times Y$ открыто, если и только если его можно представить в виде объединения множеств вида $A_X \times A_Y$, где $A_X \subset X$ и $A_Y \subset Y$ — открытые множества.

Определение 2.4. Отношение предпочтения $\succcurlyeq$ называется ***непрерывным***, если каждое множество $\big\{(x, y) : x \succ y\big\}$ является открытым подмножеством декартова произведения $X \times X$.

Замечание 2.5. Непрерывность отношения предпочтения означает следующее. Если набор товаров x строго предпочтительней, чем набор товаров y, то при малом изменении каждого из этих наборов отношение строгого предпочтения сохраняется: если x' достаточно близко к x, а y' достаточно близко к y, то $x' \succ y'$.

Отношение предпочтения часто бывает удобно задавать функциями, называемыми функциями полезности.

Определение 2.6. Функция $u(x)$, определенная на множестве потребления X, называется ***функцией полезности, соответствующей отношению предпочтения*** $\succcurlyeq$, если $u(x) \geq u(y)$ тогда и только тогда, когда $x \succcurlyeq y$.

Приведем без доказательства теорему существования непрерывной функции полезности. Подмножество A топологического пространства называется ***связным***, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств. Например, отрезок $[a, b]$ связен, а множество $[0, 1] \cup [2, 3]$, являющееся объединением двух непересекающихся отрезков, – нет (докажите).

Теорема 2.7 (Дебре). *Если множество потребления X связно, а отношение предпочтения непрерывно, то существует непрерывная функция полезности, соответствующая этому отношению предпочтения.*

Замечание 2.8. Пусть $u(x)$ — функция полезности для отношения предпочтения $\succcurlyeq$. Тогда для любой строго возрастающей функции $f(t)$ функция $f\big(u(x)\big)$ также является функцией полезности для $\succcurlyeq$. Обратно, любые две функции полезности $u(x)$ и $v(x)$ для одного и того же отношения предпочтения отличаются друг от друга на композицию с некоторой строго возрастающей функцией $f(t)$, т.е. $v(x) = f\big(u(x)\big)$ для некоторой строго возрастающей функции $f(t)$. (Докажите.)

Определение 2.9. Отношение предпочтения на множестве потребления X называется ***локально ненасыщаемым***, если для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такой $y \in X$, что $\|y - x\| < \varepsilon$ и $y \succ x$. Сформулированное ограничение на отношение предпочтения называется ***аксиомой локальной ненасыщаемости***.

Замечание 2.10. На языке функции полезности $u(x)$ локальная ненасыщаемость означает, что функция $u(x)$ не имеет локальных максимумов на X.

Заметим также, что для выполнения свойства локальной ненасыщаемости достаточно потребовать монотонность отношения предпочтения $\succcurlyeq$, т.е.

$$y \gg x \Rightarrow y \succ x.$$

Это более сильное условие носит название ***аксиомы ненасыщаемости***.

2.3 Функция спроса

Выше мы рассмотрели поведение потребителя, свободного от бюджетных ограничений. Пусть теперь бюджетные ограничения имеются. Сейчас мы построим многозначное отображение $\varPhi(p, w)$, определенное на $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}^n_+$ — пространство систем цен p, а $\mathbb{R}_+$ — всевозможные величины капитала w. Область значений отображения $\varPhi(p, w)$ лежит во множестве потребления. Отображение $\varPhi(p, w)$ будет соответствовать поведению потребителя, выбирающего, при имеющихся ценах и бюджетных ограничениях, наиболее подходящие для него наборы товаров (отображение многозначно, так как при заданных ценах может существовать много равноценных товарных наборов). Отображение $\Phi(p, w)$ называется функцией спроса.

Предположим, что фиксированы

- цены $p \in \mathbb{R}^n_+$ на товары,
- функция полезности $u(x)$, определенная на множестве потребления X,
- капитал w потребителя.

Напомним, что через $B_{p,w}(X)$ мы обозначали бюджетное множество, т.е. множество всевозможных наборов товаров, доступных потребителю при ценах p:

$$B_{p,w}(X) = \big\{x : x \in X,\, \langle x, p\rangle \le w\big\}.$$

Для каждого вектора $p \in \mathbb{R}^n_+$ и каждого значения w рассмотрим множество $\Phi(p, w)$, равное или пустому множеству, если $u(x)$ не достигает максимума на $B_{p,w}(X)$, или множеству всех тех $x \in B_{p,w}(X)$, в которых этот максимум достигается. Тем самым, мы определили многозначное отображение Φ из некоторого подмножества пространства $\mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}_+$ во множество потребления $X \subset \mathbb{R}^n_+$. Это многозначное отображение называется ***функцией спроса*** или ***вальрасовой функцией***.

Отметим, что вальрасова функция $\Phi(p, w)$ является положительно однородной степени 0, т.е. для любого $\lambda > 0$ имеем

$$\Phi(\lambda p, \lambda w) = \Phi(p, w).$$

Это означает, что при изменении цен и благосостояния в одинаковой пропорции, потребительский выбор индивидуума не меняется. Иными словами, выбор потребителя зависит лишь от соотношения цен на различные товары, но не от масштаба цен.

Часто предполагают, что капитал w зависит от цен p, т.е. является функцией $w(p)$. Тогда возникает многозначное отображение $\Phi(p) = \Phi\big(p, w(p)\big)$, также называемое ***функцией спроса*** или ***вальрасовой функцией***. Однако теперь это отображение действует из $\mathbb{R}^n_+$ в $X \subset \mathbb{R}^n_+$. Один из интересных классов функций $w(p)$ возникает, если потребовать, чтобы функция $w(p)$ была положительно однородной первой степени. Это означает, что для любого $\lambda > 0$ выполняется $w(\lambda p) = \lambda\, w(p)$. Подчеркнув зависимость бюджетного множества $B_{p,w(p)}$ лишь от систем цен p, обозначим его $\hat X(p)$. Условие положительной однородности степени 1 капитала $w(p)$ приводит к тому, что бюджетное множество $\hat X(p)$ становится положительно однородным степени 0, т.е.

$$B_{\lambda p, w(\lambda p)} = B_{p,w(p)} \text{ или } \hat X(\lambda p) = \hat X(p),$$

поэтому $\Phi(\lambda p) = \Phi(p)$, т.е. функция $\Phi(p)$ вновь является положительно однородной степени 0. Эти следствия из описанного только что ограничения на капитал $w(p)$ могут быть интерпретированы так: выбор потребителя зависит лишь от соотношения цен на различные товары, но не от масштаба цен.

Вообще говоря, функция спроса не всегда может быть определена на всем $\mathbb{R}^n_+$. Основной причиной этого является неограниченность множества $B_{p,w}(\mathbb{R}^n_+)$ при условии, что одна из компонент вектора p, т.е. одна из цен p_i равна нулю. Например, если $X = \mathbb{R}^n_+$, функция полезности $u(x)$ строго монотонно возрастает вдоль каждой из координат, и $w > 0$, то при $p = (0, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ множество $B_{p,w}(X)$ неограничено, а функция полезности $u(x)$ не достигает максимума на $B_{p,w}(X)$, см. рис. 2.8.

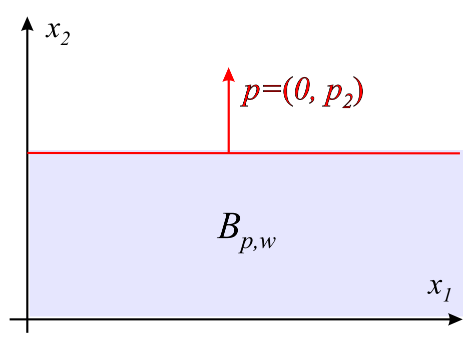

Рис. 2.8: Функция спроса может быть определена не везде.

Вышесказанное приводит к следующей естественной аксиоме, обычно накладываемой дополнительно на множество потребления X: если в последовательности $x^k \in X$ некоторая компонента x_j^k стремится к бесконечности при $k \to \infty$, то стремятся к бесконечности и все прочие координаты вектора x^k. Другими словами, если потребителю требуется слишком много одного товара, то он хочет и больших количеств всех остальных интересующих его товаров. Эту аксиому можно понимать как ***усиление требования о ненасыщаемости***.

Если только что описанная аксиома имеет место, то при любом ненулевом векторе цен множество $B_{p,w}(X)$ ограничено (докажите), см. рис. 2.9.

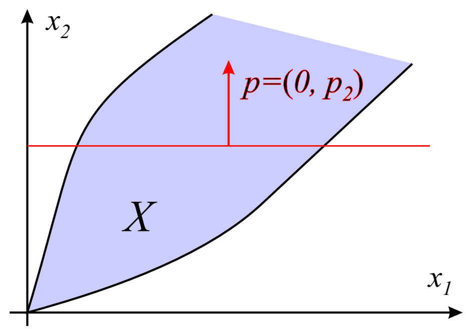

Рис. 2.9: Усиление требования ненасыщаемости.

Итак, мы построили функцию спроса, которая описывает поведение потребителя. Окончательный выбор потребителя состоит в указании $x \in \Phi(p, w)$.

При построении той или иной частной модели экономики часто делают различные предположения относительно отображений $\Phi(p)$ и $\Phi(p, w)$. Иногда считают, что эти отображения однозначны. Для этого достаточно потребовать, например, строгой вогнутости функции полезности: для любых $x, x' \in X$ и любого $y \in Y$, лежащего внутри отрезка $[x, x']$, т.е. имеющего вид $(1-\lambda)x + \lambda\, x'$ для некоторого $\lambda \in (0, 1)$, выполняется $u(y) > (1-\lambda)u(x) + \lambda\, u(x')$, рис. 2.10.

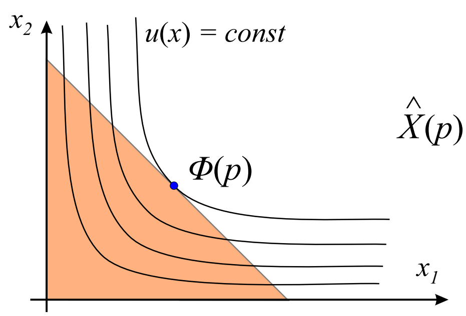

Рис. 2.10: Линии уровня строго вогнутой функции полезности.

Замечание 2.11. В случае выпуклой функции полезности ее максимум может достигаться в более чем одной точке на границе множества $\big(\langle p, \cdot\rangle = w\big) \cap \mathbb{R}^n_+$.

2.4 Основные задачи классической теории потребления

В дальнейшем мы рассмотрим две основные задачи классической теории потребления.

A) ***Задача максимизации полезности*** (UMP): для известной функции полезности требуется найти наиболее предпочтительный потребительский набор при данном капитале $w > 0$ и ценах $p \gg 0$. Иными словами, построить вальрасову функцию $\Phi(p, w)$.

B) ***Задача минимизации затрат*** (EMP): при известных ценах $p \gg 0$ вычислить минимальный уровень капитала w, требуемый для достижения заданного уровня полезности $u > u(0)$. Функция $h(p, u)$, ставящая в соответствие каждой паре (p, u) множество тех $x \in X$, на которых достигается этот оптимальный уровень затрат, называется ***функцией Хикса***.

Глава 3

Коллективное принятие решений

План. Профиль голосования, метод относительного большинства, метод абсолютного большинства, метод Борда́, метод Кондорсе, обобщенный метод Борда́, возможность правильным подбором метода сделать любого кандидата победителем.

В данной лекции мы рассмотрим известные способы коллективного принятия решений. Основная идея состоит в том, что по каждому набору индивидуальных предпочтений (так называемому, профилю голосования) требуется построить коллективное предпочтение. Тем самым задача состоит в построении функции коллективного выбора. Обычно при решении таких задач задаются правила, применение которых и есть реализации функций коллективного выбора.

Мы покажем практическую значимость изучения данной теории на двух примерах. В первом из них мы построим профиль голосования, применение к которому разных классических функций коллективного выбора выводит на первое место разных кандидатов. Фактически, в нашем примере каждый кандидат может выйти победителем: достаточно подобрать "правильный" способ учета голосов избирателей.

Второй пример дает знаменитая теорема Эрроу о диктаторе. Идея состоит в том, что если на функцию коллективного выбора наложить некоторые естественные ограничения исключительно демократического характера, то любая функция коллективного выбора будет выражать мнение ровно одного избирателя (диктатора): как бы не голосовали все остальные избиратели, результат будет совпадать с мнением диктатора.

3.1 Правила голосования

Рассмотрим проект демократического выбора. Пусть $M = \{x_1, \ldots, x_m\}$ — некоторое множество кандидатов, $S = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — некоторое множество избирателей, и решение принимают всеобщим голосованием. Пусть у каждого избирателя y_k есть индивидуальная система предпочтения:

$$x_{i_1} \overset{k}{\succ} \cdots \overset{k}{\succ} x_{i_m}.$$

Требуется построить функцию, определяющую коллективный порядок на множестве кандидатов, т.е. правило, которое для любых заданных порядков $\overset{1}{\succ}, \ldots, \overset{k}{\succ}$ определяет коллективный порядок $\succcurlyeq$:

$$\succcurlyeq = f(\overset{1}{\succ}, \ldots, \overset{k}{\succ}).$$

Здесь мы предполагаем три возможности при парных сравнениях кандидатов a и b:

$$a \succ b \quad (a \text{ лучше } b),$$
$$a = b \quad (a \text{ и } b \text{ одинаковы}),$$
$$b \succ a \quad (a \text{ хуже } b),$$

и их комбинации

$$a \succcurlyeq b \quad (a \text{ не хуже } b).$$

Будем говорить, что кандидат a является победителем, если a лучше всех остальных кандидатов.

Определение 3.1. Назовем ***профилем голосования*** множество всех индивидуальных предпочтений.

Пример 3.2. Пусть имеется 10 избирателей $1, \dots, 10$ и три кандидата a, b и c. Тогда профиль голосования можно представить таблицей. Например

номер избирателя	1	2	...	10
кандидаты	a	b	...	c
кандидаты	b	a	...	b
кандидаты	c	c	...	a

Иногда бывает удобно объединить одинаково проголосовавших избирателей. В этом случае предыдущая таблица становится компактней. Например

количество избирателей	2	3	5
кандидаты	a	b	c
кандидаты	b	a	b
кандидаты	c	c	a

Существует несколько способов определения победителя. Рассмотрим основные из них.

3.1.1 Метод относительного большинства

Этот способ состоит в следующем. *Каждый избиратель отдает голос ровно за одного кандидата, и кандидат, набравший наибольшее число голосов — победитель.*

Пример 3.3. Пусть имеется $n = 10$ избирателей и $m = 4$ кандидатов. Рассмотрим следующий профиль голосования:

количество избирателей	2	3	4	1
кандидаты	a	a	b	c
кандидаты	b	c	a	a
кандидаты	c	d	c	d
кандидаты	d	b	d	b

Итак, за кандидата a отдали 5 голосов, за кандидата b — 4 голоса, за кандидата c — 1 голос и за кандидата d — 0 голосов. Поэтому победил кандидат a.

Рассмотрим другой профиль.

количество избирателей	2	3	5
кандидаты	a	a	b
кандидаты	b	c	a
кандидаты	c	d	c
кандидаты	d	b	d

В этом случае за кандидатов a и b проголосовало одинаковое число избирателей, а за c и d — ни одного. В соответствии с нашим определением, победителей нет. Тем не менее, иногда бывает полезно называть победителями всех, кто набрал наибольшее число голосов. В рассматриваемом примере победителями являются два кандидата: a и b.

3.1.2 Метод абсолютного большинства

Этот способ подсчета голосов основан на следующем правиле. *Каждый избиратель выбирает ровно одного кандидата, причем кандидат, набравший больше половины голосов, является победителем. Если таких не существует, то проводится второй тур. Если максимальное число голосов набрало не меньше двух кандидатов, то ровно эти кандидаты участвуют во втором туре*; *если же максимальное число голосов набрал ровно один кандидат, то участвует он и все кандидаты, набравшие наибольшее число голосов среди оставшихся кандидатов.*

На практике, во второй тур выходят двое и один набирает больше голосов чем другой. Формально говоря, второй тур тоже может ничем не закончиться, тогда, например, можно снова начать с первого тура, но, предварительно, сменив всех кандидатов.

3.1.3 Метод Бордá

Рассмотрим общий профиль голосования, в котором участвовало n избирателей и m кандидатов. Разобьем множество S всех избирателей на классы S_i, объединив в каждый из них избирателей с одинаковыми предпочтениями. Пусть имеется p таких классов, причем i-ый класс состоит из k_i избирателей: $|S_i| = k_i$. Ясно, что $k_i > 0$ и $k_1 + \cdots + k_p = n$.

Чтобы определить победителя, мы припишем каждому кандидату x_i некоторое количество очков α_i по следующей схеме. Рассмотрим сначала пару (x_i, y_j) кандидат-избиратель и припишем ей некоторое число очков α_{ij} так. Если избиратель y_j поставил кандидата x_i на последнее место, то припишем этой паре 0 очков, если же на предпоследнее — то 1 очко, и т.д., и если на первое место — то $(m-1)$-но очко. Иными словами, если кандидат x_i стоит на k-ом с конца месте в индивидуальной системе предпочтений избирателя y_j, то $\alpha_{ij} = k-1$. Отметим, что избиратели каждого класса S_l ставят кандидата x_i на одно и то же место. Поэтому можно определить β_{il} как количество очков, которое получила пара (x_i, y_j) при фиксированном x_i от каждого избирателя $y_j \in S_l$.

Далее, определим теперь числа α_i, просуммировав для каждого кандидата x_i очки α_{ij} по всем парам (x_i, y_j), т.е. по всем избирателям: $\alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}$. Ясно, что

$$\alpha_i = \sum_{l=1}^{p} k_l \beta_{il}.$$

Победителем считается кандидат, набравший наибольшее число очков.

3.1.4 Метод Кондорсе

Выберем произвольного кандидата a, и рассмотрим всевозможные пары (a, x), где x — кандидат, отличный от a. Для каждой пары (a, x) вычислим количество $k_{a,x}$ избирателей, предпочитающих a перед x, и количество $k_{x,a}$ избирателей, предпочитающих x перед a. Обозначим через r_a количество тех x, для которых $k_{a,x} \geq k_{x,a}$. *Кандидат с максимальным r_a и есть победитель.* Это метод попарного сравнения.

Пример 3.4. Рассмотрим следующий профиль голосования.

номер избирателя	1	2	3
кандидаты	a	b	d
кандидаты	b	a	a
кандидаты	c	c	b
кандидаты	d	d	c

Для наглядности, для каждого кандидата a рассмотрим лишь тех кандидатов x, для которых $k_{a,x} \geq (n-k_{a,x})$, и лишь для них будем писать "$a \succcurlyeq b$ со счетом $k_{a,x} : (n - k_{a,x})$". Имеем

$$\begin{gathered} a \succcurlyeq b \text{ со счетом } 2:1 \\ a \succcurlyeq c \text{ со счетом } 3:0 \\ a \succcurlyeq d \text{ со счетом } 2:1 \\ b \succcurlyeq c \text{ со счетом } 3:0 \\ b \succcurlyeq d \text{ со счетом } 2:1 \\ c \succcurlyeq d \text{ со счетом } 2:1 \end{gathered}$$

Таким образом, $r_a = 3$, $r_b = 2$, $r_c = 1$ и $r_d = 0$, поэтому победил кандидат a.

3.1.5 Обобщенный метод Бордá

Этот метод получается из метода Борда введением вместо очков $1, 2, \ldots, m-1$ произвольных чисел $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$. Обычно на числа s_i вводятся естественные ограничения: $0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_{m-1}$ и $s_{m-1} > 0$.

Замечание 3.5. Метод относительного большинства является частным случаем обобщенного метода Борда. Достаточно положить $s_1 = \cdots = s_{m-2} = 0$ и $s_{m-1} = 1$.

Метод Борда также является частным случаем обобщенного метода Борда: положим $s_i = i$.

Тем не менее, из обобщенного метода Борда не вытекают метод абсолютного большинства и метод Кондорсе. Ниже мы приведем доказательство этого факта.

Оказывается, имеет место следующее замечательное утверждение.

Предложение 3.6. *Существуют такие профили голосования, при которых разными способами получаем разных победителей.*

Доказательство. Пусть число n избирателей равно 17, а число m кандидатов равно 4. Рассмотрим следующий профиль голосования:

количество избирателей	5	3	5	4
кандидаты	a	a	b	c
кандидаты	d	d	c	d
кандидаты	c	b	d	b
кандидаты	b	c	a	a

Подведем итоги по разным методам.

Метод относительного большинства.

a	b	c	d
8	5	4	0

Поэтому победитель — a.

Метод абсолютного большинства. Половина голосов равна 17/2, поэтому ни один из кандидатов не набрал больше половины голосов. Далее, максимальное число голосов набрал ровно один кандидат a, набравший 8 голосов. Следующее место по числу голосов занял кандидат b, набравший 5 голосов. Следовательно, на второй тур перешло ровно два кандидата: a и b. Предполагая, что предпочтения избирателей не изменились между первым и вторым турами голосования, получим следующие результаты:

количество избирателей	5	3	5	4
кандидаты	a	a	b	b
кандидаты	b	b	a	a

т.е. a набрал 8 голосов, что меньше половины $(8 < 17/2)$, а b набрал 9 голосов, что больше половины $(9 > 17/2)$. Следовательно, b — победитель.

Метод Борда. Считаем очки:

a	b	c	d
$3*8=24$	$3*5+7=22$	$3*4+2*5+5=27$	$2*12+5=29$

поэтому, в соответствии с этим методом, победил d.

Метод Кондорсе. Составим таблицу попарных сравнений кандидатов. Имеем:

$$\begin{gathered} b \succcurlyeq a \text{ со счетом } 9:8 \\ c \succcurlyeq a \text{ со счетом } 9:8 \\ c \succcurlyeq b \text{ со счетом } 9:8 \\ c \succcurlyeq d \text{ со счетом } 9:8 \\ d \succcurlyeq a \text{ со счетом } 9:8 \\ d \succcurlyeq b \text{ со счетом } 12:5 \end{gathered}$$

поэтому $r_a = 0$, $r_b = 1$, $r_c = 3$ и $r_d = 2$. Следовательно, победил c. □

Предложение 3.7. *Из обобщенного метода Борда не вытекают метод абсолютного большинства и метод Кондорсе.*

Доказательство. Воспользуемся примером из доказательства предыдущего предложения, и вычислим для него результат голосования, полученный обобщенным методом Борда.

Пусть s_1, s_2 и s_3 — очки, приписываемые кандидату, занявшему с конца второе, третье и четвертое места соответственно. Тогда кандидаты наберут следующие количества очков.

a	b	c	d
$8s_3$	$5s_3+7s_1$	$4s_3+5s_2+5s_1$	$12s_2+5s_1$

При подсчете голосов методом абсолютного большинства победителем оказался кандидат b. Можно ли сделать b победителем обобщенным методом Борда. Предположим, что можно. Тогда должно быть

$$
\begin{gathered}
(5s_3 + 7s_1) - 8s_3 = 7s_1 - 3s_3 \geq 0, \\
(5s_3 + 7s_1) - (4s_3 + 5s_2 + 5s_1) = 2s_1 - 5s_2 + s_3 \geq 0, \\
(5s_3 + 7s_1) - (12s_2 + 5s_1) = 2s_1 - 12s_2 + 5s_3 \geq 0.
\end{gathered}
$$

Отсюда получаем

$$
\begin{cases}
7/3s_1 \geq s_3, \\
2s_1 \geq 5s_2 - s_3.
\end{cases}
$$

Складывая эти два неравенства, получаем $13/15s_1 \geq s_3$. Но $s_3 > 0$ и $s_1 \leq s_3$, противоречие. Таким образом, ни при каких значениях s_i метод Борда не приводит в нашем примере к результатам голосования, полученным методом абсолютного большинства.

Рассмотрим теперь другой профиль голосования.

количество избирателей	3	6	4	4
кандидаты	c	a	b	b
кандидаты	a	b	a	c
кандидаты	b	c	c	a

Вычислим теперь победителя по методу Кондорсе. Составляем таблицу попарных сравнений.

$$
\begin{gathered}
a \succcurlyeq b \text{ со счетом } 9:8 \\
a \succcurlyeq c \text{ со счетом } 10:7 \\
b \succcurlyeq c \text{ со счетом } 14:3
\end{gathered}
$$

Следовательно, по Кондорсе победителем является a.

Воспользуемся теперь обобщенным методом Борда. Имеем

a	b	c
$6s_2 + 7s_1$	$8s_2 + 6s_1$	$3s_2 + 4s_1$

Предположим, что кандидат a может стать победителем по обобщенному методу Борда. Тогда должно быть

$$
(6s_2 + 7s_1) - (8s_2 + 6s_1) = s_1 - 2s_2 \geq 0,
$$

откуда $s_1 \geq 2s_2$, но $s_2 > 0$ и $s_1 \leq s_2$, противоречие. Иными словами, ни при каких значениях s_i обобщенным методом Борда нельзя получить результаты голосования в нашем профиле, вычисленные с помощью метода Кондорсе. Доказательство предложения закончено. $\square$

Глава 4

Теорема Эрроу

План. Требования к функции коллективного предпочтения: полнота, транзитивность, единогласие, независимость, теорема Эрроу о диктаторе, коалиция, f-решающая коалиция одного кандидата против другого.

В настоящей лекции мы расскажем, как по правилам, частные случаи которых мы описали в предыдущей лекции, построить коллективное упорядочение. Идея состоит в том, чтобы после выбора победителей продолжать применять правило к оставшимся кандидатам. Таким образом, наши правила будут порождать функции коллективного выбора.

Как мы уже видели раньше, разные правила определения победителя приводят, вообще говоря, к разным результатам. Поэтому возникает желание ввести некоторые естественные ограничения на функцию коллективного выбора, чтобы избавиться от этой неопределенности. Мы приведем четыре аксиомы, имеющие с очевидностью чисто демократический характер, и построим пример функции коллективного выбора, удовлетворяющей всем этим аксиомам. Впрочем, построенная функция не слишком "демократична": эта функция ставит множеству всех индивидуальных предпочтений избирателей предпочтение ровно одного из них. Такая функция называется функцией диктатора.

В завершение лекции мы докажем теорему Эрроу, гласящую, что каждая функция коллективного выбора, удовлетворяющая четырем сформулированным аксиомам, является функцией диктатора.

4.1 Функция коллективного выбора. Теорема Эрроу

Пусть $S = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — множество избирателей и $M = \{x_1, \ldots, x_m\}$ — множество кандидатов. Таким образом, имеется n систем индивидуального предпочтения, каждая из которых устанавливает линейный порядок на множестве всех кандидатов.

Пусть p — произвольное правило голосования. Применяя правило p, мы построим множество $M_1 = \{a_1 = \cdots = a_s\}$, состоящее из победителей. Применим правило p ко множеству проигравших $M \setminus M_1$. Мы опять получим множество выигравших $M_2 = \{a_{s+1} = \cdots = a_{s+l}\}$. Выкинем теперь из M объединение $M_1 \cup M_2$ и проделаем ту же операцию, и т.д. В результате мы упорядочим множество M согласно решению коллектива: $M_1 \succ M_2 \succ \cdots$. Таким образом, правило голосования позволяет построить систему коллективного предпочтения. Итак, исходя из правила p мы построили функцию коллективного предпочтения, имеющую вид $\succcurlyeq = f(\overset{1}{\succ}, \ldots, \overset{n}{\succ})$, где $\overset{k}{\succ}$ — система индивидуального предпочтения избирателя y_k, а $\succcurlyeq$ — коллективное предпочтение.

Выше мы видели, что перечисленные правила подсчета голосов могут приводить к совершенно различным результатам. Чтобы добиться однозначного результата, попробуем предъявить некоторые естественные требования к функции коллективного предпочтения.

(1) ***Полнота***. Для любых кандидатов a и b коллективный порядок устанавливает, что либо $a \succ b$, любо $b \succ a$, либо $a = b$.

(2) ***Транзитивность***. Для любых трех кандидатов a, b и c таких, что $a \succcurlyeq b$ и $b \succcurlyeq c$, выполняется $a \succcurlyeq c$, причем равенство $a = c$ имеет место, если и только если $a = b = c$.

(3) ***Единогласие.*** Если все избиратели считают, что a лучше b, значит и в коллективном предпочтении a должен быть лучше b:

$$(\forall\, k,\ a \overset{k}{\succ} b) \Rightarrow (a \succ b).$$

(4) ***Независимость.*** Положение любых двух кандидатов в коллективном предпочтении зависит только от их взаимного расположения в индивидуальных предпочтениях и не зависит от расположения других кандидатов. Иными словами, если для профиля вида

группы избирателей	кандидаты
A	$\dots a \dots b \dots$
$S \setminus A$	$\dots b \dots a \dots$

имеем $a \succ b$, то и для всех профилей такого вида выполняется $a \succ b$.

Замечание 4.1. Множество функций коллективного выбора, удовлетворяющих аксиомам (1)–(4), непусто. Примером таких функций могут служить ***функции диктатора***, а именно, функции вида $f(\overset{1}{\succ}, \dots, \overset{n}{\succ}) = \overset{k}{\succ}$ для некоторого k (докажите).

Теорема 4.2 (Эрроу)**.** *Пусть f — функция коллективного предпочтения, удовлетворяющая аксиомам* (1)–(4), *и предположим, что имеется не менее трех кандидатов. Тогда f — функция диктатора.*

Замечание 4.3. Если число кандидатов меньше 3, то теорема Эрроу перестает быть верной. Рассмотрим для примера правило относительного большинства, в котором имеется два кандидата. Легко видеть, что все аксиомы (1)–(4) имеют место. С другой стороны, если избиратель оказывается в меньшинстве, то его мнение роли не играет.

Доказательство теоремы Эрроу. Введем несколько важных понятий. Прежде всего, произвольное подмножество A множества избирателей будем называть ***коалицией***. Коалицию A будем называть ***f-решающей для кандидата*** a ***против кандидата*** b, т.е., фактически, для ***упорядоченной пары*** (a, b), тогда и только тогда, когда из того, что все члены коалиции A ставят a выше b, а все члены, не входящие в A, ставят b выше a, вытекает, что в коллективном предпочтении $a \succ b$:

$$\left(\forall\, y_k \in A,\, a \overset{k}{\succ} b\right) \,\&\, \left(\forall\, y_l \notin A,\, b \overset{l}{\succ} a\right) \Rightarrow a \succ b.$$

Этот факт будем кратко записывать $A = f(a, b)$.

Отметим, что, в силу аксиомы независимости, если для одного профиля голосования имеет место расстановка голосов из определения f-решающей коалиции для a против b, и для этого профиля $a \succ b$, то условие $a \succ b$ выполняется и для любого профиля с такой расстановкой голосов. Поэтому рассматриваемая коалиция является f-решающей для a против b. Иными словами, проверку свойства, определяющего f-решающую коалицию для a против b, достаточно проводить для одного (любого) профиля.

Далее, коалиция A такая, что для каждой упорядоченной пары (a, b) различных кандидатов коалиция A является f-решающей для a против b, называется просто ***f-решающей***.

Лемма 4.4. *Существует пара кандидатов (a, b), для которой найдется коалиция D, состоящая из одного избирателя d такая, что $D = f(a, b)$.*

Доказательство. Обозначим через K множество всех коалиций, для каждой из которых существует пара кандидатов (a, b) таких, что эта коалиция является f-решающей для a против b. Отметим, что множество K не пусто, так как, в силу аксиомы единогласия, множество S всех избирателей образует f-решающую коалицию для любой пары кандидатов (a, b). Более того, в силу той же аксиомы единогласия, пустое множество не является f-решающей ни для какой пары кандидатов.

Рассмотрим в K коалицию D, состоящую из наименьшего числа избирателей, и пусть $D = f(a, b)$. Мы покажем, что D состоит ровно из одного элемента, чем и завершим доказательство леммы.

Предположим противное, т.е. $D = \{d\} \cup E$, где E — некоторое непустое множество избирателей. Если $S \setminus D \neq \emptyset$, рассмотрим профиль голосования

группы избирателей	$\{d\}$	E	$S \setminus D$
кандидаты	a	c	b
кандидаты	b	a	c
кандидаты	c	b	a

Если же $S \setminus D = \emptyset$, рассмотрим профиль

группы избирателей	$\{d\}$	E
кандидаты	a	c
кандидаты	b	a
кандидаты	c	b

Так как $D = f(a, b)$, то $a \succ b$. Предположим, что $c \succ b$. Тогда $E = f(c, b)$, что противоречит минимальности коалиции D. Поэтому $b \not\succ c$, и, по аксиоме транзитивности, $a \succ c$. Но тогда $\{d\} = f(a, c)$, что опять же противоречит минимальности коалиции D. Таким образом, мы получили противоречие к предположению, что D состоит более чем из одного элемента, и, значит, D содержит ровно один элемент. Лемма доказана. □

Лемма 4.5. *Коалиция D из предыдущей леммы является f-решающей.*

Доказательство. Выберем произвольное $c \notin \{a, b\}$ и рассмотрим профиль

группы избирателей	кандидаты
$\{d\}$	$\ldots a \succ \ldots \succ b \succ \ldots \succ c \ldots$
$S \setminus \{d\}$	$\ldots b \succ \ldots \succ c \succ \ldots \succ a \ldots$

Так как $\{d\} = f(a, b)$, то $a \succ b$. В силу аксиомы единогласия, $b \succ c$, поэтому, по транзитивности, $a \succ c$. Значит, в силу аксиомы независимости, $\{d\} = f(a, c)$. Учитывая, что $\{d\} = f(a, b)$, заключаем: $\{d\} = f(a, c)$ при всех $c \neq a$.

Пусть теперь e и c — произвольные, отличные от a. Рассмотрим профиль

группы избирателей	кандидаты
$\{d\}$	$\ldots e \succ \ldots \succ a \succ \ldots \succ c \ldots$
$S \setminus \{d\}$	$\ldots c \succ \ldots \succ e \succ \ldots \succ a \ldots$

По аксиоме единогласия, $e \succ a$. Так как $a \succ c$, то, по транзитивности, $e \succ c$. Но тогда, в силу аксиомы независимости, $\{d\} = f(e, c)$. Таким образом, мы показали, что для упорядоченной пары (e, c), где e и c отличны от a, коалиция $\{d\}$ является f-решающей, т.е. $\{d\} = f(e, c)$.

Таким образом, нам осталось показать, что $\{d\} = f(c, a)$ для всех $c \neq a$. Возьмем вместо (a, b) пару (c, b), $c \neq a$. Из сказанного выше вытекает, что $\{d\} = f(e, a)$ при всех $e \neq c$, в частности, $\{d\} = f(b, a)$. Но тогда и $\{d\} = f(c, a)$, так как $\{d\} = f(a, c)$.

Итак, мы показали, что коалиция $\{d\}$ является f-решающей для каждой упорядоченной пары, поэтому она — в целом f-решающая коалиция. Лемма доказана. □

Лемма 4.6. *Описанный выше избиратель d — диктатор.*

Доказательство. К этому моменту мы показали, что d может навязывать свое мнение по поводу любых двух кандидатов a и b при условии, что мнение остальных избирателей противоположно. В этом пока проявляется зависимость от мнения других. Мы должны показать, что как бы не голосовали остальные избиратели, коллективное мнение совпадает с мнением d.

Рассмотрим такие профили голосования, в которых у избирателя d порядок вида

$$\cdots a \overset{d}{\succ} \cdots \overset{d}{\succ} c \overset{d}{\succ} \cdots \overset{d}{\succ} b \cdots ,$$

и все остальные избиратели ставят c выше, чем a и b. Так как $\{d\}$ является f-решающей коалицией, то для таких профилей $a \succ c$; в силу аксиомы единогласия, $c \succ b$, поэтому, по транзитивности, $a \succ b$. Исключая из соотношений c и используя аксиому независимости, получаем, что если d ставит a выше b, то и в коллективном порядке тоже $a \succ b$. В силу произвольности кандидатов a и b, получаем, что d — диктатор. Лемма доказана. □

Последняя лемма завершает доказательство теоремы Эрроу □

Глава 5

Модель Вальраса и конкурентное равновесие

План. Сектор потребления, производственный сектор, товар, продукт производства, первичный фактор, бюджетные ограничения, равновесные цены, модель Вальраса, модель Касселя, модель Эрроу–Дебре, теорема Какутани, теорема Брауэра, многозначные отображения, потребители и производства, обмен товарами, множество потребления или потребительское множество, вектор цен или распределение цен, функция дохода потребителя, бюджетное множество, функция полезности, функция спроса, структура производства, технологическое множество, производственные планы (более коротко, планы), функция предложения, совокупное технологическое множество, функция совокупного предложения производственного сектора, совпадение личной и общественной выгоды, конкурентное равновесие, соотношение баланса спроса и предложения, вектор равновесных цен, функция совокупного предложения, функция совокупного спроса, связь между стоимостных выражений спроса и предложения, закон Вальраса в широком смысле слова, закон Вальраса в узком смысле слова, конкурентное равновесие.

Этот раздел посвящен теоремам о неподвижных точках однозначных и многозначных отображений и применением этих теорем в экономической теории. Поясним, где в математической экономике возникают проблемы, которые можно решить с применением этих теорем.

Рассмотрим общую модель экономики с производством и частной собственностью, берущую свое начало от Вальраса и получившую развитие в более поздних исследованиях.

Экономическая структура общества предполагается состоящей из двух секторов: производственного сектора и сектора потребления. ***Сектор потребления*** можно представлять себе как совокупность всех индивидуумов, составляющих общество, а также учреждений, не участвующих непосредственно в производстве. ***Производственный сектор*** состоит из отдельных отраслей, выступающих в качестве производителей. Один и тот же объект может фигурировать и как производитель, и как потребитель.

Товары также имеют двоякий характер. Одна группа товаров, которые мы будем называть ***продуктами производства***, характеризуется тем, что каждый из них может быть произведен в производственном секторе: металл, машины, электроэнергия и т.д. Другая группа товаров, называемая ***первичными факторами***, состоит из таких товаров, которые производственным сектором не выпускаются: труд, земля и т.п.

Первичные факторы являются собственностью потребителей, которые их продают с целью приобретения продуктов производства.

Потребитель, находясь в рамках ***бюджетных ограничений***, старается получить максимальное удовлетворение от выбираемого им ассортимента товаров.

Поведение производителей характеризуется стремлением максимизировать прибыль от производства, являющуюся разностью дохода от продажи произведенных продуктов и затрат на приобретение первичных факторов и других продуктов на осуществление производства.

Итак, мы предполагаем, что каждый из участников экономики максимизирует некоторую величину при определенных ограничениях, причем и целевая функция и ограничения зависят от цен на товары и первичные факторы в нашей системе. Более того, предполагается, что каждый участник экономики пассивно приемлет существующую систему цен, не пытаясь на нее влиять (что, вообще говоря, не выполняется при наличии, например, монополий).

Цены на продукты и первичные факторы называются ***равновесными***, если производители и потребители, действующие наилучшим для себя образом, сообразуясь при этом с бюджетными ограничениями, обеспечивают такое положение вещей, когда спрос на каждый продукт и фактор не превосходит его предложения.

Основной вопрос в общей модели экономики — существуют ли равновесные цены — ждал своего решения более полувека. Ниже мы изложим на формальном языке модель Вальраса и рассмотрим две ее разновидности при различных ограничениях на составные компоненты модели. Первая из них, предложенная Касселем, близка к модели, рассмотренной Вальдом. Вторая, наиболее известная в настоящее время, — это модель Эрроу–Дебре. Для них мы докажем существование равновесия.

Отметим, что при доказательстве существования равновесия существенно используется теорема Какутани, обобщающая теорему Брауэра о неподвижной точке однозначного отображения на случай многозначных отображений. Поэтому план наших ближайших глав таков.

Сначала мы дадим формальное описание модели Вальраса и равновесных цен, тем самым сформулировав основную задачу, затем мы коснемся основ теории неподвижных точек однозначных функций и, в частности, сформулируем теорему Брауэра, которую докажем в простейшем случае. После мы напомним определение многозначных отображений и сформулируем теорему Какутани, и, наконец, применим разработанную технику к доказательству существования равновесия в моделях Вальда–Касселя и Эрроу–Дебре.

5.1 Модель Вальраса

При описании этой модели мы будем использовать многозначные отображение. Напомним, что это такое. Пусть X и Y — два произвольных множества, и 2^Y — множество всех подмножеств множества Y. Каждое отображение $f\colon X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ называется ***многозначным отображением из*** X ***в*** Y и обозначается $f\colon X \rightrightarrows Y$. Иными словами, многозначное отображение f множества X во множество Y ставит в соответствие каждой точке $x \in X$ непустое подмножество $f(x)$ множества Y.

Перейдем теперь к описанию модели Вальраса. Как было отмечено выше, в рассматриваемой экономической системе имеются ***потребители*** и ***производства***, которые за деньги ***обмениваются товарами***.

Мы будем предполагать, что имеется n товаров. Сюда входят как продукты производства, так и первичные факторы. У каждого товара есть свои числовые характеристики. Эти характеристики будут неотрицательными числами, и для удобства описания каждую такую характеристику для i-ого товара будем откладывать по i-ой оси неотрицательного ортанта

$$\mathbb{R}^n_+ = \bigl\{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \geq 0\bigr\}.$$

Если характеристика — количество i-ого товара, то, напомним, соответствующие точки из $\mathbb{R}^n_+$ мы называли ***потребительскими наборами***.

Мы предполагаем, что у каждого потребителя имеются определенные потребности в том или ином товаре. Чтобы охарактеризовать эти потребности, мы обозначим $X \subset \mathbb{R}^n_+$ множество всех потребительских наборов, нужных данному потребителю. Мы предполагаем, что множество X непусто. Напомним, что такое X мы называли ***потребительским множеством***.

У единицы каждого товара есть цена. Так как цена неотрицательна, то точка $p \in \mathbb{R}^n_+$ представляет собой ***вектор цен*** или ***распределение цен***. Таким образом, у каждого потребительского набора ***стоимость*** равна $\langle p, x\rangle$ — скалярному произведение вектора цен на вектор количеств товаров.

Пусть теперь потребитель не только покупает товары, но и продает первичные факторы. Если $b \in \mathbb{R}^n_+$ обозначает вектор количеств проданных потребителем товаров, то за эту продажу потребитель выручил $\langle p, b\rangle$ денег. Кроме того, мы предполагаем, что потребитель может участвовать в производстве и получать от этого некоторый доход $I(p)$, зависящий от текущего распределения цен. Пусть других доходов нет, тогда ***функция дохода потребителя*** (его капитал), которую мы обозначим $K(p)$, имеет вид $K(p) = \langle b, p\rangle + I(p)$.

Ясно, что потребитель не может приобрести товара больше, чем имеется у него средств. Множество всех потребительских наборов, которые может приобрести потребитель, обозначим $B(p)$ и, как и раньше, назовем ***бюджетным множеством***. По определению,

$$B(p) = \bigl\{x \in X : \langle p, x\rangle \leq K(p)\bigr\}.$$

Отметим, что если при данном распределении цен p все имеющиеся потребительские наборы оказались дороже имеющегося у потребителя дохода $K(p)$, то бюджетное множество $B(p)$ пусто.

Каждый потребитель по-разному относится к тем или иным потребительским наборам: одни более предпочтительны, другие — менее. Эти предпочтения мы выражали ***функцией полезности*** $u\colon X \to \mathbb{R}$: чем больше значение функции u, тем выше предпочтение данного потребительского набора.

Рассмотрим множество $\varPhi(p)$ всех потребительских наборов, доступных потребителю по его финансовым возможностям и наиболее желанных. Иными словами, мы должны выбрать из бюджетного множества $B(p)$ те наборы, на которых функция полезности u принимает максимальное значение (таких наборов может не быть).

Положим
$$\Phi(p) = \Big\{x \in B(p) : u(x) = \sup_{x' \in B(p)} u(x')\Big\}.$$
Многозначное отображение $p \mapsto \Phi(p)$ на своей области определения, т.е. для тех p, при которых $\Phi(p) \neq \emptyset$, назовем ***функцией спроса***.

Выше мы описали характеристики отдельного потребителя. Пусть теперь имеется l потребителей, тогда i-ый потребитель характеризуется:

- непустым потребительским множеством $X_i \subset \mathbb{R}^n_+$;
- функцией дохода $K_i(p) = \langle b_i, p\rangle + I_i(p)$, зависящей от системы цен $p \in \mathbb{R}^n_+$ на имеющиеся товары и складывающейся из доходов от продажи b_i первичных факторов и дохода $I_i(p)$ от участия в производственном секторе;
- функцией спроса $\Phi_i(p)$, также зависящей от системы цен p (при некоторых p множество $\Phi(p)$ может быть пустым).

Рассмотрим теперь ***структуру производства***. Обозначим $Y \subset \mathbb{R}^n_+$ множеством тех потребительских наборов, которые оно может произвести. Будем считать, что множество Y непусто и называть его ***технологическим множеством***. Элементы множества Y принято называть также ***производственными планами*** или, короче, ***планами***.

Выберем во множестве Y все те планы, которые имеют наибольшую стоимость, т.е. те y, на которых функция $\langle p, y\rangle$ максимальна. Это множество обозначим $\Psi(p)$, а многозначное отображение $p \mapsto \Psi(p)$ назовем ***функцией предложения***. Таким образом,
$$\Psi(p) = \Big\{y \in Y : \langle p, y\rangle = \sup_{y' \in Y} \langle p, y'\rangle\Big\}.$$
Чисто формально, множество $\Psi(p)$ может быть пустым при некоторых p, скажем, если Y неограничено или незамкнуто. Однако, как правило, считается, что Y — замкнуто и ограничено (с экономической точки зрения это естественно). Таким образом, Y компактно (см. ниже), поэтому на таком Y линейная функция $\langle p, y'\rangle$ принимает свое наибольшее значение, так что $\Psi(p)$ непусто при всех p. **Ниже, если не оговорено противное, мы будем предполагать, что $\Psi(p)$ непусто при всех p.**

Отметим также, что с помощью (непустого) Y можно смоделировать и ситуацию с отсутствующим производством, например, в случае международной торговли. В этом случае полагают $Y = \{0\}$.

Итак, будем предполагать, что имеется m производств, причем i-ое производство характеризуется непустым технологическим множеством $Y_i \subset \mathbb{R}^n_+$ и функцией предложения $\Psi_i(p)$.

Чтобы описать систему в целом, мы введем следующие объекты.

Пусть A и B — подмножества $\mathbb{R}^n$, тогда множество $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ называется ***суммой Минковского*** множеств A и B. По индукции определяется сумма Минковского любого конечного числа множеств. Отметим, что если хотя бы одно из множеств, входящих в сумму Минковского, — пустое, то и сумма Минковского — пустое множество. Если $\lambda \in \mathbb{R}$, то естественно определено и $\lambda A = \{\lambda\, a : a \in A\}$. Таким образом, на множестве всех подмножеств $\mathbb{R}^n$ определены линейные комбинации. Отметим, что эта структура не порождает линейного пространства (объясните почему).

Определение 5.1. ***Совокупным технологическим множеством*** Y мы называем (непустое) множество $\sum_{i=1}^m Y_i$, а ***функцией*** $\Psi(p)$ ***совокупного предложения производственного сектора*** — многозначное отображение $p \mapsto \sum_{i=1}^m \Psi_i(p)$.

Замечание 5.2. Непустое множество $\Psi(p)$ состоит из сумм всех планов, каждый из которых является совокупным результатом оптимального функционирования каждого из m производства.

С другой стороны, у нас теперь имеется совокупное технологическое множество Y, состоящее из совокупных результатов всевозможных, не обязательно оптимальных, функционирований всех m производств. С точки зрения “коллективного производства”, наиболее выгодными являются совокупные планы, составляющие множество
$$\Psi^*(p) = \big\{y \in Y : \langle p, y\rangle = \sup_{y' \in Y} \langle p, y'\rangle\big\}.$$
Оказывается, в этой модели личная выгода каждого производства эквивалентна совокупной выгоде. А именно, имеет место следующий результат.

Предложение 5.3. *Для каждого $p \in \mathbb{R}^n_+$ выполняется $\Psi^*(p) = \Psi(p)$, т.е. личная и общественная выгода совпадают.*

Доказательство. Действительно, пусть $y \in \Psi^*(p)$, тогда $y = \sum_{i=1}^m y_i$, где $y_i \in Y_i$. Покажем, что $y_i \in \Psi_i(p)$, т.е. $\Psi^*(p) \subset \sum_{i=1}^m \Psi_i(p)$.

Для каждого $i = 1, \ldots, m$ выберем произвольное $y'_i \in \Psi_i(p)$. Имеем:

$$\langle p, y\rangle = \Big\langle p, \sum_{i=1}^m y_i \Big\rangle = \sum_{i=1}^m \langle p, y_i\rangle \le \sum_{i=1}^m \langle p, y'_i\rangle = \Big\langle p, \sum_{i=1}^m y'_i \Big\rangle \le \langle p, y\rangle,$$

поэтому $\sum_{i=1}^m \langle p, y_i\rangle = \sum_{i=1}^m \langle p, y'_i\rangle$, и так как для каждого $i = 1, \ldots, m$ выполняется $\langle p, y_i\rangle \le \langle p, y'_i\rangle$, имеем $\langle p, y_i\rangle = \langle p, y'_i\rangle$, т.е. $y_i \in \Psi_i(p)$.

Обратно, выберем произвольные $y_i \in \Psi_i(p)$ и положим $y = \sum_{i=1}^m y_i$. Тогда для любого $y' \in Y$, $y' = \sum_{i=1}^m y'_i$, где $y'_i \in Y_i$, выполняется

$$\langle p, y'\rangle = \sum_{i=1}^n \langle p, y'_i\rangle \le \sum_{i=1}^n \langle p, y_i\rangle = \langle p, y\rangle,$$

поэтому $y \in \Psi^*(p)$, и, значит, $\sum_{i=1}^m \Psi_i(p) \subset \Psi^*(p)$, что и требовалось. □

Таким образом, мы можем характеризовать весь производственный сектор совокупным технологическим множеством Y и функцией совокупного предложения $\Psi(p)$, забыв об отдельных производителях.

Далее, мы будем считать, что весь доход производственного сектора, т.е. величина $\langle p, y\rangle$ для любого $y \in \Psi(p)$, делится между потребителями:

$$\langle p, y\rangle = \sum_{j=1}^l I_j(p), \quad y \in \Psi(p).$$

Определение 5.4. Набор $(y_1^*, \ldots, y_m^*, x_1^*, \ldots, x_l^*, p^*)$ векторов из $\mathbb{R}^n_+$ называется ***конкурентным равновесием***, если

(5.1) $$y_k^* \in \Psi_k(p^*), \quad k = 1, \ldots, m,$$

(действия каждого производителя оптимальны)

(5.2) $$x_i^* \in \Phi_i(p^*), \quad i = 1, \ldots, l,$$

(действия каждого потребителя оптимальны)

а также выполняются ***соотношения баланса спроса и предложения***:

(5.3) $$\sum_{i=1}^l x_i^* \le \sum_{k=1}^m y_k^* + \sum_{i=1}^l b_i,$$

(спрос не превышает предложения)

(5.4) $$\Big\langle p^*, \sum_{i=1}^l x_i^*, \Big\rangle = \Big\langle p^*, \sum_{k=1}^m y_k^* + \sum_{i=1}^l b_i \Big\rangle.$$

(стоимости купленных и проданных товаров равны)

Определение 5.5. Вектор p^* — компонента конкурентного равновесия — называется ***вектором равновесных цен***.

Учитывая, что в нашей системе продают товары не только производители, но и потребители, определим ***функцию совокупного предложения*** $\Psi(p)$ как сумму функции $\Psi(p)$ совокупного предложения производственного сектора и вектора $b = \sum_{i=1}^l b_i$, учитывающего совокупную продажу всеми потребителями:

$$\Psi(p) = b + \sum_{k=1}^m \Psi_k(p), \quad b = \sum_{i=1}^l b_i.$$

Кроме того, определим ***функцию*** $\Phi(p)$ ***совокупного спроса*** как сумму функций спроса отдельных потребителей:

$$\Phi(p) = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(p).$$

Ясно, что множеством значений многозначного отображения $\Psi(p)$ является ***совокупное потребительское множество*** $X = \sum_{i=1}^{l} X_i$.

Многозначные функции $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$ связаны естественным соотношением, которое описывается следующим результатом.

Предложение 5.6. *Для любых* $x \in \Phi(p)$ *и* $y \in \Psi(p)$ *имеем:*

$$\langle p, x\rangle \leq \langle p, y\rangle. \tag{5.5}$$

Иными словами, в стоимостном выражении, спрос не превышает предложения.

Доказательство. В самом деле, выберем произвольный $x \in \Phi(p)$ и представим его в виде $x = \sum_{i=1}^{l} x_i$, где $x_i \in \Phi_i(p)$. По определению функции $\Phi_i(p)$, имеем: $x_i \in B_i(p) = \big\{x' \in X_i : \langle p, x'\rangle \leq K_i(p)\big\}$, где $K_i(p) = b_i + I_i(p)$, поэтому $\langle p, x_i\rangle \leq \langle p, b_i\rangle + I_i(p)$. Суммируя по i, получаем

$$\langle p, x\rangle \leq \langle p, b\rangle + \sum_{i=1}^{l} I_i(p).$$

С другой стороны, если $y \in \Psi(p)$, то, по определению, $y = b + \sum_{k=1}^{m} y_k$, где $y_k \in \Psi_k(p)$. Обозначим через y_0 сумму $\sum_{k=1}^{m} y_k$. По предложению 5.3, $y_0 \in \Psi(p)$, и, в силу нашего предположения, что весь доход производственного сектора делится между потребителями, имеем: $\sum_{i=1}^{l} I_i(p) = \langle p, y_0\rangle$. Отсюда заключаем, что $\langle p, y\rangle = \langle p, b\rangle + \sum_{i=1}^{l} I_i(p)$. Предложение доказано. $\square$

Определение 5.7. Соотношение (5.5) называется ***законом Вальраса в широком смысле слова***. Если в соотношении (5.5) заменить неравенство на равенство, то мы получим ***закон Вальраса в узком смысле слова***.

Сформулируем теперь определение конкурентного равновесия в терминах функций совокупного спроса и предложения.

Определение 5.8. Набор (y^*, x^*, p^*) называется ***конкурентным равновесием***, если

$$y^* \in \Psi(p), \tag{5.6}$$
$$x^* \in \Phi(p), \tag{5.7}$$
$$x^* \leq y^*, \tag{5.8}$$
$$\langle p^*, x^*\rangle = \langle p^*, y^*\rangle. \tag{5.9}$$

Далее, мы рассмотрим случай однозначных отображений, сформулируем и докажем теорему Брауэра, затем перейдем к многозначным отображениям и теореме Какутани, и, наконец, расскажем, как применяются эти теоремы в экономике.

Глава 6

Неподвижные точки однозначных и многозначных отображений

План. Неподвижные точки отображения, неподвижные точки и решение уравнений, неподвижные точки и равновесные цены, неподвижные точки и решение систем дифференциальных уравнений, оператор Пикара, циклическая точка отображения, инвариантное подмножество отображения, неподвижная или особая точка векторного поля, метрическое пространство, сходящиеся последовательности, пределы сходящихся последовательностей, подпоследовательность, фундаментальная последовательность или последовательность Коши, k-липшицевы отображения, сжимающие отображения, непрерывные отображения, равномерно непрерывные отображения, свойства сжимающих отображений, теорема Брауэра, ретракция, теорема Брауэра в терминах ретракции, элементы геометрии и топологии метрических пространств, открытый шар, открытое множество, замкнутое множество, замкнутый шар, ограниченное множество, ε-сети, вполне ограниченные множества, полная ограниченность, покрытие, подпокрытие, открытое покрытие, компактность, секвенциальная компактность, гомеоморфизм, элементы аффинной и выпуклой геометрии, аффинное подпространство, размерность аффинного подпространства, аффинная оболочка, аффинная размерность подмножества $\mathbb{R}^n$, внутренняя точка подмножества метрического пространства, внутренность, относительная внутренность подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, аффинно независимые точки в $\mathbb{R}^n$, выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, выпуклая оболочка, стандартный n-мерный симплекс, гиперплоскость, замкнутые и открытые полупространства, ограниченные гиперплоскостью, обобщение теоремы Брауэра на выпуклые компакты, многозначные отображения, график многозначного отображения, неподвижная точка многозначного отображения, полунепрерывность сверху (снизу) однозначной функции, расстояние от точки до множества, открытые и замкнутые окрестности множеств, полунепрерывность сверху (снизу) многозначного отображения, теорема Какутани.

6.1 Неподвижные точки

В настоящем разделе мы рассмотрим основные понятия теории неподвижных точек отображений и проиллюстрируем на примерах некоторые приложения этих понятий.

Пусть X — произвольное множество и $f\colon X \to X$ — некоторое отображения множества X в себя.

Определение 6.1. Элемент $x_0 \in X$ называется ***неподвижной точкой отображения*** f, если $f(x_0) = x_0$.

Пример 6.2 (Неподвижные точки и решение уравнений)**.** Пусть $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — некоторое отображение. Рассмотрим уравнение $F(x) = 0$. Решение этого уравнения можно свести к нахождению неподвижной точки, если заменить отображение F на отображение G такое, что $G(x) = F(x) + x$.

Действительно, x_0 — решение уравнения $F(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $G(x_0) = F(x_0) + x_0 = x_0$, т.е. когда x_0 — неподвижная точка отображения G.

Пример 6.3 (Неподвижные точки и равновесные цены)**.** Пусть на рынке имеется некоторый товар в количестве q и по цене p. Обозначим $p = s(q)$ и $p = d(q)$ соответственно функции предложения и спроса. Требуется найти такое количество товара q_0, при котором цена, которую готов платить потребитель, т.е. $d(q_0)$, совпадала бы с ценой, которую назначает производитель, т.е. с $s(q_0)$. Иными словами, требуется найти точки пересечения графиков функций s и d. Характерные графики приведены на рис. 6.1.

Эта задача естественно сводится к решению уравнения $s(q) - d(q) = 0$. Как и в примере 6.3, сводим решение этого уравнения к нахождению неподвижной точки функции $g(q) = d(q) - s(q) + q$. Итак, мы можем строить разные модели для нахождения равновесного состояний рынка и, используя показанный выше метод, разрешать их.

Пример 6.4 (Неподвижные точки и решение систем дифференциальных уравнений)**.** Пусть дана система дифференциальных уравнений с заданным начальным условием:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}^n \tag{6.1}$$

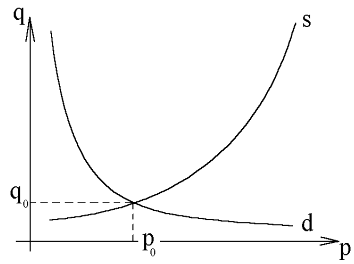

Рис. 6.1: Поиск равновесной цены

Рассмотрим оператор

$$A\colon x(t) \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(x(s), s\big)\, ds,$$

действующий на пространстве всех непрерывных $\mathbb{R}^n$-значных функций $C[a,b]$, определенных на некотором отрезке $[a,b]$, $t_0 \in (a,b)$. Отображение A называется ***оператором Пикара***.

Покажем, что $x(t)$ является решением системы 6.1 тогда и только тогда, когда $x(t)$ — неподвижная точка оператора Пикара. Действительно, если $x(t)$ — неподвижная точка оператора Пикара, то выполняется

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)\, ds, \tag{6.2}$$

поэтому $x(t_0) = x_0$ и функция $x(t)$ дифференцируема. Дифференцируя уравнение 6.2 по t, получаем $\dot{x}(t) = f\big(x(t), t\big)$, что и требовалось. Доказательство в обратную сторону получается интегрирование дифференциального уравнения из (6.1).

Обобщим определение неподвижной точки. Пусть X — произвольное множество и $f\colon X \to X$ — отображение множества X в себя. Рассмотрим n-ую итерацию f^n отображения f:

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(f(\cdots f}_{n \text{ раз}}(x)\cdots))).$$

Определение 6.5. Точка $x_0 \in X$ называется ***циклической для отображения*** f, если для некоторого целого $n > 0$ выполняется $f^n(x_0) = x_0$. Каждое такое n называется ***периодом***.

Пример 6.6. Пусть $f\colon S^1 \to S^1$ является поворотом стандартной окружности S^1 на угол $\pi/4$. Тогда любая точка $x_0 \in S^1$ является циклической, а наименьший период равен 8.

Определение 6.7. Подмножество $Y \subset X$ называется ***инвариантным подмножеством отображения*** f, если $f(Y) \subset Y$, т.е. для любого $y \in Y$ выполняется $f(y) \in Y$.

Тривиальным примером инвариантного подмножества является все множество X.

Пример 6.8. Рассмотрим отображение $f\colon S^1 \to S^1$, являющееся поворотом на угол π/α, где α — произвольное иррациональное число. Тогда для любой точки $x_0 \in S^1$ множество точек вида $f^n(x_0)$ по всем возможным n образует всюду плотное инвариантное подмножество, не совпадающее со всей окружностью S^1. Отсюда заключаем, что отображение f, обладая инвариантными подмножествами, может не иметь ни одной неподвижной точки.

Пример 6.9. Пусть на области $U \subset \mathbb{R}^n$ задано векторное поле v. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$, и пусть $x(t)$ — решение этого уравнения с начальным условием $x(t_0) = x_0$. Спрашивается, когда x_0 является неподвижной точкой, т.е. когда $x(t) = x_0$ для любого t из области определения решения $x(t)$.

Продифференцировав $x(t)$ по t, получим, что x_0 неподвижная точка, если и только если $\dot{x} = 0$, откуда $v(x_0) = 0$.

Определение 6.10. Точка $x_0 \in U$ называется ***неподвижной*** или ***особой*** точкой векторного поля v, если векторное поле v обращается в этой точке в ноль: $v(x_0) = 0$.

Рассмотрим далее некоторые условия, гарантирующие существование у данного отображения неподвижной точки, а также единственность такой точки. Для этого введем важный класс отображений — так называемые сжимающие отображения.

6.2 Сжимающие отображения

Пусть X — метрическое пространство. Напомним, что ***метрическим пространством*** называется множество X вместе с заданной на парах точек из X вещественной функцией $\rho(x,y)$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

(1) $\rho(x,y) \ge 0$, причем $\rho(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (положительная определенность);

(2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ (симметричность);

(3) $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$ (неравенство треугольника).

Последовательность точек $x_1, x_2, \dots$ из метрического пространства X называется ***сходящейся к точке*** $x \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что при каждом $n > N$ выполняется $\rho(x_n, x) < \varepsilon$. Такое x называется ***пределом последовательности*** $x_1, x_2, \dots$ и обозначается $\lim_{n\to\infty} x_n$. Если $i_1, i_2, \dots$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то набор точек $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots$ называется ***подпоследовательностью*** в последовательности $x_1, x_2, \dots$. Ясно, что каждая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится, причем к тому же пределу.

Последовательность $x_1, x_2, \dots$ называется ***фундаментальной*** или ***последовательностью Коши***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при любых $m, n > N$ выполняется $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$. Ясно, что каждая подпоследовательность фундаментальной последовательности тоже фундаментальна. Метрическое пространство называется ***полным***, если любая фундаментальная последовательность в нем имеет предел.

Определение 6.11. Пусть $k \in \mathbb{R}$ — неотрицательное число. Отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y) называется ***k-липшицевым***, если для всех $x, x' \in X$ выполняется

$$\rho_Y\big(f(x), f(x')\big) \le k \cdot \rho_X(x, x').$$

Число k называется ***константой Липшица***. Ясно, что константа Липшица определена, вообще говоря, неоднозначно. Если при этом k можно выбрать меньшим 1, то f называется ***сжимающим отображением***. В частности, для сжимающего отображения f и любых $x, x' \in X$ имеем

$$\rho_Y\big(f(x), f(x')\big) < \rho_X(x, x').$$

Отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства (X, ρ_X) в метрическое пространство (Y, ρ_Y) называется ***непрерывным в точке*** x, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждого $x' \in X$, $\rho_X(x, x') < \delta$, выполняется $\rho_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$. Отображение f называется непрерывным (в целом или на всем X), если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Задача 6.12. Покажите, что отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств непрерывно в точке $x \in X$, если и только если образ каждой последовательности $x_1, x_2, \dots$ в X, сходящейся к x, сходится к $f(x)$:

$$f\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Выведите отсюда, что ограничение непрерывного f на любое подмножество A пространства X и любое подмножество B пространства Y, содержащее $f(A)$, — также непрерывно.

Напомним также, что отображение f называется ***равномерно непрерывным***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для каждых $x, x' \in X$, $\rho_X(x, x') < \delta$, выполняется $\rho_Y\big(f(x), f(x')\big) < \varepsilon$. Ясно, что равномерно непрерывное отображение непрерывно.

Предложение 6.13. *Каждое k-липшицево, в частности, каждое сжимающее отображение равномерно непрерывно.*

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — произвольное k-липшицево отображение. Если $k = 0$, то в качестве δ можно выбрать произвольное положительное число. Если же $k > 0$, то положим $\delta = \varepsilon/k$, тогда для любых $x, x' \in X$, $\rho_X(x, x') < \delta$, имеем

$$\rho_Y\big(f(x), f(x')\big) \le k \cdot \rho_X(x, x') < k \cdot \delta = \varepsilon,$$

что и требовалось. $\square$

Теорема 6.14. *Пусть (X,ρ) — произвольное метрическое пространство и $f\colon X\to X$ — сжимающее отображение. Тогда*

(1) *у f имеется не более одной неподвижной точки*;

(2) *если пространство X — полное, то у f имеется неподвижная точка*;

(3) *если пространство X — полное, то существует и единственна точка x_0 такая, что для любой точки $x\in X$ выполняется $f^n(x)\to x_0$ при $n\to\infty$. Эта точка x_0 и есть единственная неподвижная точка отображения f.*

Доказательство. (1) Пусть существует две разных неподвижных точки x_0 и x_0^*, тогда

$$\rho(x_0,x_0^*)=\rho(f(x_0),f(x_0^*))<\rho(x_0,x_0^*),$$

противоречие.

(2), (3) Пусть $k<1$ — константа Липшица отображения f. Выберем произвольную точку $x\in X$ и положим $x_n=f^n(x)$ и $d=\rho\big(x,f(x)\big)$. Тогда

$$\rho\big(f(x),f^2(x)\big)\le k\cdot\rho\big(x,f(x)\big)=k\,d,$$

откуда, по индукции, получаем

$$\rho\big(f^n(x),f^{n+1}(x)\big)\le k^n d.$$

Следовательно,

$$\rho(x_n,x_{n+j})=\rho\big(f^n(x),\,f^{n+j}(x)\big)\le$$
$$\rho\big(f^n(x),\,f^{n+1}(x)\big)+\cdots+\rho\big(f^{n+j-1}(x),\,f^{n+j}(x)\big)\le k^n d+\cdots+k^{n+j-1}d\le k^n\frac{d}{1-k}.$$

Так как $0\le k<1$, то для любого $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для любого $n>N$ имеем $k^n\frac{d}{1-k}<\varepsilon$, и, в частности, $\rho(x_n,x_{n+j})<\varepsilon$ для любого j. Поэтому последовательность $f^n(x)$ является фундаментальной, и, в силу полноты пространства X, эта последовательность сходится к некоторой точке x_0. Иными словами, существует предел

$$\lim_{n\to\infty}f^n(x)=x_0.$$

Далее, по предложению 6.13, отображение f непрерывно, поэтому

$$f(x_0)=f\Big(\lim_{n\to\infty}f^n(x)\Big)=\lim_{n\to\infty}f^{n+1}(x)=x_0,$$

т.е. x_0 — неподвижная точка. Теорема полностью доказана. □

6.3 Теоремы о неподвижных точках однозначных отображений

Теорема 6.15 (Брауэр)**.** *Пусть $f\colon D^n\to D^n$ — непрерывное отображение стандартного n-мерного диска $D^n=\big\{x\in\mathbb{R}^n\mid\sum_{i=1}^n x_i^2\le1\big\}$ в себя. Тогда у отображения f имеется неподвижная точка x_0.*

Доказательство. Мы докажем эту теорему для случая $n=1$, т.е. когда D^n — это отрезок $[0,1]$ (доказательство в общем случае достаточно сложно и может быть найдено как в стандартном курсе дифференциальной геометрии для гладкого отображения f, так и в курсе общей топологии для непрерывного f).

Предположим противное, т.е. что f не имеет неподвижных точек, и положим $g(x)=f(x)-x$. Так как -1 и 1 не являются неподвижными точками функции f, и f отображает отрезок $[-1,1]$ в себя, то $f(-1)>-1$ и $f(1)<1$, поэтому $g(-1)=f(-1)+1>0$ и $g(1)=f(1)-1<0$. Так как функция f непрерывна, то и g также непрерывна, поэтому, по теореме Коши, функция g принимает на отрезке $[-1,1]$ нулевое значение. Иными словами, существует $x_0\in[-1,1]$ такое, что $g(x_0)=f(x_0)-x_0=0$, откуда $f(x_0)=x_0$, противоречие. □

Приведем некоторые варианты теоремы Брауэра. Предположим, что непрерывное отображение $f\colon D^n\to D^n$ не имеет неподвижных точек. Определим отображение $g\colon D^n\to\partial D^n=S^{n-1}$ по следующему правилу: для каждой точки $x\in D^n$ рассмотрим луч, начинающийся в $f(x)$ и проходящий через x. Последнюю точку пересечения этого луча с границей $\partial D^n=S^{n-1}$ диска D^n обозначим $g(x)$. Тем самым мы определили непрерывное отображение $g\colon D^n\to S^{n-1}$, неподвижное на S^{n-1}: для любой точки $x\in S^{n-1}$ имеем $g(x)=x$.

Определение 6.16. Непрерывное отображение $g\colon D^n \to \partial D^n$ называется ***ретракцией***, если для любой точки $x \in \partial D^n$ выполняется $g(x) = x$.

Теорема 6.17 (Переформулировка теоремы Брауэра)**.** *Не существует ретракции* $g\colon D^n \to \partial D^n = S^{n-1}$.

Распространим теорему Брауэра на множества более общего вида. Для этого напомним ряд необходимых определений и результатов из геометрии и топологии.

6.3.1 Элементы геометрии и топологии метрических пространств

Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, например, $X = \mathbb{R}^n$, а ρ — евклидово расстояние, т.е. $\rho(x, x') = \|x - x'\|$. ***Открытым шаром в*** $\mathbb{R}^n$ ***с центром в точке*** $x \in X$ ***и радиусом*** $r > 0$ называется множество

$$U_r(x) = \bigl\{x' \in X : \rho(x, x') < r\bigr\}.$$

Множество $U \subset X$ называется ***открытым***, если для каждой точки $x \in U$ существует $r > 0$ такое, что $U_r(x) \subset U$ (каждая точка содержится в U вместе с некоторым открытым шаром с центром в этой точке). Пустое множество также относится к открытым множествам.

Пример 6.18. Открытый шар $U_r(x) \subset X$ является примером открытого множества (вытекает из неравенства треугольника). Другой пример: если $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $c \in \mathbb{R}$, то множества $\{f < c\} := \bigl\{x \in X : f(x) < c\bigr\}$ и $\{f > c\} := \bigl\{x \in X : f(x) > c\bigr\}$ открыты (докажите).

Задача 6.19. Покажите, что объединение любого набора открытых множеств, а также пересечение любого конечного набора открытых множеств, также является открытым множеством. В частности, открытыми множествами являются пустое (объединение пустого набора) и все пространство (объединение всех открытых шаров).

Таким образом, семейство всех открытых подмножеств метрического пространства удовлетворяет аксиомам топологии и называется ***метрической топологией***, см. раздел 1.2.

Напомним, что дополнения до открытых множеств называются замкнутыми множествами.

Пример 6.20. ***Замкнутый шар*** $B_r(x) = \bigl\{x' \in X : \rho(x, x') \le r\bigr\}$ является примером замкнутого множества (это снова вытекает из неравенства треугольника). Другой пример: если $f\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция и $c \in \mathbb{R}$, то множества

$$\{f \le c\} := \bigl\{x \in X : f(x) \le c\bigr\},\quad \{f \ge c\} := \bigl\{x \in X : f(x) \ge c\bigr\}\ \text{ и }\ \{f = c\} := \bigl\{x \in X : f(x) = c\bigr\}$$

замкнуты (докажите).

Часто непрерывность отображения метрических пространств удобно проверять в терминах открытых и замкнутых множеств. Приведем соответствующий результат.

Задача 6.21. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрических пространств. Докажите, что следующие три утверждения эквивалентны:

- отображение f непрерывно;
- f-прообраз каждого открытого множества открыт;
- f-прообраз каждого замкнутого множества замкнут.

Множество $A \subset X$ называется ***ограниченным***, если оно содержится в некотором шаре. Ограниченность подмножеств $\mathbb{R}^n$ эквивалентна другому важному понятию — полной ограниченности. Определим это понятие в случае общих метрических пространств.

Пусть опять (X, ρ) — метрическое пространство, A — произвольное подмножество X и $\varepsilon > 0$ — число, тогда множество $S \subset A$ называется ε***-сетью для*** A, если для каждого $a \in A$ существует $s \in S$ такое, что $\rho(s, a) < \varepsilon$. Подмножество $A \subset X$ называется ***вполне ограниченным***, если для каждого $\varepsilon > 0$ в A можно найти конечную ε-сеть. Свойства множества A быть вполне ограниченным называют также ***полной ограниченностью***.

Задача 6.22. Пусть A — подмножество метрического пространства X.

- Покажите, что если A — вполне ограничено, то оно и ограничено.
- Приведите пример пространства X и ограниченного A, которое не является вполне ограниченным.
- Покажите, что если $X = \mathbb{R}^n$, то ограниченность A эквивалентна полной ограниченности.

Пусть X — произвольное множество, Y — его подмножество и $\{Y_i\}_{i\in I}$ — семейство подмножеств X. Это семейство называется ***покрытием*** Y, если $Y \subset \cup_{i\in I} Y_i$. Подсемейство покрытия, также являющееся покрытием, называется ***подпокрытием***. Если X — метрическое пространство, $Y \subset X$ и $\{U_i\}_{i\in I}$ — покрытие Y, в котором все U_i являются открытыми множествами, то покрытие $\{U_i\}_{i\in I}$ называется ***открытым***.

Подмножество K метрического пространства X называется ***компактным***, если из любого его открытого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие.

Задача 6.23. Пусть K — компактное подмножество метрического пространства X. Покажите, что множество K вполне ограничено и, значит, ограничено; замкнуто; полное. Приведите пример метрического пространства X и его замкнутого и ограниченного пространства, которое не является вполне ограниченным и, значит, не компактно.

Тем не менее, в $\mathbb{R}^n$ замкнутости и ограниченности вполне достаточно для компактности.

Задача 6.24. Докажите, что множество $K \subset \mathbb{R}^n$ компактно, если и только если оно одновременно замкнуто и ограничено.

Замечание 6.25. В случае общих метрических пространств компактность равносильна полной ограниченности и полноте.

Метрическое пространство называется ***секвенциально компактным***, если у каждой последовательности в нем имеется сходящаяся подпоследовательность.

Задача 6.26. Покажите, что подмножество K метрического пространства X компактно, если и только если оно секвенциально компактно.

Пусть A и B — подмножества метрическое пространства (X, ρ). Будем рассматривать A и B как метрические пространства, расстояние в которых индуцировано ρ, т.е. измеряется с помощью метрики ρ. Тогда определено понятие непрерывности для отображения $f\colon A \to B$. Отображение $f\colon A \to B$ называется ***гомеоморфизмом***, если f биективно, непрерывно, и f^{-1} также непрерывно. Множества $A \subset X$ и $B \subset X$ называются ***гомеоморфными***, если существует гомеоморфизм $f\colon A \to B$.

Задача 6.27. Пусть X и Y — метрические пространства, и $K \subset X$ — компакт. Докажите, что

- если $f\colon K \to Y$ — непрерывное отображение, то $f(K)$ — тоже компакт;
- выведите из предыдущего пункта, что непрерывная на компакте функция ограничена и принимает свои наименьшее и наибольшее значения;
- если $f\colon K \to Y$ — инъективное непрерывное отображение, то f — гомеоморфизм между K и $f(K)$;
- приведите пример множества $A \subset \mathbb{R}^n$ и инъективного непрерывного отображения $f\colon A \to \mathbb{R}^m$, для которого A и $f(A)$ не гомеоморфны, в частности, f не является гомеоморфизмом.

6.3.2 Элементы аффинной и выпуклой геометрии

Напомним, что ***аффинным подпространством в*** $\mathbb{R}^n$ называется каждое подмножество V вида $v+L$, где L — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$. ***Размерностью аффинного подпространства*** V называется размерность линейного подпространства L.

Замечание 6.28. Линейная структура подпространства L индуцирует линейную структуру и на аффинном подпространстве $V = v + L$ если считать, что начало координат аффинного пространства V выбрано в точке v. Следующая задача показывает, что начало координат можно выбрать в любой точке пространства V.

Задача 6.29. Пусть V — некоторое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Докажите, что

- если V — аффинное подпространство, то для каждого $v \in V$ множество $V - v$ — линейное подпространство $\mathbb{R}^n$;
- если для некоторого $v \in V$ множество $V - v$ — линейное подпространство $\mathbb{R}^n$, то V — аффинное подпространство $\mathbb{R}^n$.

Задача 6.30. Докажите, что пересечение аффинных подпространств — снова аффинное подпространство (пустое множество мы тоже относим к аффинным подпространствам).

Замечание 6.31. На аффинном подпространстве $V \subset \mathbb{R}^n$ индуцируется из $\mathbb{R}^n$ функция расстояния, причем каждый открытый шар в V получается как пересечение с V открытого в $\mathbb{R}^n$ шара с тем же центром и радиусом.

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, тогда ***аффинной оболочкой*** $\operatorname{aff} A$ ***множества*** A называется пересечение всех аффинных подпространств $\mathbb{R}^n$, содержащих A. Таким образом, $\operatorname{aff} A$ — это наименьшее аффинное подпространство, содержащее A. ***Аффинной размерностью множества*** A назовем размерность его аффинной оболочки.

Пусть A — подмножество метрического пространства X и $a \in A$. Точка a называется ***внутренней для*** A, если некоторый открытый шар $U_r(a)$ содержится в A. Множество всех внутренних точек в A называется ***внутренностью*** A и обозначается $\operatorname{int} A$. Обобщим понятие внутренности для подмножеств A пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $V = \operatorname{aff} A$, тогда, рассматривая V, в соответствии с замечаниями 6.28 и 6.31, как линейное пространство, наделенное функцией расстояния, мы ровно также можем определить понятие внутренней точки множества A как подмножества V. Множество всех так определенных внутренних точек называется ***относительной внутренностью множества*** A и обозначается $\operatorname{relint} A$.

Мы говорим, что точки $v_0, \dots, v_m$ в $\mathbb{R}^n$ ***аффинно независимы***, если векторы $v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0$ линейно независимы.

Задача 6.32. Покажите, что в каждом $A \subset \mathbb{R}^n$ аффинной размерности m можно выбрать $(m+1)$-у аффинно независимую точку, и нельзя выбрать больше аффинно независимых точек.

Подмножество $A \subset \mathbb{R}^n$ называется ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя точками оно содержит и отрезок, их соединяющий. Легко видеть, что пересечение выпуклых множеств выпукло.

Задача 6.33. Докажите, что пересечение выпуклых множеств — снова выпуклое множество (пустое множество мы тоже относим к выпуклым).

Пересечение всех выпуклых множеств, содержащих данное множество $A \subset \mathbb{R}^n$, называется ***выпуклой оболочкой множества*** A и обозначается $\operatorname{conv}(A)$. Иными словами, выпуклая оболочка множества $A \subset \mathbb{R}^n$ — это наименьшее выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, содержащее A.

Пусть $x_1, \dots, x_m$ — конечный набор точек в $\mathbb{R}^n$, а $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — неотрицательные числа такие, что $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$. Тогда величина $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ называется ***выпуклой комбинацией*** точек $x_1, \dots, x_m$.

Задача 6.34. Пусть A — произвольное подмножество $\mathbb{R}^n$, а $x_1, \dots, x_m$ — точки из A. Докажите, что выпуклая комбинация $\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$ содержится в $\operatorname{conv} A$.

Выпуклая оболочка аффинно независимого множества точек $\{v_k\}_{k=0}^n \subset \mathbb{R}^n$ называется ***n-мерным симплексом***. ***Стандартным n-мерным симплексом*** Δ^n называется подмножество в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданное следующим образом:

$$\Delta^n = \Big\{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1\Big\}.$$

Замечание 6.35. В силу примера 6.20 и задачи 6.24, симплекс Δ^n компактен.

Следующий результат легко получается из задачи 6.32.

Задача 6.36. Покажите, что у непустого выпуклого множества A относительная внутренность $\operatorname{relint} A$ непуста.

6.3.3 Обобщение теоремы Брауэра на выпуклые компакты

Чтобы обобщить теорему 6.15, нам потребуется следующий результат.

Предложение 6.37. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт. Тогда K гомеоморфен диску $D^m \subset \mathbb{R}^m$ размерности $m \leq n$.*

Доказательство. Положим $V = \operatorname{aff} K$. В силу задачи 6.36, относительная внутренность $\operatorname{relint} K$ непуста. Выберем произвольную точку $v \in \operatorname{relint} K$ и поместим туда начало координат пространства V. Пусть m — размерность пространства V. Рассмотрим в V стандартную единичную сферу S^{m-1} и построим функцию $\varphi\colon S^{m-1} \to \mathbb{R}$, ставящую в соответствие каждой точке $\nu \in S^{m-1}$ число $\varphi(\nu)$ следующим образом:

$$\varphi(\nu) = \sup_{\alpha \ge 0}\{\alpha : \alpha\nu \in K\}.$$

Так как v — внутренняя в V точка K, а компактное множество K, в силу задачи 6.24, — ограничено, то функция φ строго положительна и нигде не обращается в бесконечность. Если D^m — стандартный единичный диск в V с границей S^{m-1}, то построим отображение $a\colon D^n \to K$, оставляющее центр диска D^m на месте, и каждой нецентральной точке $x \in D^m$ ставим в соответствие точку $\varphi(x/\|x\|)\,x$. Легко проверяется, что это отображение биективно и непрерывно, поэтому, в силу задачи 6.27, оно является гомеоморфизмом. Тем самым, мы показали, что выпуклый компакт K гомеоморфен диску D^m, что и требовалось. □

Теорема 6.38 (Теорема Брауэра для выпуклых компактов). *Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт, и $f\colon K \to K$ произвольное непрерывное отображение компакта K в себя. Тогда отображение f имеет неподвижную точку.*

Доказательство. По предложению 6.37, существует диск D^m, гомеоморфный компакту K. Пусть $a\colon D^m \to K$ — гомеоморфизм. Рассмотрим непрерывное отображение $g = a^{-1} \circ f \circ a$, переводящее диск D^m в себя. По теореме 6.15, отображение g имеет некоторую неподвижную точку x_0, т.е. $g(x_0) = x_0$. Рассмотрим точку $y_0 = a(x_0)$ из компакта K. Имеем:

$$f(y_0) = f\big(a(x_0)\big) = a\big(g(x_0)\big) = a(x_0) = y_0,$$

поэтому y_0 — неподвижная точка отображения f, что и требовалось. □

6.4 Теоремы о неподвижных точках многозначных отображений

Основная цель данного раздела — доказать теорему Какутани о неподвижной точке многозначного отображения.

Определение 6.39. Пусть $f\colon X \rightrightarrows X$ — многозначное отображение множества X в себя. Тогда точка $x \in X$ называется ***неподвижной для*** f, если $x \in f(x)$.

6.4.1 Полунепрерывность

В данном разделе мы напомним определение полунепрерывности обычных функций и обобщим его на случай многозначных отображений. Отметим, что предположения полунепрерывности являются одним из условий теоремы Какутани.

Прежде чем дать определение полунепрерывности и непрерывности многозначных отображений, напомним соответствующие понятия для случая функций. Начнем с полезной для дальнейшего переформулировки определения непрерывности. Напомним, что через $U_r(x)$ мы обозначили открытый шар с центром в точке x и радиусом r.

Полунепрерывность (однозначных) функций на метрическом пространстве

Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ — вещественная функция на метрическом пространстве X. Функция f называется ***непрерывной в точке*** $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in U_\delta(x_0)$ выполняются следующие два неравенства:

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) \text{ и } f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Если потребовать выполнение лишь одного из этих двух неравенств, то мы получим определение полунепрерывности.

А именно, функция f называется ***полунепрерывной снизу в точке*** x_0, если для любого $\lambda < f(x_0)$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in U_\delta(x_0)$ выполняется $\lambda < f(x)$. Функция f называется ***полунепрерывной сверху в точке*** x_0, если функция $-f$ полунепрерывна снизу в x_0.

Задача 6.40. Докажите, что функция f непрерывна в точке x_0, если и только если она полунепрерывна в x_0 и снизу, и сверху.

Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ называется ***полунепрерывной снизу (полунепрерывной сверху, непрерывной)***, если f полунепрерывна снизу (полунепрерывна сверху, непрерывна) в каждой точке $x_0 \in X$.

Полунепрерывность многозначных отображений

Перейдем теперь к случаю многозначных отображений. Пусть A — произвольное непустое подмножество метрического пространства (X, ρ) и $x \in X$. Положим $\rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a)$. Величину $\rho(x, A)$ будем называть ***расстоянием от точки x до множества A***. Ниже нам понадобится следующий результат.

Задача 6.41. Пусть K — непустое компактное подмножество метрическое пространства (X, ρ) и $x \in X$. Тогда существует такая точка $k \in K$, что $\rho(x, K) = \rho(x, k)$. В частности, если $x \notin K$, то $\rho(x, K) > 0$.

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ определим следующие два множества:

$$U_\varepsilon(K) = \{x \in X : \rho(x, K) < \varepsilon\} \quad \text{и} \quad B_\varepsilon(K) = \{x \in X : \rho(x, K) \le \varepsilon\}.$$

Множество $U_\varepsilon(K)$ называется ***открытой ε-окрестностью*** K, а $B_\varepsilon(K)$ — ***замкнутой ε-окрестностью*** K. Отметим, что для одноточечного $K = \{x\}$ открытая и замкнутая ε-окрестности K совпадают соответственно с открытым и замкнутым шаром: $U_\varepsilon(K) = U_\varepsilon(x)$ и $B_\varepsilon(K) = B_\varepsilon(x)$.

Задача 6.42. Пусть A — непустое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$, тогда ε-окрестности $U_\varepsilon(A)$ и $B_\varepsilon(A)$ тоже выпуклы.

Определение 6.43. Многозначное отображение $f\colon X \Rightarrow Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y называется ***полунепрерывным сверху в точке*** $x_0 \in X$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой открытый шар $U_r(x_0)$, что для любого $x \in U_r(x_0)$ выполняется $f(x) \subset U_\varepsilon\bigl(f(x_0)\bigr)$. Иными словами, для любой ε-окрестности множества $f(x_0)$ образы всех достаточно близких к x_0 точек лежат в этой ε-окрестности. Многозначное отображение, полунепрерывное сверху во всех точках из области определения, называется ***полунепрерывным сверху***.

Определение 6.44. Многозначное отображение $f\colon X \Rightarrow Y$ метрического пространства X в метрическое пространство Y называется ***полунепрерывным снизу в точке*** $x_0 \in X$, если для любой последовательности $x_1, x_2, \ldots$ точек из X, сходящейся к $x_0 \in X$, и любой точки $y_0 \in f(x_0)$, существует сходящаяся к y_0 последовательность точек $y_1, y_2, \ldots$ из Y таких, что $y_k \in f(x_k)$.

Многозначное отображение, полунепрерывное снизу во всех точках из области определения, называется ***полунепрерывным снизу***. Многозначное отображение, являющееся одновременно полунепрерывным и сверху, и снизу, называется ***непрерывным***.

Задача 6.45. Покажите, что для однозначного отображение f определения полунепрерывности сверху и снизу, данные для многозначных отображений, эквивалентны между собой, а также эквивалентны определению непрерывного отображения.

Отметим, что для многозначных отображений определения полунепрерывности сверху и снизу не эквивалентны, что видно из примеров, приведенных на рис. 6.2.

Теорема 6.46 (Какутани)**.** *Пусть X — компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$ и $f\colon X \Rightarrow X$ — многозначное отображение, полунепрерывное сверху и такое, что для любого $x \in X$ множество $f(x)$ — непустой выпуклый компакт. Тогда у отображения f существует неподвижная точка $x_0 \in X$, т.е. такая точка, что $x_0 \in f(x_0)$.*

Доказательство. План доказательства теоремы Какутани таков. Сначала мы "аппроксимируем" многозначное отображение f однозначными отображениями $\varphi^\varepsilon : X \to X$, где $\varepsilon > 0$ — некоторые вещественные числа; для каждого φ^ε применим теорему Брауэра для выпуклых компактов и найдем неподвижную точку x^ε; устремим ε к нулю и выберем некоторую предельную точку x_0; и, наконец, покажем, что полученная точка и является неподвижной для многозначного отображения f.

Так как множество X компактно, то, в силу задачи 6.26, для каждого $\varepsilon > 0$ в X существует некоторая конечная ε-сеть E^ε. Положим $E^\varepsilon = \{x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon, \ldots\}$. Рассмотрим f-образы $f(x_i^\varepsilon) \subset Y$ точек x_i^ε и в каждом из этих образов выберем произвольную точку y_i^ε.

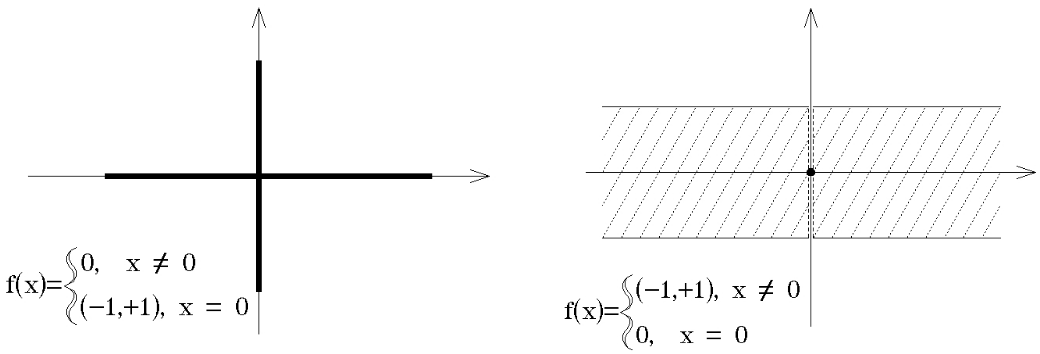

Рис. 6.2: Многозначное отображение, приведенное на рисунке слева, полунепрерывно сверху в точке 0, но не полунепрерывно снизу; многозначное отображение, приведенное на рисунке справа, полунепрерывно снизу в точке 0, но не полунепрерывно сверху.

Далее, по каждой точке x_i^ε построим функцию $\varphi_i^\varepsilon(x)$, определенную на всем пространстве X следующим образом:

$$\varphi_i^\varepsilon(x) = \max\bigl(0, \varepsilon - \|x_i^\varepsilon - x\|\bigr).$$

Эта функция равна ε в точке x_i^ε, равна нулю вне открытого шара $U_\varepsilon(x_i^\varepsilon)$, и вдоль радиусов этого шара линейно убывает от значения ε в центре до нуля на границе. Так как E^ε является ε-сетью, то для каждого $x \in X$ существует x_i^ε такое, что $\varphi^\varepsilon(x) > 0$. Так как, в добавление к сказанному, все функции φ_k^ε неотрицательны, заключаем, что при каждом $x \in X$ сумма $\sum_{k=1} \varphi_k^\varepsilon(x)$ положительна, а это позволяет корректно определить искомую аппроксимацию $\varphi^\varepsilon(x)$ по формуле

$$\varphi^\varepsilon(x) = \frac{\sum_i \varphi_i^\varepsilon(x)\, y_i^\varepsilon}{\sum_k \varphi_k^\varepsilon(x)} = \sum_i \frac{\varphi_i^\varepsilon(x)}{\sum_k \varphi_k^\varepsilon(x)} y_i^\varepsilon = \sum_i \alpha_i^\varepsilon(x) y_i^\varepsilon,$$

где мы положили $\alpha_i^\varepsilon(x) = \varphi_i^\varepsilon(x) / \sum_k \varphi_k^\varepsilon(x)$.

Из сказанного выше вытекает, что $\alpha_i^\varepsilon(x) \ge 0$, причем равенство нулю имеет место, если и только если точка x находится от точки x_i^ε на расстоянии, больше или равном ε. Поэтому, в частности, $\alpha_i^\varepsilon(x) \ne 0$ для тех и только тех i, при которых точки x_i^ε лежат в $U_\varepsilon(x)$. Более того, $\sum_i \alpha_i^\varepsilon(x) = 1$ для любого x, поэтому, в силу задачи 6.34, приходим к следующему результату.

Лемма 6.47. *Для любого $x \in X$ точка $\varphi^\varepsilon(x)$ лежит в выпуклой оболочке точек y_i^ε, для которых $\|x - x_i^\varepsilon\| < \varepsilon$.*

Далее, так как X — выпуклый компакт, то, в силу леммы 6.47, каждое отображение φ^ε переводит X в себя, а, в силу теоремы 6.38, отображение φ^ε имеет неподвижную точку, обозначим ее x^ε. Рассмотрим убывающую последовательность ε_j, стремящуюся к 0. Так как X — компактно, то, в силу задачи 6.26, из последовательности точек x^{ε_j} можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Поэтому, без ограничения общности, сразу будем предполагать, что последовательность точек x^{ε_j} сходится к некоторой точке x_0. Для завершения доказательства осталось проверить справедливость следующей леммы.

Лемма 6.48. *Точка x_0, построенная выше, является неподвижной для отображения f, т.е. $x_0 \in f(x_0)$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. $x_0 \notin f(x_0)$. По условию теоремы, множество $f(x_0)$ компактно, поэтому, по задаче 6.41, расстояние r от точки x_0 до множества $f(x_0)$, т.е. величина $r = \inf_{x \in f(x_0)} \|x_0 - x\|$, строго больше нуля. Тогда открытые окрестности $U_{r/2}\bigl(f(x_0)\bigr)$ и $U_{r/2}(x_0)$ не пересекаются.

Так как отображение f полунепрерывно сверху, у точки x_0 имеется такая шаровая окрестность $U_\delta(x_0)$, что для любой точки $x \in U_\delta(x_0)$ ее образ $f(x)$ содержится в $U_{r/2}\bigl(f(x_0)\bigr)$. Положим $r' = \min(r/2, \delta/2)$ и рассмотрим окрестность $U_{r'}(x_0)$. Рис. 6.3 иллюстрирует введенные обозначения.

Так как $x^{\varepsilon_j} \to x_0$ и $\varepsilon_j \to 0$ при $j \to \infty$, то, начиная с некоторого номера j_0, все точки x^{ε_j} при $j \ge j_0$ лежат в $U_{r'}(x_0)$, причем $\varepsilon_j < \delta/2$. Рассмотрим произвольную такую точку x^{ε_j}.

Точка x^{ε_j} — неподвижная для отображения φ^{ε_j}, поэтому $\varphi^{\varepsilon_j}(x^{\varepsilon_j}) = x^{\varepsilon_j}$. По лемме 6.47, точка $\varphi^{\varepsilon_j}(x^{\varepsilon_j})$ лежит в выпуклой оболочке точек $y_i^{\varepsilon_j}$, для которых $\|x^{\varepsilon_j} - x_i^{\varepsilon_j}\| < \varepsilon_j$. Напомним, что точка $y_i^{\varepsilon_j}$ принадлежит множеству $f(x_i^{\varepsilon_j})$.

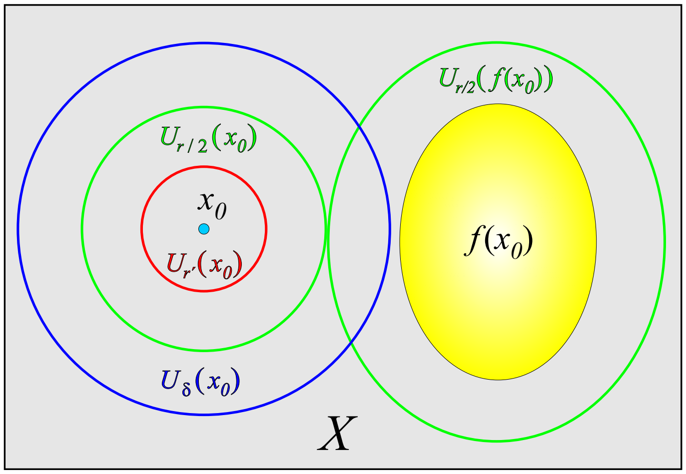

Рис. 6.3: Иллюстрация к доказательству теоремы Какутани

Лемма 6.49. *В сделанных выше предположениях, точка* $x_i^{\varepsilon_j}$ *лежит в* $U_\delta(x_0)$.

Доказательство. Действительно, $\|x^{\varepsilon_j} - x_i^{\varepsilon_j}\| < \varepsilon_j < \delta/2$. С другой стороны, точка x^{ε_j} лежит в $U_{r'}(x_0)$, поэтому $\|x_0 - x^{\varepsilon_j}\| < r' \le \delta/2$, откуда

$$\|x_0 - x_i^{\varepsilon_j}\| \le \|x_0 - x^{\varepsilon_j}\| + \|x^{\varepsilon_j} - x_i^{\varepsilon_j}\| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta,$$

поэтому $x_i^{\varepsilon_j}$ лежит в $U_\delta(x_0)$, что и требовалось. □

Далее, в силу выбора окрестности $U_\delta(x_0)$, образы всех точек $x_i^{\varepsilon_j}$ из этой окрестности при отображении f содержатся в $U_{r/2}\big(f(x_0)\big)$. Поэтому все рассматриваемые $y_i^{\varepsilon_j}$ лежат в $U_{r/2}\big(f(x_0)\big)$. По задаче 6.42, окрестность $U_{r/2}\big(f(x_0)\big)$ выпукла, поэтому точка $\varphi^{\varepsilon_j}(x^{\varepsilon_j})$, лежащая, как было отмечено выше, в выпуклой оболочке точек $y_i^{\varepsilon_j}$, лежит в $U_{r/2}\big(f(x_0)\big)$.

Таким образом, точка $x^{\varepsilon_j} = \varphi^{\varepsilon_j}(x^{\varepsilon_j})$ лежит одновременно в $U_{r/2}\big(f(x_0)\big)$ и в $U_{r'}(x_0) \subset U_{r/2}(x_0)$, чего не может быть, так как эти окрестности не пересекаются. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. □

Теорема полностью доказана. □

Глава 7

Конкурентное равновесие в модели Эрроу–Дебре

План. Модель Эрроу–Дебре, условия на сектор потребления, условия на производственный сектор, теорема о существовании конкурентного равновесия в модели Эрроу–Дебре, компактность линейная комбинация многозначных отображений, полунепрерывность сверху линейных комбинаций с ненулевыми коэффициентами полунепрерывных сверху многозначных отображений, полунепрерывность сверху декартова произведения полунепрерывных сверху многозначных отображений, функция избыточного предложения, непустота, выпуклость, компактность и полунепрерывность сверху и снизу каждого бюджетного множества, каждого множества спроса, каждого совокупного множества спроса и каждого совокупного предложения, лемма Гейла, завершение доказательства теоремы о существовании конкурентного равновесия в модели Эрроу–Дебре.

В данном разделе мы разберем частный случай модели Вальраса, наложив дополнительные ограничения на вид функций дохода потребителей $I(p)$ и сделав дополнительные предположения о начальной собственности и характере поведения потребителей. Рассматриваемая модель называется ***модель Эрроу–Дебре***. Отметим, что частным случаем модели Эрроу–Дебре является модель чистого обмена, т.е. случай, когда производство отсутствует. Последнюю модель можно применять при исследовании международной торговли.

Ниже нам понадобится еще ряд общих результатов, собранных в следующей задаче.

Задача 7.1. Пусть A и B — непустые подмножества $\mathbb{R}^n$.

- Покажите, что если A и B компактны, то декартово произведение $A \times B$ и сумма Минковского $A + B$ тоже компактны.
- Покажите, что если A и B выпуклы, то $A \times B$ и $A + B$ тоже выпуклы.
- Приведите пример замкнутых A и B таких, что $A + B$ незамкнуто.

Перейдем к описанию модели Эрроу–Дебре. Начнем с ограничений на **сектор потребления**. Везде ниже мы будем пользоваться обозначениями, введенными при описании модели Вальраса, см. параграф 5.1 главы 5.

Первое условие касается устройства каждого потребительского множества X_i. А именно, мы считаем, что для каждого i выполняется

(1a) $X_i \subset \mathbb{R}^n_+$ (см. раздел 5.1);

(1b) множество X_i выпукло, замкнуто и неограничено;

(1c) для любой последовательности $x_1, x_2, \dots$ точек из X_i такой, что k-ая координата этих точек стремится к бесконечности, вытекает, что все прочие координаты также стремятся к бесконечности (усиленное условие ненасыщаемости, см. раздел 2.3).

Замечание 7.2. Из условия $(1a)$ вытекает, что совокупное потребительское множество $X = \sum_{i=1}^{l} X_i$ лежит в $\mathbb{R}^n_+$.

Из условия $(1b)$ вытекает, в силу задачи 7.1, выпуклость совокупного потребительского множества $X = \sum_{i=1}^{l} X_i$. Кроме того, это условие влечет, что если каждое бюджетное множество $B_i(p)$ выпукло (как пересечение выпуклого X_i и замкнутого полупространства).

Второе условие мы накладываем на функцию полезности $u_i(x)$, определенную на X_i и выражающую приоритеты i-ого потребителя. А именно, мы предполагаем, что при каждом $i = 1, \dots, l$ функция $u_i(x)$

(2a) непрерывна;

(2b) вогнута;

(2c) потребитель ***глобально*** ненасыщаем.

Замечание 7.3. Условие (2*b*) на $u_i(x)$ означает, что для любых точек x и x' из X_i и любого $\alpha \in [0,1]$ имеем:

$$u_i\big((1-\alpha)x + \alpha x'\big) \geq (1-\alpha)\, u_i(x) + \alpha\, u_i(x').$$

В сделанных предположениях относительно множеств X_i, условие вогнутости влечет выпуклость каждого множества

$$\{x \in X_i : u_i(x) \geq c\},$$

где c — произвольная константа (докажите).

Условие (2*c*) на $u_i(x)$ означает, что для любого $x \in X_i$ существует такой $x' \in X_i$, что $u_i(x') > u_i(x)$, иными словами, функция $u_i(x)$ не достигает максимального значения. Последнее может быть интерпретировано так: для любого набора $x \in X_i$ существует "более привлекательный" набор $x' \in X_i$.

Третье условие **(3)** характеризует начальный запас товаров b_i каждого потребителя: для всякого $i = 1, \ldots, l$ существует вектор $\bar{x}_i \in X_i$ такой, что $\bar{x}_i \ll b_i$. Это условие техническое, и одним из полезных следствий этого условия является тот факт, что $b_i \gg 0$, т.е. каждый потребитель имеет ненулевой начальный запас всякого товара. Другое важное следствие: при каждом распределении p бюджетное множество $B_i(p)$ непусто, так как $\langle p, \bar{x}_i\rangle \leq \langle p, b_i\rangle + I(p) = K_i(p)$, откуда $\bar{x}_i \in B_i(p)$.

Четвертое условие **(4)** описывает функцию дохода $K_i(p)$: функции дохода $K_i(p)$ каждого i-ого из l потребителей имеют следующий вид:

$$K_i(p) = \langle p, b_i\rangle + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \langle p, y_j\rangle,$$

где b_i — начальный запас товаров i-ого потребителя, а α_{ij} — доля доходов j-ого производителя, которую получает i-ый потребитель. При этом предполагается, что $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} = 1$ (доход каждого j-ого из m производителей полностью делится между всеми потребителями; это может быть, например, в случае, когда все производства акционированы, и все доходы производств полностью распределяются между акционерами).

Приведем теперь ограничения на **производственный сектор**.

Первое ограничение **(1)**: каждое технологическое множество Y_k компактно и содержит начало координат 0. Последнее условие может быть интерпретировано следующим образом: производство устроено так, что его можно остановить.

Второе ограничение **(2)**: совокупное технологическое множество $Y = \sum_{i=1}^{m} Y_k$ выпукло.

И, наконец, будем предполагать, что неотрицательный **вектор цен** p не обращается в ноль. В силу сделанных предположений на функцию дохода, эта функция линейно зависит от системы цен p, поэтому бюджетные ограничения $\langle x, p\rangle \leq K(p)$ не зависят от длины вектора p, а зависят лишь от его направления. Поэтому в дальнейшем мы будем предполагать, что вектор цен $p = (p_1, \ldots, p_n)$ удовлетворяет условию нормировки:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

или, что то же самое, вектор p принадлежит стандартному симплексу $\Delta := \Delta^{n-1}$ размерности $n-1$:

$$\Delta = \Big\{p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\Big\}.$$

Основная цель данной главы — доказать следующую теорему.

Теорема 7.4. *В модели Эрроу–Дебре существует конкурентное равновесие.*

Доказательство. Идея доказательства состоит в следующем. Сначала мы покажем, что функции совокупного спроса и предложения полунепрерывны сверху. Затем, с помощью этих функций, мы построим полунепрерывное сверху многозначное отображение $\varphi(p)$, называемое ***функцией избыточного предложения***, так:

$$\varphi(p) = \Psi(p) - \Phi(p).$$

Далее, мы докажем лемму Гейла (формулировку этой леммы см. ниже), из которой вытекает, что существуют такие цены p^*, для которых множество $\varphi(p^*)$ содержит неотрицательный вектор u^*. Иными словами, при ценах p^* имеется такой коллективный спрос $x^* \in \Phi(p^*)$ и такое коллективное предложение $y^* \in \Psi(p^*)$, что $y^* \geq x^*$, т.е. спрос не превышает предложения. Это, напомним, одно из условий определения конкурентного равновесия (определение 5.8). Для завершения доказательства мы покажем, что условие ненасыщаемости влечет выполнение закона Вальраса в узком смысле: $\langle p^*, x^* \rangle = \langle p^*, y^* \rangle$. Тем самым мы проверим для тройки (x^*, y^*, p^*) выполнение всех условий конкурентного равновесия.

Отметим, что теорема Какутани будет существенно использована при доказательстве леммы Гейла. Перейдем к подробностям.

Для реализации нашего плана нам, прежде всего, потребуется перейти от некомпактного совокупного потребительского множества $X = \sum_{i=1}^{l} X_i$ к некоторой компактной его части. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 7.5. *Пусть $B_i(p)$ обозначает вальрасово бюджетное множество i-ого потребителя. Тогда существует выпуклое компактное подмножество $X_i^c \subset X_i$ такое, что для любого $p \in \Delta$ имеем $B_i(p) \subset X_i^c$. Таким образом, при каждом p бюджетное множество $B_i(p)$ непусто, выпукло и компактно, а множество $\Phi_i(p)$ непусто и содержится в X_i^c.*

Доказательство. Непустота и выпуклость бюджетного множества $B_i(p)$ уже обсуждалась (они вытекают соответственно из ограничений (1b) и (3) на сектор потребления). Далее, положим $B_i = \cup_{p\in\Delta} B_i(p)$ и покажем, что множество B_i ограничено, откуда вытекает, что все множества $B_i(p)$ лежат внутри некоторого шара, а, значит, и внутри выпуклого компакта, полученного при пересечении замкнутого выпуклого множества X_i с этим шаром. Этот выпуклый компакт мы возьмем в качестве X_i^c. Так как $B_i(p)$ замкнуто в силу примера 6.20 и ограничено, то $B_i(p)$ компактно по задаче 6.24. По условию, функция полезности u_i непрерывна, поэтому, по задаче 6.12, ее ограничение на $B_i(p)$ также непрерывно, откуда, в силу задачи 6.27, ограничение u_i на $B_i(p)$ принимает свое наибольшее значение. Это доказывает, что $\Phi_i(p)$ непусто. По построению, $\Phi_i(p) \subset X_i^c$.

Итак, покажем ограниченность множества B_i. Так как Δ — компакт, то непрерывная функция дохода $K_i(p)$ для i-ого потребителя, в силу задачи 6.27, ограничена некоторым значением K_i. Положим

$$\bar{B}_i(p) = \big\{x \in X_i : \langle x, p \rangle \leq K_i\big\}.$$

Так как $B_i(p) \subset \bar{B}_i(p)$, то достаточно показать, что множество $\bar{B}_i := \cup_{p\in\Delta} \bar{B}_i(p)$ ограничено.

Предположим противное, т.е. пусть существует такая последовательность (x_s, p_s), что $x_s \in \bar{B}_i(p_s)$, $p_s \in \Delta$, и $\|x_s\| \to \infty$ при $s \to \infty$. Так как Δ — компакт в силу замечания 6.35, то, по задаче 6.26, в последовательности p_s можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, поэтому, без ограничения общности, будем сразу предполагать, что последовательность p_s сходится к некоторой точке $p_0 \in \Delta$. По определению симплекса Δ, одна из координат точки p_0, скажем, j-ая координата, строго больше нуля, поэтому, начиная с некоторого номера s, у всех точек p_s их j-ые координаты больше некоторого $\delta > 0$. С другой стороны, по условию (1c) на множество X_i, все координаты точек x_s стремятся к бесконечности. Поэтому, учитывая, что все координаты точек p_s и x_s неотрицательны, получаем $\langle p_s, x_s \rangle \to \infty$ при $s \to \infty$. Однако $\langle x_s, p_s \rangle \leq K_i$ для любого s, и мы приходим к противоречию, завершающему доказательство леммы. □

Следствие 7.6. *Существует выпуклое компактное подмножество $X^c \subset X$ такое, что для любого $p \in \Delta$ выполняется $\Phi(p) \subset X^c$.*

Доказательство. По лемме 7.5, каждое множество $\Phi_i(p)$ лежит в некотором выпуклом компакте X_i^c. В силу задачи 7.1, множество $X^c = \sum_{i=1}^{l} X_i^c$ — тоже выпуклый компакт. Но $\Phi(p) = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(p)$ лежит в X^c, что и требовалось. □

Далее, доказательство полунепрерывности сверху многозначного отображения $\Phi(p)$ мы проведем следующим образом. Сначала мы покажем, что линейная комбинация полунепрерывных сверху многозначных отображения также является полунепрерывной сверху. Таким образом, мы сведем задачу к доказательству полунепрерывности сверху для каждого $\Phi_i(p)$. Затем мы покажем, что многозначное отображение $B_i(p)$ является непрерывным, т.е. одновременно полунепрерывным сверху и снизу. И, наконец, замечая, что при каждом p множество $\Phi_i(p)$ является подмножеством в $B_i(p)$, на котором вогнутая функция $u_i(p)$ достигает своих наибольших значений, мы покажем, что $\Phi_i(p)$ полунепрерывно сверху.

Определение 7.7. Пусть $a(x)$ и $b(x)$ — два многозначных отображения из метрического пространства X в $\mathbb{R}^n$, и пусть λ и μ — произвольные вещественные числа. Тогда ***линейной комбинацией*** $\lambda\, a(x) + \mu\, b(x)$ называется многозначное отображение $x \mapsto \lambda\, a(x) + \mu\, b(x)$.

Лемма 7.8. *Пусть $a(x)$ и $b(x)$ — два полунепрерывных сверху многозначных отображения из метрического пространства X в $\mathbb{R}^n$, и пусть λ и μ — произвольные отличные от нуля вещественные числа. Тогда линейная комбинация $\lambda\, a(x) + \mu\, b(x)$ является полунепрерывным сверху многозначным отображением.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ многозначные отображения $\lambda\, a(x)$ и $a(x) + b(x)$ полунепрерывны сверху.

Положим $c(x) = \lambda\, a(x)$. Будем рассматривать λ как отображение $\lambda\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, являющееся растяжением, переводящим вектор y в $\lambda\, y$. Ясно, что каждое такое растяжение λ преобразует ε-окрестность произвольного подмножества $Y \subset \mathbb{R}^n$ в ε'-окрестность множества $\lambda(Y)$, где $\varepsilon' = |\lambda|\, \varepsilon$. Так как $c(x) = \lambda\big(a(x)\big)$, то если U — это ε-окрестность множества $c(x)$, а $\varepsilon' = \varepsilon/|\lambda|$, мы заключаем, что ε'-окрестность U' множества $a(x)$ перейдет при отображении λ в U. В силу полунепрерывности сверху отображения $a(x)$, существует окрестность V точки x такая, что для любой точки $x' \in V$ выполняется $a(x') \subset U'$, и, значит,

$$c(x') = \lambda\big(a(x')\big) \subset \lambda(U') = U,$$

что и доказывает полунепрерывность сверху многозначного отображения $c(x)$ в силу произвольности числа ε и точки x.

Пусть теперь $c(x) = a(x) + b(x)$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε-окрестность U множества $c(x)$. Положим $\varepsilon' = \varepsilon/2$, и пусть U' и U'' обозначают ε'-окрестности множеств $a(x)$ и $b(x)$ соответственно. Рассмотрим отображение $\sigma\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенное так: $\sigma(y', y'') = y' + y''$. По определению, имеем $\sigma\big(a(x), b(x)\big) = c(x)$. Покажем, то $\sigma(U', U'') \subset U$. Действительно, пусть $y' \in U'$ и $y'' \in U''$. Тогда существуют такие $z' \in a(x)$ и $z'' \in b(x)$, что $\|y' - z'\| < \varepsilon'$ и $\|y'' - z''\| < \varepsilon'$. Пусть $y = \sigma(y', y'') = y' + y''$ и $z = \sigma(z', z'') = z' + z''$. Ясно, что $z \in c(x)$, и, кроме того,

$$\|z - y\| = \|z' + z'' - y' - y''\| \le \|z' - y'\| + \|z'' - y''\| < \varepsilon' + \varepsilon' = \varepsilon,$$

т.е. $y \in U$, что и требовалось.

Так как многозначные отображения $a(x)$ и $b(x)$ полунепрерывны сверху, то существует такая окрестность V точки x, что для любой точки $x' \in V$ имеем: $a(x') \subset U'$ и $b(x') \subset U''$, поэтому

$$c(x') = \sigma\big(a(x'), b(x')\big) \subset \sigma(U', U'') \subset U,$$

что и завершает доказательство леммы. □

Задача 7.9. Пусть X и Y — метрические пространства, $a\colon X \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ и $b\colon Y \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ — полунепрерывные сверху многозначные отображения, и $\mu\colon X \times Y \rightrightarrows \mathbb{R}^{n+m}$ задано так: $\mu(x, y) = a(x) \times b(y)$. Докажите, что многозначное отображение μ также полунепрерывно сверху.

Покажем теперь, что многозначное отображение $B_i(p)$ является непрерывным. Прежде всего, в соответствии с леммой 7.5, для любого $p \in \varDelta$ имеем $B_i(p) \in X_i^c$. Иными словами, область значений отображения B_i содержится в X_i^c.

Начнем с доказательства полунепрерывности сверху.

Лемма 7.10. *Отображение $B_i(p)$ полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. для некоторого $p \in \varDelta$ существует такая ε-окрестность U множества $B_i(p)$, что для некоторой сходящейся к p последовательности точек $p_s \in \varDelta$ в каждом множестве $B_i(p_s)$ имеется точка x_s, не принадлежащая U. В силу компактности множества X_i^c, в последовательности x_s можно, в силу задачи 6.26, выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $x \in X_i^c$. Поэтому, без ограничения общности, будем считать, что сама последовательность x_s сходится к $x \in X_i^c$. Таким образом, мы построили последовательность (p_s, x_s) точек из $\varDelta \times X_i^c$, сходящуюся к точке (p, x).

Покажем, что $x \in B_i(p)$. Определим отображение $f\colon \Delta \times X_i^c \to \mathbb{R}$, положив $f(p,x) = \langle p, x\rangle - K_i(p)$. Так как $K_i(p)$ — непрерывная функция, то $f(p,x)$ — также непрерывно. Ясно, что

$$B_i(p) = \bigl\{x \in X_i^c : f(p,x) \le 0\bigr\},$$

поэтому

$$A_i := f^{-1}\bigl((-\infty, 0]\bigr) = \bigl\{(p,x) \in \Delta \times X_i^c : p \in \Delta,\ x \in B_i(p)\bigr\}.$$

Ясно, что все точки (p_s, x_s) лежат в A_i.

Так как функция $f(p,x)$ непрерывна, то, в силу задачи 6.21, множество A_i замкнуто, поэтому и точка (p,x) также лежит в A_i. Отсюда немедленно заключаем, что $x \in B_i(p)$.

Однако из последнего утверждения вытекает, что, начиная с некоторого номера s, все точки x_s лежат в ε-окрестности точки x, а, значит, и в ε-окрестности U множества $B_i(p)$. Последнее противоречие и завершает доказательство полунепрерывности сверху отображения $B_i(p)$. □

Лемма 7.11. *Отображение $B_i(p)$ полунепрерывно снизу.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. имеется такое p, что в этой точке отображение $B_i(p)$ не полунепрерывно снизу. Последнее означает, что существует такая последовательность p_s, стремящаяся к p, и такой $x \in B_i(p)$, для которого в семействе множеств $B_i(p_s)$ нельзя выбрать сходящейся к x последовательности. Отсюда вытекает, что у точки x существует окрестность U такая, что для некоторой подпоследовательности в последовательности p_s соответствующие множества $B_i(p_s)$ не пересекают U. Поэтому, без ограничения общности, будем сразу предполагать, что все $B_i(p_s)$ не пересекают U.

Напомним, что, в соответствии с условием (4) на потребительский сектор, функция дохода $K_i(p)$ равна $\langle p, b_i\rangle + \sum_{j=1}^m \alpha_{ij}\langle p, y_j\rangle$. По условию (3), существует такой $\bar{x}_i \in B_i(p)$, что $\bar{x}_i \ll b_i$, поэтому $\langle \bar{x}_i, p\rangle < K(p)$ при каждом $p \in \Delta$. Рассмотрим отрезок $[\bar{x}_i, x]$. Так как функция $f(p,x) = \langle p, x\rangle - K(p)$ при каждом фиксированном p линейна по x, то ее ограничение на отрезок $[\bar{x}_i, x]$ также линейно. Так как $f(p, \bar{x}_i) < 0$ и $f(p,x) \le 0$, то в любой окрестности точки x, в частности, в выбранной окрестности U, существует x' такая, что $f(p, x') < 0$. В силу непрерывности функции f, для всех p', достаточно близких к p, имеем $f(p', x') < 0$, т.е. $x' \in B(p')$. Поэтому, существует такое s, что $x' \in B(p_s)$, т.е. окрестность U пересекает $B(p_s)$. Полученное противоречие и завершает доказательство леммы. □

Лемма 7.12. *Отображение $\Phi_i(p)$ полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 7.10, мы, предположив противное, найдем для некоторого p такую ε-окрестность U множества $\Phi_i(p)$, что для некоторой последовательности точек $p_s \in \Delta$, сходящихся к p, в каждом $\Phi_i(p_s)$ можно выбрать точку x_s, не лежащую в U. При этом опять, без ограничения общности, будем предполагать, что последовательность x_s сходится к некоторой точке $x \in X_i^c$.

Мы покажем, что точка x лежит в $\Phi_i(p)$, чем и завершим доказательство леммы по соображениям, сходным с приведенными в доказательстве леммы 7.10.

Вновь положим $f(p,x) = \langle p, x\rangle - K_i(p)$ и $A_i = f^{-1}\bigl((-\infty, 0]\bigr) \subset \Delta \times X_i^c$. Так как $\Phi_i(p_s) \subset B_i(p_s)$, получаем, что все точки (p_s, x_s) лежат в A_i, поэтому, из замкнутости множества A_i, имеем $x \in B_i(p)$.

Покажем, что $u_i(x) = \max_{x' \in B_i(p)} u_i(x')$, т.е. что $x \in \Phi_i(p)$. Пусть это не так. Так как $B_i(p)$ компактно, существует точка $z \in B_i(p)$, в которой достигается максимум функции u_i. По предположению, $u_i(x) < u_i(z)$.

Так как, по лемме 7.11, отображение $B_i(p)$ полунепрерывно снизу, то существует сходящаяся к z последовательность z_s таких, что $z_s \in B_i(p_s)$. Однако $u_i(z_s) \le u_i(x_s)$, поэтому из непрерывности функции u_i заключаем, что

$$u_i(x) = u_i\bigl(\lim_{s\to\infty} x_s\bigr) = \lim_{s\to\infty} u_i(x_s) \ge \lim_{s\to\infty} u_i(z_s) = u_i\bigl(\lim_{s\to\infty} z_s\bigr) = u_i(z),$$

противоречие. Доказательство закончено. □

Лемма 7.13. *Множества $\Phi_i(p)$ являются непустыми выпуклыми компактами.*

Доказательство. По лемме 7.5, множества $\Phi_i(p)$ непусты. Эти множества ограничены, так как, по той же лемме 7.5, они являются подмножествами компакта X_i^c, который ограничен в силу задачи 6.24. Эти множества замкнуты, так как являются пересечением двух замкнутых множеств:

- множества $\{u_i = u_{\max}\}$, где $u_{\max}$ — максимальное значение непрерывной функции u_i на компакте $B_i(p)$ (пример 6.20), и

- множества $B_i(p)$, замкнутого в силу задачи 6.24.

Таким образом, каждое $\Phi_i(p)$ — компакт, снова по задаче 6.24. Докажем теперь выпуклость множества $\Phi_i(p)$.

Пусть x' и x'' — две произвольные точки из $\Phi_i(p)$, и x — произвольная точка из отрезка $[x', x'']$, т.е. $x = (1-\alpha)x' + \alpha x''$ для некоторого $0 \le \alpha \le 1$. Так как функция $u_i(x)$ вогнута по условию (2b), имеем

$$u_i(x) \ge (1-\alpha)\, u_i(x') + \alpha\, u_i(x'').$$

В силу выпуклости множества $B_i(p)$, точка x лежит в $B_i(p)$. Так как в точках x' и x'' функция u_i принимает максимальное на $B_i(p)$ значение $u_{\max}$, имеем $u_i(x) \ge u_{\max}$, поэтому $u_i(x) = u_{\max}$, и, значит, $x \in \Phi_i(p)$, что и требовалось. □

Лемма 7.14. *Отображение $\Phi(p)$ полунепрерывно сверху. Каждое множество $\Phi(p)$ является непустым выпуклым компактом.*

Доказательство. Отображение $\Phi(p)$ равно, по определению, сумме отображений полунепрерывных сверху $\Phi_i(p)$, поэтому, в соответствии с леммой 7.8, отображение $\Phi(p)$ также полунепрерывно сверху.

Так как, в силу задачи 7.1, сумма непустых выпуклых компактов является непустым выпуклым компактом, мы, используя лемму 7.13, заключаем, что множество $\Phi(p)$ также непусто, выпукло и компактно. Доказательство закончено. □

Лемма 7.15. *Отображение $\Psi(p)$ полунепрерывно сверху. Каждое множество $\Psi(p)$ является непустым выпуклым компактом.*

Доказательство. Первое утверждение доказывается аналогично первой части леммы 7.14. Для доказательства второй части заметим, что совокупное технологическое множество Y, в силу второго ограничения на производственный сектор, предполагается выпуклым, а в силу первого ограничения — компактным. По общему определению, оно непусто. В силу предложения 5.3, множество $\Psi(p)$ совпадает с множеством максимумов непрерывной функции $\langle p, y\rangle$, ограниченной на Y. Остается применить рассуждения из заключительной части доказательства леммы 7.13. □

Рассмотрим теперь функцию избыточного предложения $\varphi(p) = \Psi(p) - \Phi(p)$. По леммам 7.14, 7.15 и 7.8 это многозначное отображение полунепрерывно сверху. По леммам 7.14 и 7.15, множества $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$ — выпуклые непустые компакты. Ясно, что $-\Phi(p)$ — также выпуклый непустой компакт, поэтому и каждое множество $\varphi(p)$ — выпуклый непустой компакт по задаче 7.1. Далее, по предложению 5.6, для любого $u \in \varphi(p)$ выполняется $\langle u, p\rangle \ge 0$ (закон Вальраса). Все эти свойства мы используем ниже, после доказательства следующей леммы.

Лемма 7.16 (Гейл)**.** *Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}^n_+$ — стандартный симплекс, $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый компакт, и $\varphi\colon \Delta \rightrightarrows \Gamma$ многозначное отображение, удовлетворяющее следующим свойствам*:

(1) *отображение φ полунепрерывно сверху, и для всякого $p \in \Delta$ образ $\varphi(p)$ является непустым выпуклым подмножеством в Γ*;

(2) *выполняется закон Вальраса в широком смысле, т.е. $\langle p, u\rangle \ge 0$ для любого $u \in \varphi(p)$.*

Тогда существует такой вектор $p^* \in \Delta$, что $\varphi(p^*) \cap \mathbb{R}^n_+ \ne \emptyset$.

Доказательство. Для каждого $u \in \Gamma$ определим множество $\nu(u)$ следующим образом:

$$\nu(u) = \{p \in \Delta : \langle p, u\rangle = \min_{p' \in \Delta} \langle p, u\rangle\}.$$

Рассмотрим многозначное отображение $\mu : \Delta \times \Gamma \rightrightarrows \Delta \times \Gamma$, задаваемое так:

$$\mu(p, u) = \nu(u) \times \varphi(p).$$

Покажем, что отображение μ удовлетворяет условиям теоремы Какутани. Действительно, множество $\Delta \times \Gamma$ выпукло и компактно в силу задачи 7.1. Далее, легко видеть, что множества $\nu(u)$ непусты и выпуклы, а множества $\varphi(p)$ непусты и выпуклы по предположению. Поэтому все $\mu(p, u)$ непусты и выпуклы по задаче 7.1.

Лемма 7.17. *Отображение $\nu\colon \Gamma \rightrightarrows \Delta$ полунепрерывно сверху.*

Доказательство. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим ε-окрестность произвольного множества $\nu(u)$. Мы должны показать, что существует окрестность V точки u такая, что для любого $u' \in V$ имеем $\nu(u) \subset U$. Предположим противное. Тогда существует такая последовательность $u_s \to u$, что в каждом $\nu(u_s)$ имеется некоторая точка p_s, не принадлежащая U. По определению, $\langle p_s, u_s \rangle \le \langle p', u_s \rangle$ для любого $p' \in \mathit{\Delta}$. В силу компактности множества $\mathit{\Gamma}$, из последовательности p_s можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, поэтому, не ограничивая общности, будем сразу считать, что последовательность p_s сходится к некоторому $p \in \mathit{\Delta}$.

В силу непрерывности скалярного произведения, имеем $\langle p, u \rangle \le \langle p', u \rangle$ для любого p' из $\mathit{\Delta}$, поэтому $p \in \nu(u)$. Следовательно, все точки p_s, достаточно близкие к p, лежат в окрестности U. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. $\square$

Вернемся к доказательству леммы Гейла. Так как многозначные отображения ν и $\varphi(p)$ полунепрерывны сверху, то многозначное отображение μ также полунепрерывно сверху в силу задачи 7.9.

Таким образом, мы видим, что все условия теоремы Какутани выполняются, поэтому существует такая точка (p^*, u^*), что $(p^*, u^*) \in \nu(u^*) \times \varphi(p^*)$, иными словами, $p^* \in \nu(u^*)$ и $u^* \in \varphi(p^*)$.

По определению множества $\nu(u^*)$, мы получаем, что

$$\langle p^*, u^* \rangle \le \langle p, u^* \rangle \text{ для любого } p \in \mathit{\Delta}.$$

По условию леммы, выполняется закон Вальраса в широком смысле, т.е. $\langle p^*, u^* \rangle \ge 0$, поэтому

$$\langle p, u^* \rangle \ge 0 \text{ для любого } p \in \mathit{\Delta}.$$

Из произвольности точки $p \in \mathit{\Delta}$ вытекает, что $u^* \ge 0$, т.е. $u^* \in \varphi(p^*) \cap \mathbb{R}^n_+$, откуда $\varphi(p^*) \cap \mathbb{R}^n_+ \ne \emptyset$, что и требовалось. Лемма Гейла полностью доказана. $\square$

Из леммы Гейла и доказанных выше свойств функции избыточного спроса $\varphi(p)$ вытекает, что существует такой вектор цен $p^* \in \mathit{\Delta}$, при котором множество $\varphi(p^*)$ содержит неотрицательный элемент u^*. По определению, имеются $x^* \in \mathit{\Phi}(p)$ и $y^* \in \mathit{\Psi}(p)$ такие, что $u^* = y^* - x^*$, откуда $x^* \le y^*$, т.е. существуют такие цены p^*, при которых спрос x^* не превышает предложения y^*.

Нам осталось доказать, что для тройки (x^*, y^*, p^*) выполняется закон Вальраса в узком смысле. Для этого воспользуемся предположением о глобальной ненасыщаемости потребителей, откуда следует, что для любого $x \in \mathit{\Phi}_i(p)$ имеет место равенство $\langle p, x \rangle = K_i(p)$. Выкладки, аналогичные тем, что проводятся при выводе закона Вальраса в широком смысле слова, дают равенство $\langle p, x \rangle = \langle p, y \rangle$ для любых $x \in \mathit{\Phi}(p)$ и $y \in \mathit{\Psi}(p)$. Доказательство закончено. $\square$

Литература

[1] Карев В.П. *Очерк истории математических методов в экономике.* Экономический анализ: теория и практика, 2011, N 5 (212), с. 54–60.

[2] Ашманов С.А. *Математические модели и методы в экономике.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

[3] Емельянов А.А., Власова Е.А., Дума Р.В. *Имитационное моделирование экономических процессов.* М.: Финансы и статистика, 2002.

[4] Пиндайк Р.С., Рубинфельд Д.Л., *Микроэкономика.* М.: Дело, 2001.

[5] Мулен Э. *Теория игр с примерами из математической экономики.* М.: Мир, 1985.

[6] Таха Х.А. *Введение в исследование операций.* М.: Издательский дом "Вильямс", 2005.

[7] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология.* Учебное пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1979.

[8] Тужилин А.А. *Лекции по Геометрии*-2 для первого курса спецпотока мехмата, `http://dfgm.math.msu.su/files/0specdfgm/Tuzhilin/Geometry2.pdf`